ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 6, № 3 (2002) с. 253–288

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 6, No. 3 (2002) p. 253–288

ТЕОРІЯ САМОПОДІБНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ (ЧАСТИНА I)

О. І. Олємской, Д. О. Харченко
Сумський державний університет
вул.Римського-Корсакова, 2, Суми, 40007, Україна
(Отримано 17 червня 2002 р.)

Робота ґрунтується на використанні степеневих асимптотик розподілу самоподібних систем. На підставі наочних представлень розглянуто аномальну природу блукань частинки, польове подання стохастичного процесу, а також часові залежності найімовірніших величин та моментів стохастичної змінної. Згідно з феноменологічним рівнянням для функції розподілу з'ясовано різницю між основними типами блукань частинки — броунівською дифузією, польотами Лєві та субдифузією. Показано, що тип руху визначається просторово-часовим розподілом інтенсивности стрибка частинки: при аналітичній формі маємо звичайну дифузію, неаналітичність у просторі відповідає польотам Лєві, а часова — субдифузії. У першому випадку функція розподілу набуває степеневого множника за координатою, у другому — за часом. Знайдено зв'язки динамічного показника з індексами Лєві та субдифузії, а також фрактальною вимірністю фазового простору й показником мультиплікативного шуму. Продемонстровано, що дифузія в ультраметричному просторі визначається рівнянням Фоккера–Планка, вигляд якого задається похідною Джексона. Встановлено, що наявність мультиплікативного шуму порушує не тільки адитивність ієрархічної системи, а й властивість мультиплікативности ймовірностей. Знайдено загальний вигляд дробово-диференціяльного рівняння руху, яке у граничних випадках зводиться до хвильового, осциляційного та транспортно-хвильового, рівняння Ландау–Халатнікова для параметра порядку, який зберігається й не зберігається, рівняння Пуассона, а також дебаївського рівняння екранування. У нелінійному випадку дробово-диференціяльне рівняння набирає вигляду рівняння Кортевеґа де Вріза, рівняння синус-Ґордона та нелінійного рівняння Шредінґера. Доведено, що ймовірність розподілу має експоненціяльний вигляд з показником, який з точністю до знака зводиться до дії евклідової теорії поля. Для білого та кольорового мультиплікативних шумів досліджено еволюцію найімовірніших значень стохастичної змінної та спряженого імпульсу. З'ясовано, що при зміні показника мультиплікативної функції система відчуває реверсивний перехід із упорядкованого стану в невпорядкований, а потім навпаки. Із лаґранжіяна та дисипативної функції, що інваріянтні стосовно перетворень подібности, одержано польові рівняння, які приводять до розподілу Цалліса.

Ключові слова: самоподібність, мультиплікативний шум, польоти Лєві, субдифузія, фрактальна вимірність, неадитивність, дробовий диференціял/інтеґрал.

PACS number(s): 02.50.–r, 47.53.+n, 72.70.+m

Світлій пам'яті
нашого друга та колеги
Жені Торопова присвячуємо

ВСТУП

Добре відомо, що симетрія подає одну з найважливіших властивостей фізичних об'єктів, яка приводить до принципових обмежень їхніх картин. Вона виражається в наявності законів збереження, використання яких дозволяє суттєво деталізувати опис симетричного об'єкта. Найважливішим таким прикладом виступають властивості однорідности та ізотропности простору–часу, наслідком яких є закони збереження енерґії, імпульсу та моменту імпульсу. Подібне використання властивостей симетрії простору станів фізичної системи приводить до законів збереження узагальнених зарядів. Вивчення систем, у яких відбувається фазовий перехід, виявили, що вони проявляють цілком нові типи симетрії — щодо зміни масштабу. Такі самоподібні системи є основним об'єктом нашого дослідження.

Формально властивість самоподібности проявляється в однорідності функції розподілу стохастичної змінної, яка зображається степеневим множником із дробовим показником. Це означає, що така функція не має похідних цілого порядку, у зв'язку з чим опис самоподібної системи потребує введення абсолютно нового формалізму дробових похідних. Їхній порядок визначається критичним показником функції розподілу, дослідження якої представляється стандартною польовою схемою, якщо замість звичайної похідної використовувати похідну Джексона, що визначає швидкість зміни щодо перетворень самоподібности.

Наша робота є спробою подати з єдиних позицій наведені особливості самоподібних стохастичних систем. Ми покажемо, що найпростіше формалізм дробового диференціювання відображається наявністю мультиплікативного шуму, інтенсивність якого змінюється степеневим чином. З фізичної точки зору, така залежність означає, що фазовий простір системи є самоафінним об'єктом, фрактальна вимірність якого визначається показником степеня мультиплікативної функції. З іншого боку, наявність мультиплікативного шуму приводить до настільки істотної перебудови стохастичної системи, що вона втрачає не лише адитивність макроскопічних властивостей (типу ентропії Цалліса), але й властивість мультиплікативности — функція розподілу складеної системи не дорівнює добуткові функцій розподілу її складових.

Окрім звичайних Вступу на Висновків, огляд складається з чотирьох розділів. Перший з них містить феноменологічну теорію, що дозволяє показати самоподібний стохастичний процес. Другий розділ присвячений розвитку аксіоматичного підходу, який дає змогу зобразити статистичний розподіл у вигляді континуального набору стохастичних полів, що задовольняють принцип найменшої дії. Третій описує часову поведінку спостережуваних величин, які подано статистичними моментами довільного порядку. Останній з наведених розділів містить розгляд самоподібної стохастичної системи на прикладі самоорганізованої критичности, яка являє собою спонтанну перебудову стохастичної системи, далекої від рівноваги.

Поданий матеріял огляду настільки великий, що ми були вимушені розділити його на дві частини. У першій з них подано концепцію аномальної дифузії, яка узагальнює звичайне уявлення про броунівський рух частинки в результаті випадкового впливу середовища, а також польову теорію самоподібної стохастичної системи з неоднорідністю та мультиплікативним шумом (як білим, так і кольоровим). Друга частина містить матеріял розділів III, IV та Висновки. Для зручности сприйняття та збереження цілісности огляду ми залишаємо наскрізну нумерацію розділів, формул та рисунків. Літературні посилання зібрано окремо для першої та другої частин.

Перша частина починається з розділу I.A, який подає феноменологічну картину, основану на розгляді ймовірностей переміщення частинки залежно від часу та величини зміщення. У межах фур'є-лапласівського зображення показано, що загалом ці залежності можуть набирати неаналітичного характеру: якщо він відповідає залежності від хвильового вектора, то реалізується процес супердифузії, який протікає набагато швидше, ніж броунівський рух; аномальний характер частотної залежности уповільнює звичайну дифузію до субдифузії. При переході до просторово-часового розподілу зазначені аномалії приводять до похідних дробового порядку. В розділі I.B розглядаємо супердифузійний режим, при якому аномальна поведінка виявляється тільки вздовж координатної оси. На основі кінетичного рівняння показано, що розподіл за координатою визначається рівнянням із дробовою похідною, порядок якої $\alpha \geq 1$. Знайдено загальний розв'язок цього рівняння, який зводиться до функцій Фокса та Міттаґа–Лєффлєра. Визначено асимптотики в межах великих та малих значень координати. Показано, що випадок $\alpha < 2$ відповідає польотам Лєві, при яких дисперсія зміщення частинки є нескінченно великою; випадок $\alpha \geq 2$ зводиться до звичайної дифузії. Розгляд стохастичного процесу в зображенні Крамерса–Мояла та стохастичного рівняння Ланжевена дозволяє знайти часові залежності моментів нижчого порядку, які дають зв'язок індексу Лєві α з динамічним показником, фрактальною вимірністю фазового простору та показником ефективного коефіцієнта дифузії. Доведено, що одержані аналітичні залежності добре збігаються з результатами чисельного моделювання. Розділ I.C містить стиснутий розгляд субдифузійного режиму, при якому часова похідна має дробовий порядок $\beta < 1$. Знайдено розв'язок відповідного кінетичного рівняння, який зводиться до дебаєвської експоненти при $\beta \to 1$ і до гіперболічної залежности при $\beta \to 0$. Дослідження часової поведінки двох перших моментів показує, що відхилення показника β від одиниці змінює визначення динамічного показника, залишаючи незмінною фрактальну вимірність фазового простору.

Чисельне моделювання польотів Лєві виявило, що послідовні положення блукаючої частинки створюють кластерну структуру: на мезоскопічних часах частинка зміщується всередині кластерів, а на макроскопічних відбувається їх об'єднання, яке відповідає уповільненій стадії супердифузії. Розділ I.D подає статистичний опис останньої з наведений стадій, що відповідає блуканню по рівнях ієрархічного дерева, вузли якого являють собою кластери положень системи. Дослідження кінетичного рівняння показує, що, окрім звичайних дрейфової та дифузійної складових, ієрархічна дифузія подається аномальним внеском, зумовленим неоднорідністю відповідного простору. Цей внесок зводиться до похідної Джексона, яка визначає швидкість зміни функції розподілу стосовно до дилатації самоподібної системи. Розв'язання кінетичного рівняння дозволяє виділити три режими ієрархічної дифузії: (i) дрейфовий, при якому характерний масштаб та функція системи змінюється аномально; (ii) дифузійний, при якому характерний масштаб змінюється звичайним кореневим чином, а часова залежність функції розподілу залишається аномальною; (iii) стаціонарний режим, що характеризується розподілом Цалліса за рівнями ієрархії. Показано, що включення зовнішньої сили та мультиплікативного шуму приводить до балістичного режиму й гіперболічної залежности функції розподілу за часом. При цьому система втрачає не лише адитивні властивості щодо ентропії, а й властивість мультиплікативности функції розподілу.

Якщо попередні розділи I.A–I.D ґрунтуються на дослідженні кінетичного рівняння для функції розподілу, то розділ I.E містить дослідження дробово-диференціяльного рівняння руху для моментів стохастичної змінної типу параметра порядку. На підставі розгляду причинно-наслідкового зв'язку між силою та зумовленим нею потоком показано, що для самоподібних систем функція пам'яті, яка визначає цей зв'язок, має лапласівський образ із дробовим показником, значення якого задає фрактальну вимірність фазового простору. Відповідно часова похідна в рівнянні неперервности набуває дробового характеру. Її показник визначає співвідношення між кількістю механічних та дисипативних каналів, перші з яких є інваріянтними, а другі неінваріянтні щодо оберненості часу. Встановлено, що порядок дробової похідної за координатою визначає долю каналів, у яких реалізується процес, що зберігає параметр порядку. Таким чином, виділено основні типи рівнянь руху, що відповідають реактивному та дисипативному режимам параметра порядку, який частково зберігається. Окремими є хвильове, транспортно-хвильове та осциляційне рівняння, рівняння Ландау–Халатнікова, Дебая та Пуассона, а також термодинамічне рівняння рівноваги. Показано, як може бути проведено узагальнення на нелінійні рівняння типу Кортевеґа де Вріза, Шредингера та синус-Ґордона. На прикладі конформної інваріянтности з'ясовано, яким чином прихована симетрія нелінійного рівняння пов'язує його показники.

Розділ II присвячений польовій теорії самоподібної стохастичної системи з неоднородністю та мультиплікативним шумом — як білим, так і кольоровим. Наш розгляд основується на концепції стохастичного інтеґрала Іто, використання якого показує, що δ-корельований шум приводить до додаткового внеску, зумовленого мультиплікативним характером шуму. В розділі II.A на основі ґраткової моделі визначено явний вигляд інтеґрала за траєкторіями. На підставі дискретного рівняння Ланжевена ми визначаємо зв'язок між амплітудою гідродинамічної моди та вінерівським процесом. У результаті ймовірности реалізації наведених величин пов'язані множником, що містить якобіян їх взаємного перетворення та δ-функцію, яка враховує зв'язок між ними. Безпосередні обчислення якобіяна та фур'є-представлення δ-функції приводять до експоненціяльної форми функціонала розподілу стохастичної змінної, де показник з точністю до знака зводиться до дії евклідової теорії поля. Ефективний лаґранжіян зображає гамільтонову функцію від амплітуди гідродинамічної моди та спряженого імпульсу, який подає найімовірніше значення амплітуди флуктуацій. Знайдено явний вигляд рівнянь Ойлера, що визначають найімовірніші значення наведених змінних. Одержано дію, яка відповідає цим значенням (у квантовій теорії поля ця дія рівнозначна класичній межі).

Кінетичну картину переходу, індукованого шумом, у самоподібній стохастичній системі подано в розділі II.B. Спочатку ми досліджуємо найпростіший випадок білого шуму (підрозділ II.B.1), а потім кольорового (підрозділ II.B.2). На відміну від звичайної польової схеми, враховуємо дисипацію. Вигляд відповідної дисипативної функції задаємо переходом до допоміжного процесу з адитивним шумом. Із урахуванням неоднорідности одержано рівняння еволюції системи, у яких силу задано розкладом Ландау. Дослідження стаціонарного стану показує, що при малому масштабі неоднорідности флуктуацій система наближується до рівноважного стану, тоді як із його зростанням стає можливим нестійкий стан. Вивчення стаціонарного розподілу найімовірнішого значення стохастичної змінної показує, що при значеннях фрактальної вимірности фазового простору $D > 1$ реалізується звичайний спадаючий розподіл, а при $D < 1$ — імовірність стає безмежно малою поблизу початку координат. Така картина пояснюється дослідженням часових залежностей стохастичної змінної та спряженого імпульсу, які показують, що при $D < 1$ в початку координат з'являється поглинаючий стан. Окрім того, вдається знайти зв'язок між фрактальною вимірністю та показником мультиплікативної функції. Враховано неоднородність як для різних масштабів зміни амплітуди гідродинамічної моди та флуктуацій, так і при їх збігові. Виявлено, що в останньому випадку невпорядкований стан відповідає малим значенням масштабу неоднорідности, а упорядкований — великим. Дослідження кольорового шуму стохастичної змінної основується на його зображенні як процесу Орнштайна–Уленбека, шум якого є білим. Вилучення кольорового шуму з відповідних рівнянь еволюції приводить до немарківського нелінійного процесу. Він набуває звичайного вигляду, якщо скористатися адіябатичним наближенням та припускати, що еволюція системи є уповільненою. Тоді ефективне рівняння Ланжевена містить мультиплікативний шум, який суттєво змінює картину переходу. З'ясовано, що система зазнає переходу, якщо час кореляції кольорового шуму перевищує граничне значення. Особливість цього переходу полягає в тому, що при малому часі кореляції він має реверсивний характер — при зростанні показника мультиплікативного шуму система розупорядковується, а потім знову впорядковується.

У розділі II.C показано, що степенева форма мультиплікативної функції випливає з лаґранжевого формалізму, де самоподібність визначається інваріянтністю системи щодо дилатації. Формальною основою використаного підходу є похідна Джексона, яка визначає варіяцію функції не стосовно до зміщення арґументу, а щодо його дилатації. Показано, що умова інваріянтности лаґранжіяна та дисипативної функції потребує видовження часової похідної за рахунок оберненого часу релаксації, зумовленого зовнішнім впливом, тоді як похідна Джексона видовжується ефективним калібрувальним полем. Аналіз відповідних рівнянь Ойлера для консервативної системи показує, що стаціонарний стан реалізується при виконанні умови калібрування, згідно з яким похідна Джексона від калібрувального поля дорівнює нулеві. В цьому випадку система попадає в самоподібний стаціонарний стан, що характеризується розподілом Цалліса. При перевищенні часу релаксації, який визначається неадитивністю системи, відбувається перехід в адитивний стан, при якому умова самоподібности порушується згідно з експоненціяльним законом.

Для забезпечення замкненого викладу в Додатку ми зібрали необхідні відомості про функції Міттага–

Лєфлєра та Фокса, дробові інтеґрал і похідну, а також похідну Джексона та її узагальнення на дробовий порядок.

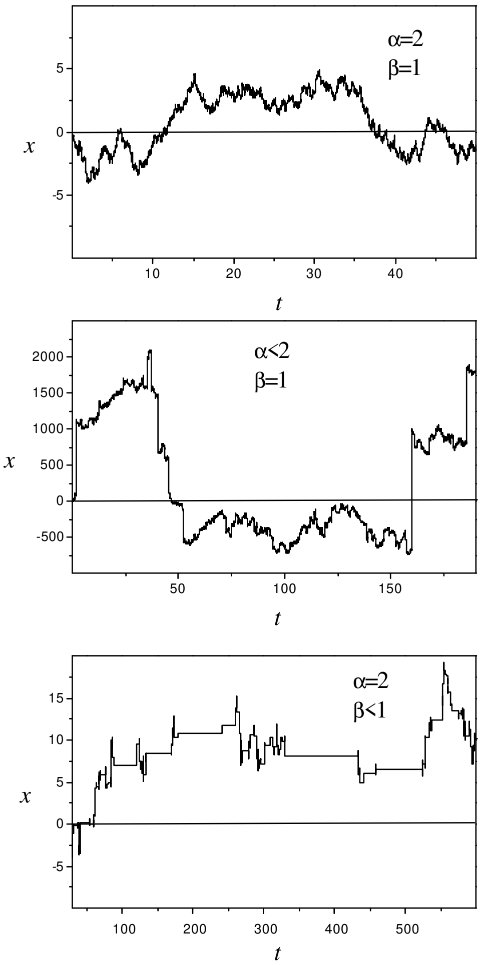

Рис. 1. Закони руху вздовж оси x при звичайній дифузії ($\alpha = 2$, $\beta = 1$), польотах Лєві ($\alpha < 2$, $\beta = 1$) та субдифузії ($\alpha = 2$, $\beta < 1$).

I. АНОМАЛЬНА ДИФУЗІЯ

Добре відомо, що процес дифузії зводиться до випадкових блукань частинки, при яких середнє значення її координати залишається незмінним, а дисперсія монотонно зростає із часом: $\langle x(t)\rangle = 0$, $\langle x^2\rangle \propto t^{2H}$. При броунівській дифузії показник Герста набуває звичайного значення $H = 1/2$, яке відповідає лінійному зростанню дисперсії. У процесі супердифузії частинка може здійснювати стрибки довільної довжини (так звані польоти Лєві), наявність яких підвищує показник Герста до значень $H > 1/2$ [1]. Протилежний випадок субдифузії забезпечується наявністю пасток, завдяки яким частинка може здійснювати стрибки тільки в дискретні моменти часу. Це викликає уповільнення процесу дифузії, яке відображається зниженням показника Герста до $H < 1/2$ [2].

Різну природу поведінки системи при броунівському русі, а також при процесах супер- та субдифузії видно з рис. 1, на якому подані закони руху $x(t)$ вздовж оси x, що одержано чисельним моделюванням: якщо при звичайній дифузії крива $x(t)$ неперервна (хоча дуже ламана), то при супердифузії вона має розриви вздовж оси координат x, а при субдифузії — вздовж оси часу t.

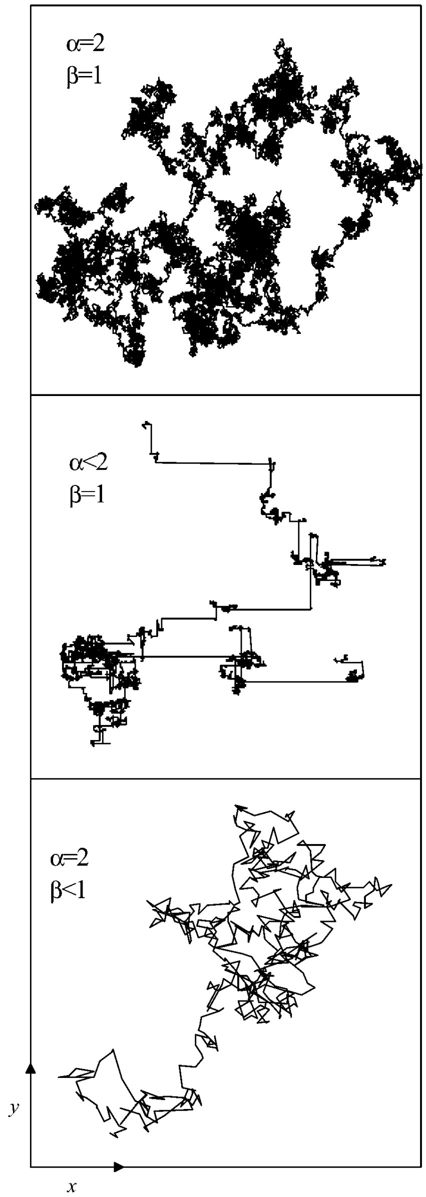

Рис. 2. Траєкторії двовимірних блукань при звичайній дифузії ($\alpha = 2$, $\beta = 1$), польотах Лєві ($\alpha < 2$, $\beta = 1$) та субдифузії ($\alpha = 2$, $\beta < 1$).

Відповідні двовимірні траєкторії, наведені на рис. 2, показують, що при броунівських блуканнях частинка густо покриває простір, наявність польотів Лєві при супердифузії приводить до кластеризації траєкторії, а при субдифузії вона має вигляд збільшеного фраґмента броунівської траєкторії.

У розділі I.A ми покажемо, що наявність цих особливостей приводить до дробових показників у фур'є-лапласівських образах функції розподілу положень частинки. Згідно з розділом I.B польоти Лєві приводять до дробової похідної за координатою, тоді як наявність пасток знижує порядок похідної за часом (розділ I.C). Використання властивостей самоподібности дозволяє встановити зв'язки між порядками цих похідних, показником Герста та фрактальною вимірністю фазового простору системи. Оскільки його фрактальна структура полягає в здатності створювати кластери різних ієрархічних рівнів, то процес дифузії складається із двох стадій: (i) мезоскопічної, при якій частинка здійснює переміщення всередині кластера (цю стадію розглянуто в розділах I.A — I.C); (ii) макроскопічної, що відповідає об'єднанню кластерів. Розділ I.D присвячено описові ієрархічного процесу дифузії на останній стадії. У розділі I.E проаналізовано поведінку системи при різних сполученнях порядків похідних за координатою та часом.

A. Як перейти від нормальної до аномальної дифузії

Найпопулярнішим та найпростішим прикладом стохастичного процесу є випадкове блукання частинки, що демонструє процес броунівської дифузії. Наведемо основні відомості, які дозволяють уявити звичайний дифузійний процес, а потім узагальнимо на аномальну дифузію.

Нехай у початковий момент часу $t=0$ частинка знаходиться в точці $\mathbf{r}=0$. Тоді густина ймовірности $P(\mathbf{r},t)$ попадання в точку $\mathbf{r}$ у момент часу t визначається рівняннями

$$\dot{P}(\mathbf{r},t)=\mathcal{D}\nabla^2 P(\mathbf{r},t), \quad P(\mathbf{r},0)=\delta(\mathbf{r}), \tag{1}$$

де $\mathcal{D}$ — коефіцієнт дифузії. Лінійний характер дозволяє одержати розв'язок за допомогою перетворення Фур'є

$$P(\mathbf{r},t)=\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}} P_{\mathbf{k}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}}, \tag{2}$$

де $N\to\infty$ — кількість можливих положень частинки; $\mathbf{k}$ — хвильовий вектор. Елементарне інтеґрування приводить до дебаївської експоненти для фур'є-образу густини ймовірности:

$$P_{\mathbf{k}}(t)=\exp\left(-\frac{t}{\tau_{\mathbf{k}}}\right), \quad \tau_{\mathbf{k}}\equiv(\mathcal{D}\mathbf{k}^2)^{-1}. \tag{3}$$

Розбіжність часу релаксації $\tau_{\mathbf{k}}$ у континуальній границі $\mathbf{k}\to 0$ означає уповільнення дифузії на великих масштабах. Підставляючи (3) у попередню формулу та використовуючи перехід

$$\sum_{\mathbf{k}} \Rightarrow V\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^d}, \tag{4}$$

де V — об'єм d-вимірного дифузійного простору, одержуємо ґауссівський розподіл

$$P(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}}\exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma\equiv\sqrt{2\mathcal{D}t}, \tag{5}$$

де середньоквадратичне зміщення σ кореневим чином збільшується зі зростанням часу t. Вигляд залежности (5), наведеної на рис. 3, показує, що зі збільшенням часу початкова густина ймовірности $P(\mathbf{r},0)=\delta(\mathbf{r})$ розширюється на всьому просторі.

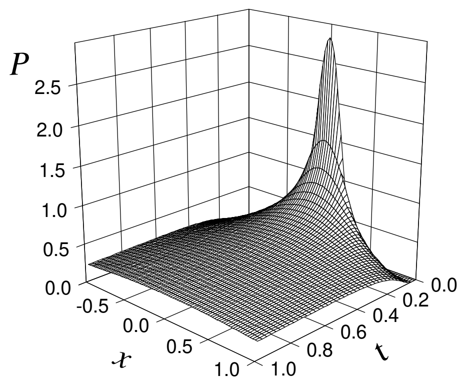

Рис. 3. Просторово-часова залежність густини ймовірности при ґауссівському розподілі.

Дифузійний процес (1) можна подати в інтеґральній формі

$$P(\mathbf{r},t)=\delta(\mathbf{r})+\mathcal{D}\int_0^t \nabla^2 P(\mathbf{r},t')\mathrm{d}t'. \tag{6}$$

Розв'язання цього рівняння досягаємо використанням перетворення Лапласа

$$P_{\mathbf{k}}(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} P_{\mathbf{k}}(u)\mathrm{e}^{ut}\mathrm{d}u, \tag{7}$$

де контур інтеґрування вибираємо так, щоб усі полюси розміщувалися лівіше від прямої $\Re s=\mathrm{const}$. Підстановка розв'язку

$$P_{\mathbf{k}}(u)=\frac{1}{u+\mathcal{D}\mathbf{k}^2} \tag{8}$$

в (7) приводить до дебаївської залежности (3).

Особливість звичайного процесу дифузії полягає в тому, що частинка за безмежно малий інтервал часу здійснює випадкові зміщення в безмежно близьку точку (див. рис. 1). Загалом наявність пасток може приводити до того, що стрибки здійснюються тільки в дискретні моменти часу. Такий процес називається субдифузією та подається ймовірністю $\Psi(t)$ здійснити стрибок за інтервал часу t. Окрім того, частинка може здійснювати стрибки довільної довжини (польоти Лєві), що спричиняє прискорений процес супердифузії. Її інтенсивність задається ймовірністю $W(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ стрибка із $\mathbf{r}'$ в $\mathbf{r}$. У результаті інтеґральне рівняння (6) є таким:

$$P(\mathbf{r},t)=\left(1-\int\limits_0^t\Psi(t')\mathrm{d}t'\right)\delta(\mathbf{r})$$
$$+\int\limits_0^t\Psi(t-t')\int\limits_0^{\mathbf{r}}W(\mathbf{r}-\mathbf{r}')P(\mathbf{r}',t')\mathrm{d}t'\mathrm{d}\mathbf{r}'. \quad (9)$$

Переходячи до трансформант Фур'є–Лапласа, одержуємо розв'язок

$$P_{\mathbf{k}}(u)=\frac{1-\Psi(u)}{u[1-\Psi(u)W_{\mathbf{k}}]}, \quad (10)$$

який набуває форми (8) за умови

$$\frac{1-W_{\mathbf{k}}}{\mathcal{D}\mathbf{k}^2}=\frac{1-\Psi(u)}{u\Psi(u)}=\mathrm{const}\equiv\tau, \quad (11)$$

оскільки перший вираз залежить від $\mathbf{k}$, а другий — від u. У результаті для інтенсивностей стрибків отримуємо

$$W_{\mathbf{k}}=1-\mathcal{D}\tau\mathbf{k}^2, \quad \frac{1}{\Psi(u)}=1+\tau u. \quad (12)$$

Таким чином, звичайний процес дифузії характеризується квадратичною залежністю від хвильового вектора $\mathbf{k}$ та лінійною від комплексної частоти u.

Загалом залежності (12) мають неаналітичний вигляд

$$W_{\mathbf{k}}=1-\left(\sqrt{\mathcal{D}\tau}|\mathbf{k}|\right)^{\alpha}, \quad \frac{1}{\Psi(u)}=1+(\tau u)^{\beta}, \quad (13)$$

де $\alpha\le 2$, $\beta\le 1$ — деякі показники. У просторово-часовому виразі залежностям (13) відповідають асимптотики

$$W(\mathbf{s})\sim|\mathbf{s}|^{-(d+\alpha)}, \quad \Psi(t)\sim t^{-(1+\beta)} \qquad \mathbf{s},t\to\infty, \quad (14)$$

де $\mathbf{s}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ — вектор зміщення, d — вимірність простору. Із урахуванням (13) розподіл (10) набуває вигляду

$$P_{\mathbf{k}}(u)=\left[u+(\mathcal{D}^{\frac{\alpha}{2}}\tau^{\frac{\alpha}{2}-\beta})|\mathbf{k}|^{\alpha}\, u^{1-\beta}\right]^{-1}. \quad (15)$$

Підставляючи (15) у (7) та використовуючи формулу $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi\csc(\pi z)$, $z\equiv-\beta n$, одержуємо фур'є-образ

$$P_{\mathbf{k}}(t)=E_{\beta,1}[-(\mathcal{D}^{\frac{\alpha}{2}}\tau^{\frac{\alpha}{2}-\beta})|\mathbf{k}|^{\alpha}t^{\beta}], \quad (16)$$

виражений через функцію Міттаґа–Лєффлера (A.2). Згідно з першим рівнянням (A.3) при $\beta=1$ маємо розподіл

$$P_{\mathbf{k}}(t)=\exp[-(\mathcal{D}^{\frac{\alpha}{2}}\tau^{\frac{\alpha}{2}-1})|\mathbf{k}|^{\alpha}t], \quad (17)$$

який зводиться до (3) при $\alpha=2$. З іншого боку, рівняння (A.4), (A.5) дають асимптотики

$$P_{\mathbf{k}}(t)\approx\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left[1-\beta^{-1}(\mathcal{D}^{\frac{\alpha}{2}}\tau^{\frac{\alpha}{2}-1})|\mathbf{k}|^{\alpha}t\right], \ |\mathbf{k}|^{\alpha}t\to 0, \quad (18)$$

$$P_{\mathbf{k}}(t)\propto|\mathbf{k}|^{-2\alpha}t^{-2}, \quad \beta=1, \ |\mathbf{k}|^{\alpha}t\to\infty. \quad (19)$$

І нарешті, проводячи фур'є-перетворення, для одновимірного випадку знаходимо

$$P(x,t)=\frac{1}{\pi z}\frac{1}{t^{\beta/\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+n\alpha)}{\Gamma(1+n\beta)}$$
$$\times\cos\left[\frac{\pi}{2}(1+n\alpha)\right]\frac{(-1)^n}{z^{n\alpha}}, \quad (20)$$

де введено позначення $z=x/t^{\beta/\alpha}$. Порівняння одержаного виразу з розподілом Ґаусса (5) показує, що перехід до загального випадку спричиняє заміну часової залежности $\sqrt{t}$ на $t^{\beta/\alpha}$. У границі $x\gg t^{\beta/\alpha}$ одержуємо асимптотику

$$P(x,t)\sim\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\beta)}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)x^{-(1+\alpha)}t^{\beta}, \quad (21)$$

яка зникає при $\alpha=2$.

Ураховуючи складність загального виразу (20), доцільно розглянути окремо випадки супердифузії ($\beta=1$, $\alpha\neq 2$) та субдифузії ($\beta\neq 1$, $\alpha=2$).

B. Супердифузійний режим

Будемо виходити з основного кінетичного рівняння (master equation) для густини ймовірности в одновимірному

мірному випадку

$$\tau \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \int \left[W(y,x)P(y,t) - W(x,y)P(x,t) \right] \mathrm{d}y, \tag{22}$$

де τ — час релаксації, а густина розподілу $W(x,y)$ інтенсивности переходів із x в y задовольняє умову парности $W(x,y) = W(y,x)$. Це дозволяє переписати інтеґродиференціяльне рівняння (22) так:

$$\tau \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \int \left[P(x+s,t) - P(x,t) \right] W(s) \mathrm{d}s, \tag{23}$$

де $s \equiv y - x$ — зміщення частинки. Звідси у фур'є–просторі одержуємо

$$\tau \frac{\partial P_k}{\partial t} = \left(W_k - 1 \right) P_k, \tag{24}$$

де враховано умову нормування

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(s) \mathrm{d}s = 1. \tag{25}$$

Рівняння (24) приводить до фур'є-лапласівського образу (10), якщо інтенсивності переходів задаються виразами (13) з $\beta = 1$ та асимптотикою (14).

Наявність нецілого показника α хвильового числа k в рівняннях (24), (13) означає в прямому x-просторі похідну дробового порядку ϖ (див. додаток В)

$$\mathcal{D}_x^{\varpi} f(x) \equiv \frac{\partial^{\varpi}}{\partial x^{\varpi}} f(x) = - \int \kappa^{\varpi} f(\kappa) e^{\kappa x} \mathrm{d}\kappa, \tag{26}$$

де $f(x)$ — довільна функція та проведене аналітичне продовження уявного числа $\mathrm{i}k$ на комплексну площину κ. Тоді алгебраїчне рівняння (24) перетворюється у дробово–диференціяльне:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \mathcal{D}^{\frac{\alpha}{2}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} \mathcal{D}_x^{\alpha} P(x,t), \tag{27}$$

яке зводиться до (1) при $\alpha = 2$.

Розв'язку рівняння (27) досягаємо в межах методу Фур'є, де густину ймовірности записуємо як

$$P(x,t) = \phi(x)\psi(t). \tag{28}$$

Часова залежність набирає експоненціяльного характеру

$$\psi(t) = \psi(0) \exp(-t/\tau). \tag{29}$$

Тоді для функції $\phi(x)$ одержуємо рівняння

$$\mathcal{D}_x^{\alpha} \phi(x) = -\ell^{-\alpha} \phi(x), \quad \ell \equiv \sqrt{\mathcal{D}\tau}. \tag{30}$$

Його розв'язку досягаємо завдяки перетворенням Лапласа та Мелліна [3]

$$\phi(u) = \mathcal{L}(\phi(x), u) \equiv \int\limits_0^{\infty} \phi(x) e^{-ux} \mathrm{d}x, \tag{31}$$

$$\phi(s) = \mathcal{M}(\phi(x), s) \equiv \int\limits_0^{\infty} \phi(x) x^{s-1} \mathrm{d}x. \tag{32}$$

Зв'язок між ними задаємо рівнянням

$$\mathcal{M}(\phi(x), s) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \mathcal{M}(\mathcal{L}(\phi(x), u), 1-s). \tag{33}$$

Для однорідної функції одержуємо

$$\mathcal{M}(\phi(Ax^a), s) = \frac{1}{a} A^{-s/a} \mathcal{M}(\phi(x), s/a),$$
$$A, a = \mathrm{const} > 0. \tag{34}$$

Застосування перетворення Лапласа (31) дає такий розв'язок рівняння (30):

$$\phi(u) = \frac{\phi(0)}{\ell^{-\alpha} + u^{\alpha}}. \tag{35}$$

Із урахуванням зв'язків (34), (33) трансформант Мелліна набирає форми

$$\phi(s) = \phi(0) \frac{\ell^{(\alpha-1)+s}}{\alpha} \; \frac{\Gamma(\frac{1-s}{\alpha})\Gamma(1 - \frac{1-s}{\alpha})}{\Gamma(1-s)}, \tag{36}$$

де $\alpha > 1$, $\gamma > 0$. Інвертуючи (36), відповідно до визначення (А.8), одержуємо залежність, що зводиться до функції Фокса (див. додаток А):

$$\phi(x) = \phi(0) \frac{\ell^{\alpha-1}}{\alpha} H_{12}^{11} \left(\frac{x}{\ell} \middle| \begin{matrix} (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}) & \\ (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}) & (0,1) \end{matrix} \right). \tag{37}$$

Згідно з (А.6) вона може бути подана рядом

$$\phi(x) = \phi(0) x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[-(x/\ell)^{\alpha} \right]^n}{\Gamma(n\alpha + \alpha)}, \tag{38}$$

отже, при $x \to 0$ маємо скейлінґ

$$\phi(x) \sim x^{\alpha-1}. \tag{39}$$

Відповідно до (А.2) суму в (38) подаємо як узагальнену функцію Міттаґа–Лєффлєра $E_{\alpha,\alpha}(z)$, де арґументом є $-(x/\ell)^{\alpha}$.

Таким чином, загальний розв'язок дробово-диференціяльного рівняння Фоккера–Планка є таким:

$$P(x,t) = Z^{-1} e^{-t/\tau} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[-(x/\ell)^{\alpha}\right], \qquad (40)$$

де $Z \equiv [\psi(0)\phi(0)]^{-1}$ — стала нормування, що відіграє роль статистичної суми стаціонарного розподілу, який реалізується при $t \gg \tau$. Відповідно до першого рівняння (A.3) вираз (40) у границі $\alpha \to 1$ перетворюється в дебаївську експоненту за координатою x. Далі ми доведемо, що в цьому випадку показник Герста $H = 1$ та реалізується балістичний режим, при якому середньоквадратичне зміщення лінійно зростає із часом. При малих та великих значеннях координати граничні вирази функції Міттаґа–Лєффлєра (A.4), (A.5) дають асимптотичні розподіли

$$\begin{aligned} &P(x,t) \approx \frac{Z^{-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-t/\tau} x^{\alpha-1}, \quad x \to 0; \\ &P(x,t) \sim e^{-t/\tau} x^{-(1+\alpha)}, \qquad x \to \infty. \end{aligned} \qquad (41)$$

Одержані вирази показують, що густина ймовірности збігається до нуля у границі $x \to 0$, як $x^{\alpha-1}$, $\alpha \geq 1$. Важливішим є поведінка на великих відстанях x, оскільки вона визначає величину дисперсії

$$\langle x^2 \rangle \equiv \int\limits_0^L x^2 P(x)\,\mathrm{d}x \sim L^{2-\alpha}, \qquad (42)$$

де $L \to \infty$ — параметр обрізування, який визначаємо дальністю максимального польоту Лєві. Звідси випливає основна властивість супердифузії: при $\alpha < 2$ дисперсія стає безмежною, а в протилежному випадку аномальний характер дифузії не приводить до її розбіжности.

Величину показника α та його фізичне значення можна з'ясувати із часової залежности координати $x(t)$. Із цією метою зручно записати рівняння Фоккера–Планка як ряд Крамерса–Мояла

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n M_n P(x,t), \qquad (43)$$

який одержуємо розвиненням імовірности $P(x+s,x)$ в (23) за зміщенням s. Момент n-го порядку має вигляд

$$M_n = \int s^n W(s)\,\mathrm{d}s. \qquad (44)$$

Ураховуючи асимптотику (14), для сили $f \equiv M_1$ та коефіцієнта дифузії $\mathcal{D} \equiv M_2$ одержуємо

$$f \sim x^{1-\alpha}, \qquad \mathcal{D} \sim x^{2-\alpha}. \qquad (45)$$

Вирази (45) дозволяють отримати часові залежності середніх величин на підставі рівняння Ланжевена

$$\dot{x} = f(x) + \sqrt{\mathcal{D}(x)}\,\xi(t), \qquad (46)$$

де $\xi(t)$ — білий шум із стандартними властивостями

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t'). \qquad (47)$$

Проводячи усереднення рівняння (46), маємо

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x \rangle = \langle f(x) \rangle \sim \langle x^{1-\alpha} \rangle. \qquad (48)$$

Функція розподілу $P(x,t)$, що характеризується степеневою асимптотикою (41) при $x \to \infty$, дозволяє використати простий зв'язок

$$\langle x^{\varpi} \rangle \simeq \langle x \rangle^{\varpi} \qquad (49)$$

при обчисленні дробового моменту довільного порядку $\varpi > 0$. Тоді рівняння (48) набуває простого вигляду, який приводить до експоненти Цалліса

$$\langle x(t) \rangle = \left(1 - \alpha\,\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (50)$$

У границі $\alpha \to 0$ вона має дебаївський вигляд, з якого випливає, що стала інтеґрування τ відіграє роль часу релаксації. Для $\alpha = 2$ при $t \gg \tau$ одержуємо кореневу залежність, що властива звичайній дифузії. Загалом залежність (50) виглядає як співвідношення Герста, $\langle x(t) \rangle \propto t^H$, де H — показник, пов'язаний із внутрішньою фрактальною вимірністю D фазового простору [4],

$$H = \frac{1}{D}. \qquad (51)$$

У результаті приходимо до виразу показника функції розподілу α через внутрішню фрактальну вимірність D множини точок фазового простору, який відображає закон руху $x(t)$ [5]:

$$\alpha = D. \qquad (52)$$

При звичайній дифузії ($\alpha = 2$) крива $x(t)$ хоча є ламаною, але неперервною, так що фазова траєкторія заповнює всі точки простору, і його внутрішня вимірність $D = 2$. Польоти Лєві при $\alpha < 2$ приводять до стрибків уздовж координати x, які зумовлюють утворення кластерів послідовних положень частинки, що зменшують внутрішню фрактальну вимірність до значення α. І нарешті, при $\alpha > 2$ крива $x(t)$

розпливається в пучок, наявність якого, однак, не зумовлюється процесом дифузії, оскільки в ході своєї еволюції система може реалізувати лише єдиний закон $x(t)$. У зображенні фазового простору це відображається на тому, що його вимірність не може перевищувати значення $D_{\max} = 2$. У результаті динамічний показник $z \equiv H^{-1}$ пов'язаний з індексом Лєві α рівняннями (див. рис. 4)

$$z \equiv H^{-1} = \begin{cases} \alpha & \text{при} \quad \alpha < 2, \\ 2 & \text{при} \quad \alpha \geq 2. \end{cases} \tag{53}$$

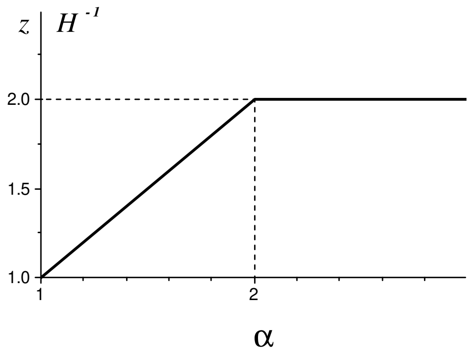

Рис. 4. Залежність динамічного показника z та оберненого показника Герста H^{-1} від індексу Лєві α.

При симетричному розподілі інтенсивности стрибків $W(x,y) = W(y,x)$ непарні моменти (44) тотожно дорівнюють нулеві, і поведінка системи зображається рівнянням руху для моменту другого порядку:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x^2 \rangle \sim \langle x^{2-\alpha} \rangle. \tag{54}$$

Воно випливає з виразу (46) та визначення стохастичного диференціялу [6] $\mathrm{d}x \sim \sqrt{\mathcal{D}\,\mathrm{d}t}$ і подання $\mathrm{d}x^2 \equiv (x+\mathrm{d}x)^2 - x^2 = 2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2$. Повторюючи розрахунки, проведені для моменту першого порядку, знову приходимо до результату (52). Окрім того, знаходимо зв'язок

$$D = 2(1-a) \tag{55}$$

фрактальної вимірности D з показником a, що визначає координатну залежність коефіцієнта дифузії

$$\mathcal{D} = x^{2a}. \tag{56}$$

Як відзначено у вступі, степеневий характер цієї залежности відображає самоподібність системи, а відмінність показника a від нуля означає мультиплікативний характер шуму.

Зауважимо, що стаціонарний розв'язок рівняння Крамерса-Мояла (43), який у дифузійному наближенні враховує два перших члени ряду, має вигляд

$$P(x) = \frac{Z^{-1}}{\mathcal{D}(x)} \exp\left\{ \int \frac{f(x)}{\mathcal{D}(x)} \right\} \mathrm{d}x. \tag{57}$$

Цей вираз містить передекспоненціяльний множник $\mathcal{D}^{-1} = x^{-2a}$, який визначається степенем $(\alpha - 2)$, що не збігається з асимптотикою (39). Однак така суперечність є недійсною, оскільки для самоподібних систем, де сила $f(x)$ та коефіцієнт дифузії $\mathcal{D}(x)$ задаються виразами (45), больцманівська експонента зводиться до лінійного множника x.

Одержане вище співвідношення (55) відіграє принципово важливу роль, оскільки пов'язує геометричну характеристику — фрактальну вимірність D — зі стохастичною — показником мультиплікативного шуму a. Проведімо чисельне тестування залежности (55), використовуючи зв'язок (51) з показником Герста H. Будемо виходити з рівняння (46), де на часовому інтервалі τ сила $f = 0$, а коефіцієнт дифузії визначено виразом (56). Розв'язуючи це рівняння, знаходимо закон дифузії $x(t)$, для якого встановлюємо середню координату на інтервалі τ та відхилення від неї на меншому інтервалі t:

$$\langle x \rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau} x(t), \quad \delta x(t,\tau) = \sum_{u=1}^{t}[x(u) - \langle x \rangle_\tau]. \tag{58}$$

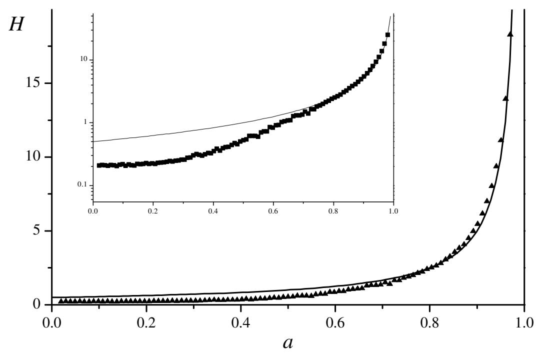

Рис. 5. Залежність показника Герста H від показника мультиплікативної функції a.

Потім визначаємо розкид відхилення

$$R = \max_{1\leq t\leq \tau} \delta x(t,\tau) - \min_{1\leq t\leq \tau} \delta x(t,\tau), \tag{59}$$

нормований на середньоквадратичне зміщення

$$S = \left(\frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}[x(t) - \langle x \rangle_\tau]^2 \right)^{1/2}. \tag{60}$$

Показник Герста обчислюємо згідно з визначенням [4]

$$\frac{R}{S} \propto \tau^H. \tag{61}$$

У результаті одержуємо залежність, подану на рис. 5, де аналітична залежність $H = [2(1-a)]^{-1}$ показана суцільною лінією. При $a > 1/2$, коли фрактальна вимірність (55) не перевищує значення $D = 1$, спостерігаємо повний збіг чисельних даних з аналітичними. Однак при $a < 1/2$, $D > 1$ формула (55) понижує фрактальну вимірність.

C. Субдифузійний режим

У цьому випадку наявність пасток приводить до зниження степеня часової похідної до значення $\beta < 1$, так що кінетичне рівняння (22) набуває вигляду

$$\tau^\beta \frac{\partial^\beta P(x,t)}{\partial t^\beta} = \int W(y,x)P(y,t)\,\mathrm{d}y - P(x,t). \tag{62}$$

Підставляючи сюди розв'язок Фур'є (28), для лапласівського образу (31) часового множника $\psi(t)$ знаходимо

$$\psi(u) = \frac{\psi(0)\tau}{1+(\tau u)^\beta}. \tag{63}$$

Використовуючи зв'язки (33), (34), приходимо до відповідної трансформанти Мелліна

$$\psi(s) = \psi(0)\frac{\tau^s}{\beta}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{1-s}{\beta}\right)}{\Gamma(1-s)}. \tag{64}$$

У результаті часова залежність функції розподілу виглядає як [7]

$$\psi(t) = \frac{\psi(0)}{\beta} H^{11}_{12}\left(\tfrac{t}{\tau}\middle|\begin{matrix}(1-\frac{1}{\beta},\frac{1}{\beta}) & \\ (1-\frac{1}{\beta},\frac{1}{\beta}) & (0,1)\end{matrix}\right), \tag{65}$$

де з точністю до заміни α на β функція Фокса має форму, як у (37). Використовуючи розвинення (A.6), одержуємо ряд (пор. з (38))

$$\psi(t) = \psi(0)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-(1-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[-(t/\tau)^\beta\right]^n}{\Gamma(\beta n+\beta)}, \tag{66}$$

який, відповідно до (A.2), приводить до виразу, що містить функцію Міттаґа–Лєффлєра:

$$\psi(t) = \psi(0)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-(1-\beta)} E_{\beta,\beta}\left[-(t/\tau)^\beta\right]. \tag{67}$$

Згідно з першим рівнянням (A.3) функція (67) переходить у дебаївську експоненту $\psi(t) = \psi(0)\exp(-t/\tau)$ у границі $\beta \to 1$. Друге рівняння (A.3) показує, що при $\beta \to 0$ функція (67) прямує до нуля, як β. При малих та великих значеннях часу t межові вирази (A.4), (A.5) функції Міттаґа–Лєффлєра дають асимптотичні залежності:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{\psi(0)}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-(1-\beta)}, \quad t \ll \tau; \\ \psi(t) &\sim \psi(0)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-(1+\beta)}, \quad t \gg \tau. \end{aligned} \tag{68}$$

Загальний вигляд залежности $\psi(t)$ показаний на рис. 6, який свідчить, що при малих β функція розподілу поводиться степеневим чином, а при великих — експоненціяльним.

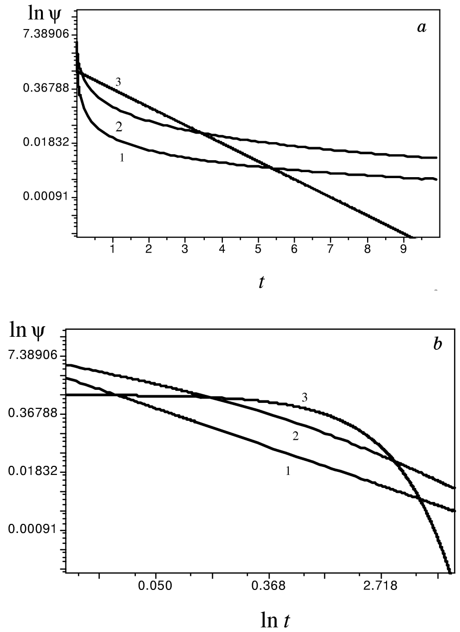

Рис. 6. Часова залежність функції розподілу ψ для супердифузії в напівлогарифмічних (a) та логарифмічних (b) осях (криві 1, 2, 3 відповідають показникам $\beta = 0.1, 0.5, 1.0$

Наявність пасток знижує порядок часової похідної не тільки в кінетичному рівнянні (62), а також у відповідних виразах (48), (54) для моментів:

$$\frac{\mathrm{d}^\beta}{\mathrm{d}t^\beta}\langle x\rangle = \langle f(x)\rangle, \quad \frac{\mathrm{d}^\beta}{\mathrm{d}t^\beta}\langle x^2\rangle = \langle \mathcal{D}(x)\rangle. \tag{69}$$

Аналіз рівнянь, одержаних після підстановки в ці співвідношення асимптотик (45), (56), приводить до скейлінгу $\langle x^\varpi\rangle \sim t^{H\varpi}$, що узагальнює експоненту Цалліса (50) у границі $t \to \infty$. При цьому показник Герста H виражається через порядки похідних α, β та показник мультиплікативного шуму a рівняннями

$$H = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{2(1-a)}, \qquad (70)$$

що узагальнюють результати попереднього розділу для $\beta \neq 1$. Однак співвідношення (52), (55), які дають зв'язок показників α, a з фрактальною вимірністю D, залишаються незмінними.

Для доведення проведімо узагальнення рівняння (51) для довільного показника $\beta \neq 1$. З цією метою виміряймо довжину L кривої, що задає графік залежности $x(t)$, покриваючи її відрізками малої довжини l. Якщо цій довжині відповідає елементарний інтервал τ вздовж часової оси t, а координата x вимірюється в масштабі $a \to 0$, то, за теоремою Піфагора, маємо $l = \sqrt{\tau^2 + (x/a)^2}$. З іншого боку, згідно з визначенням [4], макроскопічна довжина L пов'язана з мікроскопічним масштабом l співвідношенням $L \propto l^{1-D}$, яке, внаслідок самоафінности кривої $x(t)$, зберігає силу при зміні масштабу $\tau \to \xi\tau$, $\xi > 1$. Враховуючи скейлінґове співвідношення $x(\xi\tau) = \xi^H x(\tau)$, зазначене перетворення змінює мікроскопічний масштаб так: $l \to l(\xi) = \sqrt{\xi^2\tau^2 + \xi^{2H}(x/a)^2} = \sqrt{2}\xi^H(x/a) \propto \xi^H$, де друге рівняння забезпечується таким вибором масштабу a, який порівнює внески осей t та x. Якщо б крива $x(t)$ не мала горизонтальних ділянок, що зумовлюються попаданнями частинки в пастки, то для її покриття елементарними відрізками вимагалась би така їх кількість, що дорівнює $N = t/\xi\tau$. Завдяки самоафінності дія пасток, що знижує порядок похідної за часом до $\beta < 1$, зменшує кількість покривних відрізків до значення $N = (t/\xi\tau)^\beta \propto \xi^{-\beta}$. У результаті повна довжина кривої складає $L = Nl \propto \xi^{-\beta}\xi^H \propto l^{1-\frac{\beta}{H}}$. Порівнюючи її з визначенням $L \propto l^{1-D}$, знаходимо зв'язок показника Герста з внутрішньою фрактальною вимірністю:

$$H = \frac{\beta}{D}, \qquad (71)$$

що узагальнює рівняння (51) при $\beta \neq 1$. Підставляючи сюди співвідношення (70), приходимо до тих самих зв'язків (52), (55), що наявні при $\beta = 1$. Цей результат є звичайним, оскільки синґулярність часової поведінки не може зумовлюватися фрактальною вимірностю, що описує геометричний простір.

D. Ієрархічна картина супердифузії

Виняткова особливість процесу супердифузії полягає в тому, що послідовні положення блукаючої частинки відтворюють кластерну структуру, яка подається як фрактальна множина з вимірністю (52), що зводиться до показника аномальної дифузії α (див. рис. 2). Оскільки фрактал є результатом ієрархічної процедури, то можна припустити, що поведінка стохастичної системи визначається не лише зміщенням частинки в прямому просторі, але й повільнішою еволюцією кластерів її послідовних положень. Як відомо, остання зводиться до дифузії по вузлах ієрархічного дерева, яке зображує ультраметричний простір.

Розгляд, проведений у розділах I.A та I.B, дозволив подати стадію аномальної дифузії, пов'язану з переміщенням частинки у прямому просторі. Було показано, що на мезоскопічних інтервалах часу, коли не виникає помітних змін кластерної структури, положення частинки розподілені за законом Лєві (17). Тут ми розглянемо наступну стадію, яка зумовлена випадковими блуканнями в ультраметричному просторі [8]. На основі узагальненого рівняння Фоккера–Планка буде показано, що подібно уповільненій релаксації спінових стекол на макроскопічних інтервалах часу кластерна структура помітно змінюється. Це приводить до асимптотичного розподілу за рівнями ієрархічного дерева, яке зводиться до форми Цалліса [9].

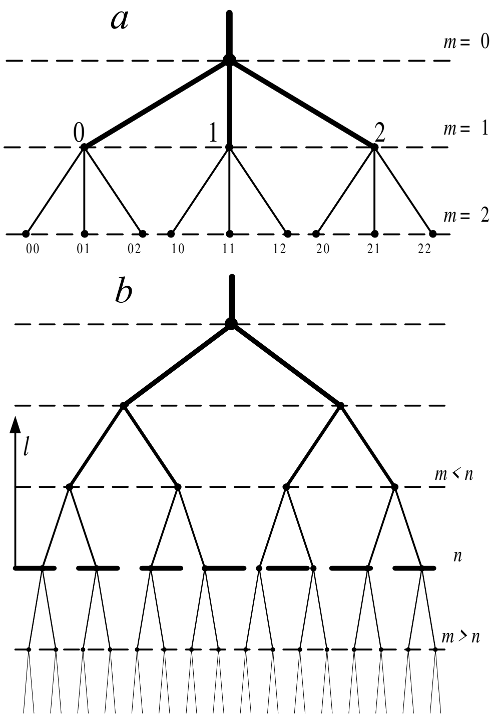

Рис. 7. Найпростіші ієрархічні дерева: a — параметризація дерева з показником $s = 3$, b — біфуркаційне дерево ($s = 2$).

За умови врахування кластерної структури в кінетичному рівнянні (22) густина ймовірности $P_{\mathrm{u}}(\mathbf{r}, t)$ та інтенсивність переходів $W_{\mathrm{uu'}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ стають залежними від ультраметричної координати u [10]. Для з'ясування цієї залежности розгляньмо реґулярне ієрархічне дерево, що характеризується фіксованим значенням показника $s > 1$, який задає кількість гілок, що проростають з цього вузла, та кількістю рівнів ієрархії $n \gg 1$. Тоді ультраметрична координата u подається n-значним числом у системі числення з основою s:

$$\mathrm{u} \equiv u_0\ u_1 \ldots u_m \ldots u_{n-1}, \quad u_m = 0, 1, \ldots, s-1 \quad (72)$$

(див. приклад на рис. 7a). Відповідно, інтенсивність переходів записуємо як степеневий ряд

$$W_{\mathrm{uu}'} = \sum_{m=0}^{n} W(u_m - u'_m) s^{n-m}, \quad (73)$$

де перший доданок $m = 0$ відповідає верхньому рівневі ієрархії, який задає поведінку всієї системи, а останній $m = n$ — нижньому, що відповідає за найдрібніші кластери. За визначенням, відстань між точками u, u$'$ складає $l \in [0, n]$ за умови $u_m = u'_m$ для $m = 0, 1, \ldots, n-(l+1)$, але $u_m \neq u'_m$ для $m = n-l, n-l+1, \ldots, n$ [11]. Тому при фіксованій відстані l перші $(n-l)$ доданків наведеного ряду, за визначенням, дорівнюють нулеві, а останні l містять множник s^{n-m}, величина якого в континуальній границі $s \gg 1$ набагато менша, ніж множник s^l, який міститься в першому з доданків, що залишилися. У результаті з'ясовується, що в степеновому ряді головну роль відіграє єдиний доданок, що відповідає $m = n-l$: $W_{\mathrm{uu}'} \sim s^l = s^{n-m}$. Подібно можна показати, що густина ймовірности складає $P_{\mathrm{u}} \sim s^{n-l} = s^m$. При переході від реґулярного дерева до довільного показник s стає змінною величиною, і, відповідно до наведених оцінок, інтенсивність переходів $W_{\mathrm{uu}'} \Rightarrow W(n-m)$ та густина ймовірности $P_{\mathbf{k}\mathrm{u}} \Rightarrow P_{\mathbf{k}}(m)$ набувають форми перетворень Мелліна:

$$W(n-m) \equiv \int_0^\infty W(s) s^{n-m}\, \mathrm{d}s,$$

$$P_{\mathbf{k}}(m) \equiv \int_0^\infty P_{\mathbf{k}}(s) s^m\, \mathrm{d}s, \quad (74)$$

де $W(s)$, $P_{\mathbf{k}}(s)$ — відповідні вагові функції.

Кінетичне рівняння, що враховує кластерну структуру, записуємо як

$$\tau_{\mathbf{k}} \dot{P}_{\mathbf{k}}(n,t) = \sum_{m>n} W(m-n) P_{\mathbf{k}}(n,t)$$

$$- \sum_{m<n} W(n-m) P_{\mathbf{k}}(m,t), \quad \tau_{\mathbf{k}} \equiv \left(\sqrt{\mathcal{D}\tau}|\mathbf{k}|\right)^{-\alpha} \tau. \quad (75)$$

Тут перший доданок у правій частині враховує ієрархічний зв'язок між вузлами нижніх рівнів $m > n$ через заданий n, а від'ємник — зв'язок цього рівня n через верхні $m < n$ (див. рис. 7b). При одержанні рівняння (75) використано адіябатичне наближення, в межах якого блукання частинки відбувається набагато швидше за зміну кластерної структури, яка характеризується макроскопічним часом τ_m (див. нижче). Розвиваючи в ряд густину ймовірности за степенями $(n-m)$, в континуальній границі $n \gg 1$ з точністю до члена другого порядку одержуємо

$$\tau_{\mathbf{k}} \dot{P}_{\mathbf{k}}(n,t) + \mathcal{D}_q^2 P_{\mathbf{k}}(n,t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial n}\left[F(n) P_{\mathbf{k}}(n,t) - \frac{\partial}{\partial n} D(n) P_{\mathbf{k}}(n,t)\right], \quad (76)$$

де введено моменти

$$F(n) \equiv \sum_{m<n} (n-m) W(n-m),$$

$$D(n) \equiv \frac{1}{2} \sum_{m<n} (n-m)^2 W(n-m) \quad (77)$$

та величину

$$\mathcal{D}_q^2 \equiv \sum_{m<n} W(n-m) - \sum_{m>n} W(m-n), \quad (78)$$

що задає різницю між швидкостями встановлення ієрархічного зв'язку через верхні та нижні рівні. Далі буде показано, що оператор $\mathcal{D}_q$ зводиться до похідної Джексона з показником $\alpha = (q-1)\ln P/\ln q$ (див. додаток С). На відміну від звичайної похідної, яка відповідає границі $q \to 1$, похідна Джексона задає швидкість зміни функції $P(n)$ не при зміщенні арґументу $\mathrm{d}n \to 0$, а при його дилатації qn і тому є основою аналізу самоподібних систем [12].

Узагалі при підсумовуванні за станами системи обмеження $m > n$, $m < n$, що фігурують у (78), є відсутніми, так що $\mathcal{D}_q = 0$ [13]. Однак немає ніяких підстав приймати такі умови для ієрархічних систем, де швидкість установлення зв'язку суттєво залежить від того, якими рівнями (нижніми чи верхніми) вона забезпечується. Це зумовлено неоднорідністю ультраметричного простору, яка є очевидною навіть з його геометричних образів, наведених на рис. 7. Приймемо анзац

$$\mathcal{D}_q^2 \equiv \epsilon q P_{\mathbf{k}}^{q-1}(n,t) \frac{\partial}{\partial n}, \quad (79)$$

який означає, що зазначена неоднорідність приводить до нелінійного внеску $\epsilon P_{\mathbf{k}}^q(n,t)$ до дрейфової складової потоку ймовірности блукань по ієрархічному дереву (q, ϵ — додатні параметри). З іншого боку, той факт, що різниця швидкостей установлення ієрархічного зв'язку $\mathcal{D}_q^2$ залежить від густини ймовірности P, означає наявність нелінійного зворотного зв'язку. Підстановка виразу (79) у рівняння (76) приводить до такого вигляду кінетичного рівняння супердифузії:

$$\tau_{\mathbf{k}}\dot{P}_{\mathbf{k}}(n,t)=\frac{\partial}{\partial n}\left\{[F(n)P_{\mathbf{k}}(n,t)-\epsilon P^{q}_{\mathbf{k}}(n,t)]\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial n}D(n)P_{\mathbf{k}}(n,t)\right\}. \quad (80)$$

Порівняно зі звичайними системами [13] звертають на себе увагу протилежні знаки перед дифузійною та лінійною дрейфовою складовими, що зумовлено оберненим вибором знаків у вихідному рівнянні (75). Причиною такої обернености є те, що автономні ієрархічні системи (наприклад, бюрократична) не руйнуються, а самостійно відтворюються. Наголосимо також, що нелінійність рівняння (80) не дозволяє використовувати перетворення Мелліна (74) подібно до того, як це відбувалось при визначенні фур'є-образу рівняння (22).

Перейдімо до аналізу рівняння (80) для $F(n)=0$, $D(n)=\mathrm{const}$, у якому основну роль відіграє нелінійна дрейфова складова. Відповідний стаціонарний розподіл

$$P(n)=A\left\{\frac{D}{\epsilon}+(q-1)(n+1)\right\}^{-\frac{1}{q-1}},$$
$$A\equiv(2-q)\left\{\frac{D}{\epsilon}+(q-1)\right\}^{\frac{2-q}{q-1}} \quad (81)$$

монотонно збільшується зі зменшенням n (збільшенням кластера положень частинки) та переходить у розподіл Цалліса на верхньому рівні $n=0$, що характеризує всю систему. З цього випливає, що $q<1$ відповідає необмежено зростаючим асимптотикам густини ймовірности, тому далі припустимо, що $q>1$.

У нестаціонарному випадку аналітичне дослідження стає можливим в автомодельному режимі, коли поведінка системи задається часовою залежністю $n_c(t)$ характерного масштабу ієрархії, а розподіл імовірности подається однорідною функцією

$$P(n,t)=[n_c(t)]^{-\alpha}\,\mathcal{P}(\nu),\quad \nu\equiv n/n_c. \quad (82)$$

Якщо виконується умова нормування

$$\int\limits_0^\infty P(n,t)\,\mathrm{d}n=1, \quad (83)$$

то найсуттєвіший внесок дає дрейфовий доданок, що зумовлений неоднорідністю ультраметричного простору. Тоді $\alpha=1$, і автомодельний режим встановлюється за умов:

$$n_c^{q-1}\dot{n}_c=\mathrm{const}\equiv\frac{C}{\tau_{\mathbf{k}}} \quad (84)$$

та

$$(\epsilon q\mathcal{P}^{q-1}-C\nu)\mathcal{P}'-C\mathcal{P}=0. \quad (85)$$

Тут та нижче штрих означає диференціювання за відповідним арґументом, C — додатна стала. Розв'язок рівняння (85) має вигляд $\mathcal{P}^{q-1}=(C/\epsilon)\nu$ при $t\ll\tau_d$, де $\tau_d\equiv(\epsilon^{q-2}/D^{q-1})n^q\tau_{\mathbf{k}}$. При сумірності дрейфової та дифузійної складових ($t\sim\tau_d$) розподіл за ієрархічними рівнями стає ненормованим [14], тому для забезпечення автомодельного режиму необхідно виконати умови:

$$\alpha(q-1)-1=0,\quad n_c\dot{n}_c=\frac{C}{\tau_{\mathbf{k}}} \quad (86)$$

та

$$D\mathcal{P}''+(\epsilon q\mathcal{P}^{q-1}-C\nu)\mathcal{P}'-\alpha C\mathcal{P}=0. \quad (87)$$

Розв'язок останнього рівняння характеризується асимптотиками $\mathcal{P}^{q-1}\to(q-1)^{-1}(D/\epsilon)\nu^{-1}$ при $\nu\to0$ та $\mathcal{P}^{q-1}\to(2C/q\epsilon)\nu$ при $\nu\to\infty$. Перша реалізується на великих часових масштабах $t\gg\tau_m$, $\tau_m\equiv(n^2/C)\tau_{\mathbf{k}}$, друга — на малих $t\ll\tau_m$.

Таким чином, при $F(n)=0$, $D(n)=\mathrm{const}$ на початковій стадії $t\ll\tau_d$ внеском дифузійної складової можна знехтувати, і розподіл за рівнями нормується звичайною умовою. При цьому характерний масштаб ієрархії зростає з часом за степеневим законом

$$n_c^q=Cq\frac{t}{\tau_{\mathbf{k}}}, \quad (88)$$

так що суттєвими стають усе нижчі рівні. Відповідно густина ймовірности зменшується за гіперболічним законом

$$P^{q-1}(n,t)=\frac{n}{q\epsilon}\ \frac{\tau_{\mathbf{k}}}{t} \quad (89)$$

тим швидше, чим нижче рівень (звідси випливає також $q>1$). Перехід на дифузійну стадію, який прискорюється з підвищенням рівня, спричиняє при $\tau_d\sim t\ll\tau_m$ трансформацію часової залежности (88) до звичайного кореневого вигляду

$$n_c=\sqrt{2C\ \frac{t}{\tau_{\mathbf{k}}}}, \quad (90)$$

а густина ймовірности, як і раніше, зменшується за гіперболічним законом (89). З подальшим зростанням часу до макроскопічних значень $t\gg\tau_m$ залежність $n_c(t)$ залишається незмінною, а розподіл імовірности виходить на асимптотику

$$P(n)\sim\left\{(q-1)\frac{\epsilon}{D}n\right\}^{-\frac{1}{q-1}}, \quad (91)$$

що відповідає стаціонарному розподілові (81) при $n\gg D/\epsilon$.

За наявности зовнішньої сили $F(n) = \mathrm{const}$ та мультиплікативного шуму, інтенсивність якого $D(n)$ залежить від номера рівня, зазначена поведінка реалізується лише на малому часі $t \ll n(F-D')^{-1}\tau_{\mathbf{k}}$. Якщо виконується протилежна умова

$$n + (F - D')\ \frac{t}{\tau_{\mathbf{k}}} \gg \left(\frac{\epsilon}{F - D'}\right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{92}$$

то характерний масштаб зростає за лінійним законом

$$n_c = C\ \frac{t}{\tau_{\mathbf{k}}}, \tag{93}$$

а ймовірність спадає, як

$$P(n,t) = \left\{n + (F - D')\ \frac{t}{\tau_{\mathbf{k}}}\right\}^{-1}. \tag{94}$$

Стаціонарний розподіл набуває експоненціяльної форми

$$P(n) \propto D^{-1} \exp\left\{\int \frac{F}{D}\,\mathrm{d}n\right\}, \tag{95}$$

яка порушує адитивність. Дійсно, оскільки одна й та сама залежність $D(n)$ визначає процес дифузії як для всієї системи, так і для її частин A і B, то порушується умова мультиплікативности ймовірностей

$$P^{A,B}(n) = D(n)P^A(n)P^B(n). \tag{96}$$

Тому навіть при визначенні ентропії за Больцманом система з мультиплікативним шумом не є адитивною.

З наведеного випливає, що процес супердифузії ієрархічної системи, яка не підлягає зовнішньому впливу ($F = 0$), відбувається неадитивно. У межах викладеного підходу як нелінійність, так і зумовлена нею неадитивність є наслідком ієрархічної будови. Звідси випливає, що вільні ієрархічні системи завжди неадитивні.

E. Дробово-диференціяльне рівняння руху

Останнім часом посилену увагу привертають фізичні системи, у яких принципову роль відіграють ефекти пам'яті. Така ситуація виникає при описі конденсованого стану, далекого від термодинамічної рівноваги: аморфних матеріялів, при структурній релаксації високотемпературних оксидів надпровідників, при пластичній деформації та руйнуванні твердих розчинів і мартенситних макроструктур та інше [11]. Наявність пам'яті припускає, що сила f, яка діє на систему в час $t' > 0$, приводить до потоку J, амплітуда якого визначається згорткою

$$J(t) = \int_0^t M(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t'. \tag{97}$$

Для марківських систем, у яких відсутня пам'ять, часова залежність функції пам'яті $M(t-t')$ має δ-подібний вигляд:

$$M(t-t') = \gamma\delta(t-t'), \tag{98}$$

де γ — позитивна стала. Підставляючи (98) в (97), одержуємо зв'язок

$$J(t) = \gamma f(t), \tag{99}$$

згідно з яким, за відсутности пам'яті, на потік $J(t)$ в момент t вплив має тільки сила, що діє в той самий момент часу t. При врахуванні пам'яті δ-функція в (98) розмивається на ширину τ, протягом якої сила f здатна діяти на потік J. Для систем з ідеальною пам'яттю маємо $\tau \to \infty$, тобто потік $J(t)$ формується впродовж інтервалу $t' < t$ дії сили $f(t')$ до часу t. Формально це виражається в застосуванні ядра інтеґрального рівняння (97) у вигляді

$$M(t-t') = \gamma/t, \tag{100}$$

де відсутня залежність дії сили f у момент часу t', а функція пам'яті задовольняє умову нормування

$$\int_0^t M(t-t')\,\mathrm{d}t' = \gamma. \tag{101}$$

Зв'язок (97), записаний у часовому зображенні, є незручним завдяки наявності згортки (інтеґрала за t'). Від неї можна позбавитися застосуванням перетворення Лапласа, яке дозволяє перейти від часу t до комплексної частоти u. Після цього диференціяльне рівняння (97) набуває алґебраїчної форми

$$J(u) = M(u)f(u). \tag{102}$$

Лапласівський образ марківського ядра (98), що відповідає відсутності пам'яті, зводиться до константи:

$$M(u) = \gamma. \tag{103}$$

Для ідеальної пам'яті з рівняння (100) у границі $|u|t \gg 1$ отримуємо

$$M(u) = \gamma/ut. \tag{104}$$

Таким чином, включення пам'яті спричиняє трансформацію сталого ядра (103) до гіперболічної форми

(104).

У зв'язку із цим виникає питання: яку роль відіграє функція $M(u)$, якщо пам'ять є повною, але не ідеальною, тобто вона проявляється на всьому часовому інтервалі $(0, t)$, попередньому до t, але не при всіх моментах часу t'. Оскільки стохастична система є самоподібною, то можна очікувати, що пам'ять підтримується в точках t', які теж складають самоподібну множину. Покажемо, що фрактальна вимірність Δ такої множини є мірою збереження пам'яті.

Безпосередні розрахунки [15], що ґрунтуються на використанні канторівського пилу, який є найпростішим прикладом самоподібної множини, приводять до результату

$$M(u) = A_\Delta z^{-\Delta}, \qquad \Delta = \frac{\ln s}{\ln \xi^{-1}}, \quad z = (1-\xi)ut. \tag{105}$$

Тут s — індекс галуження відповідного ієрархічного дерева; $\xi < 1$ — параметр подібности, стала $A_\Delta = 2^{-\Delta/2}$ для канторівської множини з кількістю елементарних блоків $s = 2$.

Функція пам'яті (105) задовольняє умову самоподібности $M(\xi u) = \xi^{-\Delta} M(u)$ з показником Δ. Будучи фрактальною вимірністю множини Кантора, у точках якої включено пам'ять, цей показник подає кількісну міру ефектів виявлення пам'яті. Дійсно, для порожньої множини ($\xi = 0$) маємо $\Delta = 0$, і залежність (105) зводиться до сталої (103), що відповідає відсутності пам'яті. Зі збільшенням параметра подібности $\xi > 0$ показник Δ також зростає, і лапласівська трансформанта (105) стає функцією, що швидко зростає. Граничне значення $\xi = s^{-1}$ параметра подібности приводить до максимальної вимірности $\Delta = 1$, яка відповідає ідеальній пам'яті, визначеної функцією (104).

Таким чином, системи із залишковою пам'яттю описуються перетворенням Лапласа (105), де значення показника $0 \le \Delta \le 1$ визначає величину збереження пам'яті. Використовуючи інверсне перетворення, для двочасової функції пам'яті канторівської множини з $s = 2$ знаходимо (див. [11], [15])

$$M(t-t') = \frac{\gamma}{\pi} \left[\sqrt{2}(1-\xi)t\right]^{-\Delta} \Gamma(1-\Delta)(t-t')^{\Delta-1}, \tag{106}$$

де $\Gamma(1-\Delta)$ — гама-функція. Підставляючи (106) в рівняння (97), одержуємо

$$J(t) = \frac{\gamma}{\pi} \left[\sqrt{2}(1-\xi)\right]^{-\Delta} \mathcal{I}_t^\Delta f(t), \tag{107}$$

де застосовано визначення (B.3) дробового інтеґрала від сили $f(t)$ [16].

Досі ми використовували інтеґральне зображення ефектів пам'яті. Покажемо тепер, як може бути записане еквівалентне диференціяльне рівняння. З цією метою розгляньмо густину розподілу $n(\mathbf{r}, t)$, що зберігається згідно з рівнянням неперервности

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}, \tag{108}$$

де потік $\mathbf{J}$ подано рівнянням (97). За відсутности ефектів пам'яті задовольняється рівняння (99), де силу $\mathbf{f}$ подано як

$$\mathbf{f} = -\nabla \mu, \tag{109}$$

μ — хемічний потенціял, а (108) приводить до дифузійного рівняння

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla(\gamma \nabla \mu). \tag{110}$$

При включенні пам'яті у правій частині (110) з'являється дробовий інтеґрал, що значно ускладнює розв'язання задачі.

Однак до цієї проблеми можна підійти з іншого боку, якщо врахувати, що функція пам'яті $M(t-t')$ набуває нульових значень у певні моменти часу t'. Згідно з рівнянням (97) це приводить до фіксації потоку $\mathbf{J}$ в (108), що відповідає зникненню швидкости $\partial n / \partial t$. Тому можна припустити, що втрата пам'яті може бути врахована не тільки фрактальною властивістю інтеґрала потоку (107), а також дробовим порядком часової похідної в (108). Будемо виходити з того положення, що рівняння (108) відповідає повній відсутності пам'яті, при якій фрактальна вимірність $\Delta = 0$. Її врахування приводить до зростання показника Δ, тоді як швидкість зміни величини n має зменшуватися. Це дозволяє припустити, що рівняння руху може бути записане у дробово-диференціяльній формі (див. нижче):

$$\mathcal{D}_t^q n = \nabla(\gamma \nabla \mu), \qquad \mathcal{D}_t^q \equiv \frac{\partial^q}{\partial t^q}, \quad q = 1 - \Delta, \tag{111}$$

де зростання параметра пам'яті Δ зменшує порядок q похідної за часом. У системах з ідеальною пам'яттю ($\Delta = 1$) часова похідна в (111) зникає, що приводить до потоку (99).

Для підтвердження зв'язку $q = 1 - \Delta$ будемо виходити із часової залежности потоку $J \propto t^{-\Delta}$, яка випливає з рівняння (107) та визначення (B.3), якщо в останньому провести заміну $t' \to t\tau$. Підставляючи таку залежність у (108), знаходимо розв'язок

$$n \propto t^{1-\Delta}, \tag{112}$$

що задовольняє тестоване рівняння (111). Це підтверджує відповідність концепції дробового інтеґрала (107) та дробово-диференціяльного рівняння (111). Заслуговує на увагу аналогія одержаного закону (112) з геометричним співвідношенням $L \propto l^{1-\Delta}$, яке виражає довжину берегової лінії L через елементарний масштаб l. Звідси випливає, що час t відіграє роль довжини елементарного сеґмента l, який покриває Δ-вимірну фрактальну множину в просторі станів системи з пам'яттю.

При фрактальній вимірності $\Delta = 0$ дробово-диференціяльне рівняння (111) описує необоротний процес дифузії, у якому дисипація повністю подавлює мікроскопічну пам'ять щодо обернености часу $t \to -t$. Ця пам'ять з'являється при збільшенні вимірности Δ, величина якої задає частку каналів механічного руху, симетричних щодо перетворення $t \to -t$. Таким чином, зменшення порядку похідної $q = 1 - \Delta$ в (111) відповідає включенню каналів пам'яті, частина яких визначається фрактальною вимірністю Δ. Залишок $q = 1 - \Delta$ каналів забезпечує необерненість системи, що пов'язана з дисипацією. У мікроскопічному вигляді надлишок каналів, що відповідають оберненому руху, подаємо дробовим оператором Ліувілля [15]

$$\frac{i\hbar}{t}\frac{\partial^\Delta \rho}{\partial \tau^\Delta} = [H, \rho], \tag{113}$$

де $\hbar$ — стала Планка; H — гамільтоніян; ρ — нерівноважний статистичний оператор, t — час еволюції макроскопічної системи; $\tau = t'/t$ — обезрозмірений час, обмежений умовою $\tau < 1$. Дробово-диференціяльне рівняння Ліувілля (113) є прийнятнішим, ніж феноменологічне врахування дисипації за рахунок уведення релаксаційної складової [17] або ж включення безмежно слабких джерел [18].

Окремо від рівняння дифузійного типу можна очікувати появи дробової похідної в описі частинок з непружною взаємодією. Виконуючи обчислення, подібні до тих, що приводять до потоку (107), можна показати [15], що коли при кожному зіткненні на частинку масою m діє сила F, то зміна швидкости задається виразом

$$m(\Delta v) = \left[\sqrt{2}(1-\xi)\right]^{-\Delta} t\,\mathcal{I}_t^\Delta F(t), \tag{114}$$

визначеним за допомогою дробового інтеґрала (В.3). Аналогічно до дифузійного рівняння переходу до відповідної дробово-диференціяльної форми досягаємо дією на вираз (114) оператора $\mathcal{D}_\tau^\Delta$, який є інверсним до дробового інтеґрала $\mathcal{I}_\tau^\Delta$. Тоді для пружної сили $\mathbf{F} = -\lambda\Omega\nabla^2\mathbf{r}$, що задається сталою λ, де Ω — атомний об'єм, узагальнене транспортне рівняння для координати частинки $\mathbf{r}$ набуває вигляду [15]

$$\mathcal{D}_\tau^{1+\Delta}\mathbf{r} + (ct)^2\nabla^2\mathbf{r} = 0, \tag{115}$$

де використано обезрозмірений час $\tau = t'/t < 1$ та характерну швидкість

$$c^2 = \frac{\lambda\Omega}{m}\left[\sqrt{2}(1-\xi)\right]^{-\Delta}. \tag{116}$$

Рівняння (115) визначає новий тип хвильового руху, що є проміжним між звичайною дифузією ($\Delta = 0$) та класичною хвилею ($\Delta = 1$). Відповідно формула (116) задає дифузійний коефіцієнт $\mathcal{D} = c^2 t$ в першому випадку та хвильову швидкість c — у другому.

Характерна особливість дробово-диференціяльних рівнянь (111) та (115) полягає в тому, що вони задають еволюцію величини, умова збереження якої приводить до похідної другого порядку за координатою. Для величини η, яка не зберігається, ці похідні зникають, так що дифузійне рівняння (111) перетворюється в узагальнене релаксаційне рівняння Ландау–Халатнікова

$$\mathcal{D}_\tau^{1-\Delta}\eta = -(\gamma_\Delta t)\eta, \tag{117}$$

а хвильове рівняння (115) — в узагальнене рівняння гармонічного осцилятора

$$\mathcal{D}_\tau^{1+\Delta}\eta + (\omega_\Delta t)^2\eta = 0; \tag{118}$$

де, як і раніше, $\tau = t'/t$ — знерозмірений час, параметри γ_Δ, $\omega_\Delta \propto \left[\sqrt{2}(1-\xi)\right]^{-\Delta}$ визначають час релаксації γ_Δ^{-1} та частоту осцилятора ω_Δ. Фрактальна вимірність Δ задає міру залишкової пам'яті. За її відсутности ($\Delta = 0$) як (117), так і (118) зводяться до найпростішого рівняння дебаївської релаксації ($\gamma_0 = \omega_0^2 t$). При ідеальній пам'яті ($\Delta = 1$) рівняння (117) вироджується до умови фазової рівноваги $\eta = \eta_0$, а (118) — до звичайного рівняння осцилятора.

Таким чином, можна виділити основні типи рівнянь руху, які відповідають різним режимам поведінки системи. Передусім це є рівняння неперервности, яке відображає умову збереження кількости частинок. Далі можна виділити осцилюючу поведінку, що містить другу похідну за часом, та хвильовий режим, який задається похідними другого порядку за часом та координатою. Термодинамічна система визначається гідродинамічною модою, амплітуда якої зводиться до параметра порядку. При цьому реактивний режим подається часовою похідною другого порядку, а дисипативний — першого. Осциляторне рівняння руху описує реактивну поведінку параметра порядку, що не зберігається, а хвильове — того, що зберігається. Покажемо, що розвинений метод дозволяє аналітичним способом зв'язати наведені режими за рахунок зміни порядків похідних [15], [19].

Маючи на увазі дослідження термодинамічної системи, почнемо з рівняння неперервности $\dot\eta + \nabla\mathbf{j} = 0$ для поля параметра порядку $\eta(\mathbf{r}, t)$, що характеризується потоком $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. На відміну від механічного потоку (97), термодинамічний пов'язаний не із силою, а з хемічним потенціялом $\mu(\mathbf{r}, t)$. У межах фур'є-лапласівського зображення цей зв'язок дається лінійною залежністю $\mathbf{j}_\mathbf{k}(u) = \mathbf{M}_\mathbf{k}(u)\mu_\mathbf{k}(u)$, де $\mathbf{k}$ — хвильовий вектор; u — комплексна частота.

Для знаходження залежности функції пам'яті $\mathbf{M}_\mathbf{k}(u)$ від $\mathbf{k}$ розгляньмо найпростіший одновимірний випадок середовища у формі сеґмента $0 \le x \le l$. Тоді потік через праву границю задається виразом

$$j(l) = \int_0^l M(l-x)\mu(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (119)$$

Припустимо, що функція $M(x)$ набуває ненульових значень у точках множини Кантора. Тоді подібно до (105) одержуємо

$$M(k) = \mathrm{e}^{-\alpha\Delta}\kappa^{-\Delta}, \qquad \kappa = \mathrm{i}kl(1-\xi). \qquad (120)$$

Тут константа $\alpha = 2^{-1}\ln 2 = 0.347$; Δ, ξ та l — фрактальна вимірність, параметр подібности та масштаб відповідно. Використання (120) та рівняння неперервности приводить до закону дисперсії

$$u = B_\Delta k^q; \qquad q = 1-\Delta, \quad \Delta = \frac{\ln 2}{\ln \xi^{-1}}, \qquad (121)$$

$$B_\Delta \equiv \mathrm{i}^{1-\Delta}\mathrm{e}^{-\alpha\Delta}(1-\xi)^{-\Delta}l^{1-\Delta}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\eta}.$$

При $\xi = 1/2$ фрактальна множина зводиться до континууму ($\Delta = 1$) і зв'язок (121) відповідає рівнянню Ландау–Халатнікова для параметра порядку, який не зберігається. Зменшення параметра подібности $\xi < 1/2$ забезпечує спадання фрактальної вимірности $\Delta < 1$ точок, де спостерігаємо процес упорядкування, і приводить до зникнення довгохвильових гармонік, що властиві параметрові порядку, який зберігається. Однак навіть максимальне значення показника $q = 1$, що відповідає порожній множині ($\xi = 0$, $\Delta = 0$), виявляється у два рази меншим, ніж показник 2, властивий для параметра порядку, який зберігається.

Для необхідного підвищення показника в законі дисперсії (121) проведімо узагальнення процедури побудови фрактала, яка ґрунтується на стисканні, що задається параметром подібности $\xi \in [s^{-1}, 0)$. З цією метою доповнимо її розтягуванням, яке визначається параметром $\xi \in [s, \infty)$ із значенням, що перевищує одиницю. Тоді визначення (105) приводить до позитивної фрактальної вимірности Δ при $\xi < s^{-1}$ та негативного значення Δ при $\xi > s$. Такий розподіл знаків фрактальної вимірности визначається функціональним рівнянням $M(\kappa/\xi) = s^{-1}M(\kappa)$, яке задає перетворення функції пам'яті для самоподібних систем. Однак це перетворення може бути подано також законом $M(\xi\kappa) = sM(\kappa)$, який відрізняється від попереднього переходами $\xi \to \xi^{-1}$, $s \to s^{-1}$. При цьому фрактальна вимірність у функції пам'яті (120) змінює знак, так що її визначення (105) набуває вигляду

$$\Delta = \frac{\ln s}{\ln \xi}. \qquad (122)$$

Відповідно для закону дисперсії (121) маємо:

$$u = B_\Delta k^D; \qquad D = 1+\Delta, \qquad (123)$$

$$B_\Delta \equiv \mathrm{i}^{1+\Delta}\mathrm{e}^{\alpha\Delta}(\xi-1)^{\Delta}l^{1+\Delta}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\eta}.$$

Таким чином, стають можливими два еквівалентних підходи, один з яких базується на визначенні фрактальної вимірности (105), а другий — на (122). Вони відрізняються інверсією параметра подібности $\xi \to \xi^{-1}$ та оберненістю знака фрактальної вимірности Δ. Віддамо перевагу останньому з них, оскільки він приводить до звичайного рівняння

$$D = 1+\Delta, \qquad (124)$$

що пов'язує фрактальну вимірність Δ з показником D, значення якого визначає частку каналів, де параметр порядку зберігається. При $\xi = s^{-1}$ маємо $\Delta = -1$, що дає показник $D = 0$, який відповідає повному незбереженню параметра порядку. Зменшення ξ в інтервалі $0 < \xi < s^{-1}$ приводить до збільшення фрактальної вимірности $\Delta \in (-1, 0)$ та показника (124), що частково порушує умову незбереження. При $\xi = 0$, коли самоподібна множина є порожньою ($\Delta = 0$), відбувається перехід від параметра порядку, що не зберігається ($\xi \to 0$), до того, який зберігається ($\xi \to \infty$). Зменшення параметра подібности в сеґменті $s \le \xi < \infty$, де фрактальна вимірність набуває позитивних значень $0 < \Delta \le 1$, забезпечує збільшення кількости каналів збереження. І нарешті, при значенні $\xi = s$ фрактальна вимірність набуває максимального значення $\Delta = 1$, яке відповідає повному збереженню параметра порядку ($D = 2$).

Характерна особливість побудованої картини полягає в наявності неаналітичного переходу від параметра, що не зберігається, до параметра, що зберігається, за рахунок зшивання границь $\xi \to 0$, $\xi \to \infty$ в точці, яка відповідає порожній множині. Таку особливість можна врахувати завдяки введенню узагальненого параметра перетворення

$$\underline{\xi} \equiv \begin{cases} \xi & \text{при} \quad \xi < 1, \\ -\xi^{-1} & \text{при} \quad \xi > 1. \end{cases} \qquad (125)$$

Він узагальнює визначення абсолютного значення $|x|$ адитивної величини x на мультиплікативну величину ξ. Тоді визначення фрактальної вимірности (122) набуває вигляду

$$\Delta = -\mathrm{sign}(\ln\xi)\frac{\ln s}{\ln|\underline{\xi}|}, \qquad (126)$$

який забезпечує плавний перехід від стискання ($\xi < 1$) до розтягування ($\xi > 1$). Відповідна залежність, що наведена на рис. 8, виявляє монотонне спадання фрактальної вимірности Δ зі зростанням узагальненого показника подібности $\underline{\xi}$ з логарифмічною особливістю в точці $\underline{\xi} = 0$, $\Delta = 0$.

Наведена картина просторової поведінки системи може бути поширена на часову вісь. Дійсно, згідно з [15] включення пам'яті щодо інверсії $t \to -t$ спричиняє появу в (123) показника $(1+\Delta_0)$ при частоті u, де Δ_0 — вимірність фрактальної множини на осі часу, в точках t якої включається механічна пам'ять. Така множина складається з двох ділянок: перша відповідає трансформації $M(z/\xi_0) = s_0^{-1} M(z)$ $z \equiv ut(1-\xi_0)$ при параметрі подібности $\xi_0 \in (0, s_0^{-1}]$; друга має закон перетворення $M(\xi_0 z) = s_0 M(z)$, $z \equiv ut(\xi_0 - 1)$ при $\xi_0 \in [s_0, \infty)$. Перехід від ділянки стискання $\xi_0 \le s_0^{-1}$ в ділянку розтягування $\xi_0 \ge s_0$ здійснюється на порожній множині ($\Delta_0 = 0$) та відповідає перетворенню корпускулярної пам'яті у хвильову.

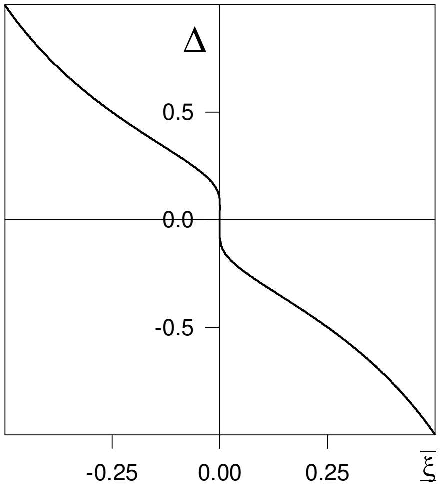

Рис. 8. Вигляд залежности (126) фрактальної вимірності Δ від узагальненого параметра перетворення $\underline{\overline{\xi}}$ при індексі $s = 2$.

Таким чином, загальний випадок часткового збереження параметра порядку та неідеальної пам'яті частинки/хвилі визначається законом дисперсії

$$u = c^{1/(1+\Delta_0)} (\mathrm{i}k)^D, \quad D = \frac{1+\Delta}{1+\Delta_0}, \tag{127}$$

$$c \equiv \frac{\mathrm{e}^{\alpha\Delta} |\xi - 1|^{\Delta} l^{1+\Delta}}{\mathrm{e}^{\alpha_0 \Delta_0} |\xi_0 - 1|^{\Delta_0} \tau^{1+\Delta_0}} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\eta}, \quad \alpha_0, \alpha \sim 1,$$

де l та τ — характерні просторово-часові масштаби, а залежність вимірности Δ_0 від параметра ξ_0 визначається рівнянням (126), що знайдено для просторової компоненти $\Delta(\xi)$. Тоді дробово-диференціяльні рівняння руху записуємо так: [20]

$$\frac{\mathrm{d}^{D_0} \eta}{\mathrm{d}t^{D_0}} + \mathrm{i}^D \frac{\mathrm{d}^D (c\eta)}{\mathrm{d}x^D} = 0. \tag{128}$$

У лінійному наближенні $\mu \propto \eta$ величина c стає константою та може бути винесена з оператора диференціювання.

У граничних випадках цілочислових значень показників просторово-часових похідних D_0 та D лінеаризоване рівняння (128) охоплює основні режими еволюції середовища. Наприклад, для $D_0 = 2$ маємо хвильове рівняння при $D = 2$, звичайні осциляції при $D = 0$ і локалізовані при $D = 1$. Стала c дорівнює квадратові від хвильової швидкости, квадратові частоти осциляцій та добуткові розміру ділянки локалізації й частоти осциляцій відповідно. Для $D_0 = 1$ маємо рівняння Ландау–Халатнікова для параметра порядку, що зберігається ($D = 2$), та параметра порядку, що не зберігається ($D = 0$), а при $D = 1$ — транспортно-хвильове рівняння. У першому випадку константа c зводиться до дифузійного коефіцієнта, у другому — до інверсного часу релаксації і до частоти хвилі — в третьому. І нарешті, у статичному випадку $D_0 = 0$ одержуємо рівняння Пуассона при $D = 2$, умову рівноваги при $D = 0$ та дебаївське рівняння екранування при $D = 1$. Тоді c зводиться відповідно до квадрата радіуса екранування, інверсної сприйнятливости $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\eta$ та радіуса екранування.

З наведеного вище випливає, що розвинений формалізм дозволяє подати не тільки лінійні рівняння руху, але й може узагальнити їх на нелінійні випадки та враховувати високо-дисперсійні складові. Так, аналогічно до теорії солітонів [21] можна припустити, що на додаток до знайдених складових нижчого порядку k^D $D \equiv 1+\Delta$ потік одержує дисперсійну компоненту $k^{3+\Delta_1}$ з показником $-1 \le \Delta_1 \le 1$. Нелінійність відображається залежністю $\mu(\eta)$ хемічного потенціялу від параметра порядку. Слід також урахувати, що вимірність δ нелінійного каналу не зводиться до відповідної величини D при лінійному каналі. У результаті рівняння (128) набуває вигляду

$$\frac{\mathrm{d}^{D_0} \eta}{\mathrm{d}t^{D_0}} + \mathrm{i}^D c_0 \frac{\mathrm{d}^D \eta}{\mathrm{d}x^D} + \beta \frac{\mathrm{d}^{3+\Delta_1} \eta}{\mathrm{d}x^{3+\Delta_1}} + \frac{\mathrm{d}^\delta f(\eta)}{\mathrm{d}x^\delta} = 0,$$

$$f(\eta) \equiv \frac{\mathrm{e}^{\alpha_\delta \delta} |\xi_\delta - 1|^\delta l_\delta^\delta}{\mathrm{e}^{\alpha_0 D_0} |\xi_0 - 1|^{D_0} \tau^{D_0}} \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mu}}{\mathrm{d}\eta}, \tag{129}$$

де стала c_0 відповідає $\eta = 0$; $\beta > 0$ — параметр дисперсії; $\widetilde{\mu}(\eta)$ — нелінійний внесок у хемічний потенціял. Це рівняння зводиться до вигляду Кортевеґа де Вріза при $D_0 = D = \delta = 1$, $\Delta_1 = 0$ та $f \propto \eta^2$, рівняння Шредінґера при $D_0 = 1$, $D = 0$, $\Delta_1 = -1$, $\delta = 0$, $f = \eta^3$ та до рівняння синус-Ґордона при $D_0 = D = 2$, $\beta = 0$, $\delta = 0$, $f = \sin\eta$. Відомо, що в межах оберненої задачі теорії розсіювання, що забезпечує солітонний розв'язок [21], ці рівняння задовольняють важливі властивості алґебраїчної симетрії [22]. У зв'язку з цим виникає питання: чи буде така симетрія проявлятися при інших значеннях порядків похідних D, D_0, Δ_1 та δ або іншому виборі β та $f(\eta)$? Для відповіді на це питання слід дослідити симетрію багатовимірних фрактальних множин, але ця проблема залишається відкритою.

Згідно з [23] конформна симетрія приводить до зв'язку між зазначеними показниками:

$$D = D_0 = \frac{2(n-1)-\delta}{2n-\delta}, \tag{130}$$

де n визначає нелінійний внесок $f(\eta) \propto \eta^{2n-1}$ (для η^4-моделі Ландау з адитивним шумом $n=2$). При включенні мультиплікативного шуму, амплітуда якого пропорційна η^a, $0 < a < 1$, ступінь η для всіх складових у (129), окрім першої, зменшується на $2a$.

II. ПОЛЬОВА ТЕОРІЯ

За аналогією до квантової теорії поля [24], ця частина ґрунтується на польовій схемі, в межах якої функціонал імовірности розподілу стохастичної системи має експоненціяльну форму з показником, що з точністю до знака збігається з функціоналом дії. У результаті максимальна ймовірність відповідає мінімальній дії, так що відповідно до розділу II.A найімовірніші значення амплітуди гідродинамічної моди та спряженого імпульсу випливають з принципу найменшої дії. У розділі II.B буде показано, що польовий підхід дозволяє використовувати стандартний метод самоузгодженого поля для опису стохастичних систем із мультиплікативним шумом [25]. При цьому важливу роль відіграє неоднорідність, яка визначає тип стаціонарного стану: з'ясувалося, що залежно від співвідношення характерних масштабів найімовірніші значення можуть збігатися як до рівноважних, так і до нестійких станів [26]. Як і в попередньому розділі, ми моделюємо мультиплікативний шум показниковою функцією $|x|^a$, яка відповідає самоподібній системі. У розділі II.C показано, що степенева форма мультиплікативної функції випливає з лаґранжевого формалізму, де самоподібність визначається інваріянтністю системи щодо дилатації [27].

Принцип найменшої дії, на якому ґрунтується наш розгляд, описує поведінку найімовірніших значень канонічних змінних, які задають форму розподілу ймовірности у фазовому просторі. Як відомо, зміна інтенсивности шуму може приводити до якісної перебудови наведеного розподілу, що є переходом, індукованим шумом [6]. Саме такі переходи ми будемо досліджувати у цьому розділі. Їх слід відрізняти від фазових перетворень, що характеризуються сильнішою зміною функції розподілу, при якій вона втрачає свою симетрію. При цьому проявляється аномальна поведінка статистичних моментів, яку описано в розділі III.

У цій частині наш розгляд ґрунтуватиметься на використанні рівняння Ланжевена (137). З формальної точки зору, його слід подавати як стохастичне диференціяльне рівняння

$$\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}t + g(x)\mathrm{d}w, \tag{131}$$

де вінерівський процес $\mathrm{d}w \equiv \zeta \mathrm{d}t$ визначається формулою $\mathrm{d}w \sim \sqrt{\mathrm{d}t}$ і для спрощення розглядається однорідна система. Однак δ-корельований характер білого шуму $\zeta(t)$ не дозволяє поводитися з рівнянням (131) звичайно, наприклад, ділити його на $g(x)$ для визначення величини $\mathrm{d}w$. З цією метою слід увести допоміжну змінну y, пов'язану з вихідною x співвідношенням $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/g(x)$. З іншого боку, різний порядок детерміністичної та стохастичної складових потребує використання стохастичного диференціяла Іто [6]:

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(\mathrm{d}x)^2, \tag{132}$$

який дозволяє встановити зв'язок між змінними x та y. Підставляючи сюди $\mathrm{d}x$, $(\mathrm{d}x)^2$ з (131) та зберігаючи складові порядку не вище від $\mathrm{d}t$, приходимо до виразу $\mathrm{d}w$ через $\mathrm{d}x$ та $\mathrm{d}t$, у якому детерміністична сила набуває ефективного значення

$$f_{\mathrm{ef}} = f - gg'/2. \tag{133}$$

Таким чином, наявність білого шуму приводить до перенормування сили за рахунок його мультиплікативного характеру.

A. Визначення інтеґрала за траєкторіями

Просторово-часова залежність амплітуди гідродинамічної моди $x(\mathbf{r},t)$, яка описує систему, задається рівнянням Ланжевена

$$\dot{x}(\mathbf{r},t) = -\gamma\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta x(\mathbf{r},t)} + g(x)\zeta(\mathbf{r},t). \tag{134}$$

Тут крапка означає диференціювання за часом t, $\mathbf{r}$ — просторова координата, γ — кінетичний коефіцієнт, детерміністична сила визначається функціоналом

$$\mathcal{F} = \int\left[F(x) + \frac{D}{2}|\nabla x|^2\right]d\mathbf{r}, \tag{135}$$

де $F(x)$ — питомий термодинамічний потенціял; $D > 0$ — стала неоднорідности; $\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{r}$. Внесок флуктуаційного середовища визначено флуктуаційною функцією $\zeta(\mathbf{r},t)$ з корелятором білого шуму

$$\langle\zeta(\mathbf{r},t)\zeta(0,0)\rangle = \sigma^2\delta(\mathbf{r})\delta(t). \tag{136}$$

Для проведення розрахунків зручно здійснити перехід до дискретного простору. З цією метою розіб'ємо систему на N доменів розміром l_0, під яким можна розуміти величину вільного пробігу [28]. Перейдімо до безрозмірних величин, відносячи координату $\mathbf{r}$ до l_0, час t до $l_0^2/\gamma D$, величину F до D/l_0^2, флуктуацію ζ до $\gamma D/l_0^2$. У результаті еволюційне рівняння (134) набуває вигляду

$$\dot{x} = f(x) + \nabla^2 x + g(x)\zeta, \quad f \equiv -\partial F/\partial x. \tag{137}$$

Застосування наближення Ґінзбурґа–Ландау (135) дозволяє покласти масштаб l_0 набагато меншим від кореляційної довжини $r_c = D^{1/2}|\partial^2 F/\partial x^2|_{x=0}^{-1/2}$ [29].

Для кількісного опису системи перейдімо від континуального простору до дискретного за рахунок зображення ґраткової моделі з кроком $h = 1$. Тоді стани системи будуть описуватися набором скалярних змінних $\{x_k\}$, $k = 1, \ldots, L^d$, визначених на гіперкубічній ґратці довжиною L та вимірністю d. У результаті зміна $\{x_k\}$ з часом t буде задаватися системою стохастичних диференціяльних рівнянь

$$\dot{x}_k = f(x_k) + \frac{1}{2d}\sum_j \widehat{D}_{kj} x_j + g(x_k)\zeta_k(t). \qquad (138)$$

Тут ми ввели дискретний оператор Лапласа $\widehat{D}_{kj}$:

$$\nabla^2 \Rightarrow \sum_j \widehat{D}_{kj} = \sum_j (\delta_{nn(k),j} - 2d\delta_{kj}), \qquad (139)$$

де $nn(k)$ визначає набір найближчих сусідів [30] вузла k. Окрім того, розбиваючи часовий інтервал $t \in [0, T]$ на N відрізків довжини $\Delta t = T/N$, введемо дискретний час, що приводить рівняння (138) до вигляду

$$x_{i,k} - x_{i-1,k} = \left[f_{i-1,k} + \frac{1}{2d}\sum_j \widehat{D}_{kj} x_{i-1,j}\right] \times \Delta t + g_{i-1,k} w_{i,k}, \qquad (140)$$

де $f_{i,k} = f(x_{i,k})$, $g_{i,k} = g(x_{i,k})$ (тут і далі індекс i визначає час, а k — координату). Останній доданок у цьому рівнянні подає вінерівський процес $w_{i,k}$, розподілений за Ґауссом:

$$P\{w_{i,k}\} = (2\pi)^{N/2} \exp\left(-\frac{1}{2\Delta t}\sum_{i,i'} w_{i,k} w_{i',k}\right), \qquad (141)$$

з інтенсивністю $\sigma^2 = 1$. З формальної точки зору, рівняння (140) визначає перетворення $w_{i,k} \to x_{i,k}$, яке дозволяє знайти розподіл за $x_{i,k}$ відповідно до відомого розподілу для $w_{i,k}$:

$$P\{x_{i,k}\} = JP\{w_{i,k}\}, \qquad (142)$$

де J — якобіян відповідного переходу:

$$J = \det\left\|\frac{\partial w_{i,k}}{\partial x_{i',k}}\right\|. \qquad (143)$$

Як зазначено у вступі до частини II, стохастичний характер рівняння (140) не дозволяє визначити $w_{i,k}$ безпосередньо — слід використати диференціял (132). У результаті знаходимо

$$w_{i,k} = \frac{x_{i,k} - x_{i-1,k}}{g_{i-1,k}} - \left(\frac{f_{i-1,k} + \frac{1}{2d}\sum_j \widehat{D}_{kj} x_j}{g_{i-1,k}} - \frac{g'_{i-1,k}}{2}\right)\Delta t, \qquad (144)$$

де друга складова в дужках зумовлена вінерівським характером процесу. Із урахуванням знайденого зв'язку $x_{i,k}$ та $w_{i,k}$ вираз (142) набуває вигляду

$$P\{x_{i,k}\} = \int \prod_{i,k} dw_{i,k} JP\{w_{i,k}\} \times \delta\left\{w_{i,k} - \frac{1}{g_{i-1,k}}\left[x_{i,k} - x_{i-1,k} - \left(f_{i-1,k} + \frac{1}{2d}\sum_j \widehat{D}_{kj} x_{i-1,j} - \frac{g_{i-1,k} g'_{i-1,k}}{2}\right)\Delta t\right]\right\}. \qquad (145)$$

Для визначення явного вигляду якобіяна випишімо основні елементи відповідної матриці:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w_{i,k}}{\partial x_{i,k'}} = \frac{1}{g_{i-1,k}}\delta_{kk'},\\
&\frac{\partial w_{i,k}}{\partial x_{i-1,k'}} = \frac{\partial}{\partial x_{i-1,k'}}\left(\frac{x_{i,k}+x_{i-1,k}}{g_{i-1,k}} - \left[\frac{f_{i-1,k}+\frac{1}{2d}\sum_j \widehat{D}_{kj}x_{i-1,j}}{g_{i-1,k}} - \frac{g'_{i-1,k}}{2}\right]\Delta t\right),\\
&\frac{\partial w_{i,k}}{\partial x_{i',k'}} = 0 \qquad \text{при} \quad i' \neq i, i-1.
\end{aligned} \tag{146}$$

Тоді детермінант, який є добутком діягональних елементів, набуває вигляду

$$J \equiv \det\left\|\frac{\partial w_{i,k}}{\partial x_{i,k}}\right\| = \prod_{i,k}\frac{1}{g_{i-1,k}}. \tag{147}$$

Використовуючи властивість дельта-функції $\delta(y/a) = a\delta(y)$, перепишімо рівняння (145) так:

$$\begin{aligned}
P\{x_{i,k}\} = &\int \prod_{i,k} dw_{i,k} J P\{w_{i,k}\} \prod_{i,k} g_{i-1,k}\\
&\times \delta\left\{g_{i-1,k}w_{i,k} - \left[x_{i,k} - x_{i-1,k} - \left(f_{i-1,k} + \frac{1}{2d}\sum_j \widehat{D}_{kj}x_{i-1,j} - \frac{g_{i-1,k}g'_{i-1,k}}{2}\right)\Delta t\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{148}$$

Підставляючи сюди вираз для якобіяна, одержуємо

$$\begin{aligned}
P\{x_{i,k}\} = &\int \prod_{i,k} dw_{i,k} P\{w_{i,k}\}\\
&\times \delta\left\{g_{i-1,k}w_{i,k} - \left[x_{i,k} - x_{i-1,k} - \left(f_{i-1,k} + \frac{1}{2d}\sum_j \widehat{D}_{kj}x_{i-1,j} - \frac{g_{i-1,k}g'_{i-1,k}}{2}\right)\Delta t\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{149}$$

Далі скористаємось фур'є-трансформантою

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}xp}\,\mathrm{d}p. \tag{150}$$

Тоді, застосовуючи інтеґрування за набором змінних $\{p_{i,k}\}$, отримуємо вираз

$$\begin{aligned}
P\{x_{i,k}\} = &\int \prod_{i,k} \mathrm{d}w_{i,k} \int \prod_{i,k} \frac{\mathrm{d}p_{i,k}}{2\pi} P\{w_{i,k}\}\\
&\times \exp\left\{\mathrm{i}\sum_{i,k} p_{i,k}\left[x_{i,k} - x_{i-1,k} - \left(f_{i-1,k} + \frac{1}{2d}\sum_j \widehat{D}_{kj}x_{i-1,j} - \frac{g_{i-1,k}g'_{i-1,k}}{2}\right)\Delta t - g_{i-1,k}w_{i,k}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Використовуючи для розподілу $P\{w_{i,k}\}$ ґауссіян (141), після інтеґрування за $\{w_{i,k}\}$ одержуємо

$$P\{x_{i,k}\} = \int \prod_{i,k} \frac{\mathrm{d}p_{i,k}}{2\pi} \exp\left\{-\frac{\Delta t}{2}\sum_{ii'} p_{i,k}p_{i',k}g_{i-1,k}g_{i'-1,k}\right\}$$
$$\times \exp\left\{\mathrm{i}\sum_{i,k} p_{i,k}\left[x_{i,k} - x_{i-1,k} - \left(f_{i-1,k} + \frac{1}{2d}\sum_{j}\widehat{D}_{kj}x_{i-1,j} - \frac{g_{i-1,k}g'_{i-1,k}}{2}\right)\Delta t\right]\right\}. \quad (151)$$

У континуальній границі $\Delta t \to 0$ знайдений вираз задає ймовірність реалізації різних траєкторій згідно з переходами:

$$P\{x_{i,k}\} \Rightarrow P\{x(\mathbf{r},t)\},$$
$$\prod_{i,k}\mathrm{d}x_{i,k} \Rightarrow \mathcal{D}x(\mathbf{r},t), \quad \prod_{i,k}\frac{\mathrm{d}p_{i,k}}{2\pi} \Rightarrow \mathcal{D}p(\mathbf{r},t). \quad (152)$$

У результаті ймовірнісний функціонал набуває вигляду

$$P\{x(\mathbf{r},t)\} = \int \mathcal{D}p(\mathbf{r},t)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{d}t p^2(\mathbf{r},t)g^2(x(\mathbf{r},t))\right. \quad (153)$$
$$\left. + \mathrm{i}\int_0^T \mathrm{d}t p(\mathbf{r},t)\left[\dot{x}(\mathbf{r},t) - \left(f(x(\mathbf{r},t)) + \nabla^2 x(\mathbf{r},t) - \frac{g(x(\mathbf{r},t))g'(x(\mathbf{r},t))}{2}\right)\right]\right\}.$$

Переходячи до інтеґрування по уявній осі, одержуємо канонічний вираз

$$P\{x(\mathbf{r},t)\} = \int \mathrm{e}^{-S}\ \mathcal{D}p(\mathbf{r},t), \quad (154)$$

де функціонал дії $S = \int_0^T \mathrm{d}t L(x(\mathbf{r},t), p(\mathbf{r},t))$ задається лаґранжіяном

$$L(x,p) = p[\dot{x} - f(x) - \nabla^2 x + g(x)g'(x)/2] - p^2 g^2(x)/2. \quad (155)$$

Принцип найменшої дії приводить до рівняння Ойлера

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \nabla\frac{\partial L}{\partial \nabla z} + \nabla^2\frac{\partial L}{\partial \nabla^2 z} = 0, \quad z \equiv \{x,p\}, \quad (156)$$

яке визначає оптимальні траєкторії так:

$$\dot{x} = \nabla^2 x + f - gg'/2 + g^2 p, \quad (157)$$

$$\dot{p} = -\nabla^2 p - p\Big[f' - (gg')'/2 + gg'p\Big]. \quad (158)$$

Оскільки основний внесок в інтеґрал (154) робить оптимальна траєкторія, то для його оцінки можна знехтувати внеском менш імовірних шляхів. Тоді підстановка $\dot{x}$ із (157) в (155) спрощує функціонал дії так:

$$S \simeq \frac{1}{2}\int_0^T g^2(x(\mathbf{r},t))p^2(\mathbf{r},t)\mathrm{d}t, \quad (159)$$

де $x(\mathbf{r},t)$, $p(\mathbf{r},t)$ беруться вздовж оптимальної траєкторії. При спрямуванні верхньої границі інтеґрала до безмежності одержуємо стаціонарний розподіл.

B. Кінетика індукованого шумом переходу

1. Білий шум

Дослідімо кінетичну картину індукованого мультиплікативним шумом переходу, ґрунтуючись на методі фазової площини [26]. Будемо виходити з рівняння Ланжевена (134), де амплітуду мультиплікативного шуму прийнято у степеневій формі:

$$g(x) = |x|^a, \quad (160)$$

a — позитивний показник, величина якого змінюється в інтервалі від 0 до 1 [31]. Стохастичну складову визначимо як білий шум (136), де інтенсивність σ^2 зводиться до температури T. Для термодинамічного функціонала застосовуємо формулу (135).

У межах формалізму інтеґрування за траєкторіями отримуємо лаґранжіян у вигляді (155). Для отримання дисипативної функції врахуємо, що шум у рівнянні Ланжевена (134) набуває адитивного характеру при заміні стохастичної змінної x на y, яка пов'язана умовою $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/g(x)$. Тоді, визначивши дисипативну функцію стандартним виразом $R(y) = \dot{y}^2/2$ у вихідній змінній, знаходимо

$$R(x) = \dot{x}^2/2g^2. \tag{161}$$

При цьому в правій частині рівняння Ойлера (156) з'являється похідна $\partial R/\partial\dot{z}$ і воно набуває вигляду

$$\dot{x} = \nabla^2 x + f - gg'/2 + g^2 p, \tag{162}$$

$$\dot{p} = -\nabla^2 p - p\Big[1 + f' - (gg')'/2 + gg'p\Big]$$
$$-(\nabla^2 x + f)/g^2 + g'/2g. \tag{163}$$

Оскільки нас цікавить лише характер часових залежностей, скористаймось наближенням для ґрадієнтних складових:

$$\nabla^2 x \to \xi^{-2}x, \qquad \nabla^2 p \to \lambda^{-2}p, \tag{164}$$

де кореляційна довжина ξ та параметр λ визначають масштаби просторових неоднорідностей амплітуд гідродинамічної моди x та спряженого імпульсу p. Окрім того, використовуємо x^4-модель

$$F(x) = -\frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \quad \varepsilon \equiv \frac{T_c - T}{T_c}. \tag{165}$$

Оскільки лаґранжіян (155) є симетричним щодо одночасної заміни знаків x, p, то фазовим портретам властива центральна симетрія стосовно початку координат $x = p = 0$. З іншого боку, згідно з (160) вісь $x = 0$, на якій інтенсивність шуму набуває нульового значення, є синґулярною. У результаті система поділяється на дві тотожні підсистеми, і далі достатньо обмежитися дослідженням лише верхньої частини фазової площини $x > 0$. Тоді рівняння (162), (163) записуємо так:

$$\dot{x} = x\left[(\xi^{-2} + \varepsilon) - x^2\right] - (a/2)x^{2a-1} + x^{2a}p, \tag{166}$$

$$\dot{p} = p\left\{-\left[(1 + \lambda^{-2}) + \varepsilon\right] + 3x^2\right.$$
$$\left.+(a/2)(2a-1)x^{2(a-1)} - ax^{2a-1}p\right\}$$
$$-x^{1-2a}\left[(\xi^{-2} + \varepsilon) - x^2\right] + (a/2)x^{-1}. \tag{167}$$

У стаціонарному стані $\dot{x} = \dot{p} = 0$ маємо

$$p = -\left(\xi^{-2} + \varepsilon\right)x^{1-2a} + x^{3-2a} + (a/2)x^{-1}, \tag{168}$$

$$p\left\{\left[(\lambda^{-2} - a\xi^{-2} + (1-a)\varepsilon\right] - (3-a)x^2\right)$$
$$+\Big(a(1-a)/2\Big)x^{2(a-1)}\Big\} = 0. \tag{169}$$

Звідси випливає, що при температурах, які перевищують величину T_0, визначену умовою (див. рис. 9),

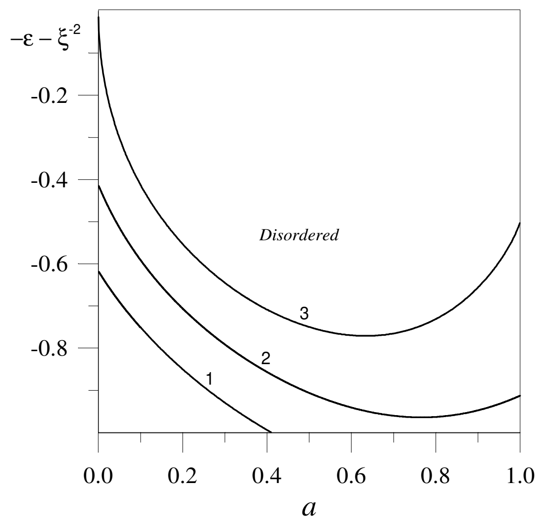

Рис. 9. Залежність показника a від безрозмірної температури ε_i, при якій зливаються сідло S та вузол C. Криві 1, 2, 3 відповідають значенням параметра $\lambda = 0.9$; 1.1; ∞. Крива 3 відповідає температурі ε_0, при якій відбувається біфуркація зі створенням сідла S_0 та вузла C.

$$\xi^{-2} + \varepsilon_0 = (a/2)^{\frac{1}{2-a}}(1-a)^{-\frac{1-a}{2-a}}(2-a),$$
$$\varepsilon_0 \equiv (T_c - T_0)/T_c, \tag{170}$$

вигляд фазового портрета характеризується наявністю однієї сідлової точки S, положення якої задається коренем множника, що стоїть в (169), при $p \neq 0$. Як свідчить рис. 10, при температурі T_0 відбувається біфуркація в точці, визначеній координатами:

$$p_0 = 0, \qquad x_0 = \left[a(1-a)/2\right]^{\frac{1}{2(2-a)}}. \tag{171}$$

При цьому з'являються додаткове сідло S_0 та притягувальний вузол C, положення яких визначається умовою $p = 0$ і задається координатами $x_{\mp}$. З подальшим охолодженням системи сідло S та вузол C

зливаються в точці

$$p_i = 0, \qquad x_i^2 = \frac{1-a}{2-a}\left(\xi^{-2}+\varepsilon\right) + \frac{\lambda^{-2}-\xi^{-2}}{2(2-a)}, \quad (172)$$

що відповідає температурі інверсії T_i, яка задається умовою

$$\xi^{-2}+\varepsilon_i = x_i^2 + (a/2)x_i^{2(a-1)}, \quad \varepsilon_i \equiv (T_c - T_i)/T_c. \quad (173)$$

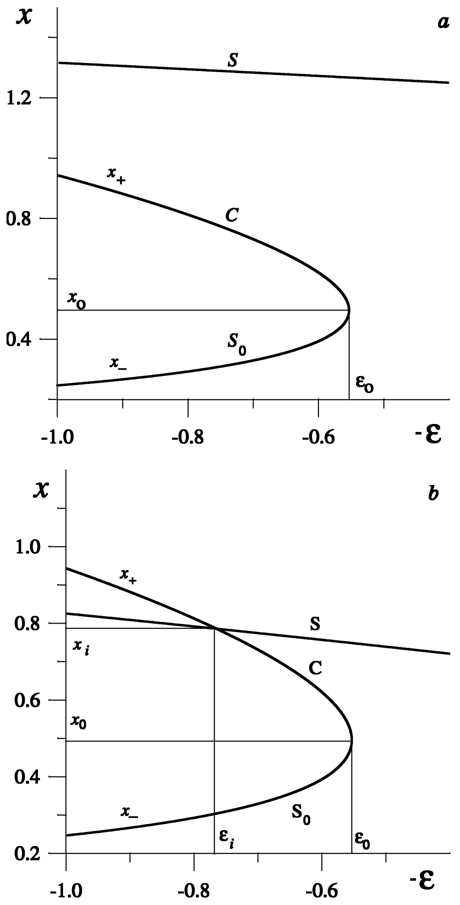

Рис. 10. Температурна залежність стаціонарних значень параметра порядку при $a = 0.2$ и $\lambda = 0.5$ (верхній графік), $\lambda = 1.1$ (нижній графік).

При $T < T_i$ точка S, визначена коренем другого множника в (169), стає притягувальним вузлом, а точка C, що лежить на осі $p = 0$, трансформується в сідло. Як бачимо з рис. 11, зазначена інверсія буває лише за умови, коли масштаб λ зміни амплітуди флуктуації перевищує критичне значення λ_c, величина якого задається рівняннями (172), (173) при $\varepsilon_i = 1$. Залежність величини λ_c від показника a наведено на рис. 11. При $a = 0$ і $a = 1$ одержуємо відповідно $\lambda_c = (2+3\xi^{-2})^{-1/2}$ і $\lambda_c = (1+3\xi^{-2})^{-1/2}$.

Наведене вище свідчить, що в системах з $\lambda > \lambda_c$ при температурах $T < T_i$ стаціонарний стан системи відповідає точці S, координати якої задаються рівняннями:

$$\begin{aligned} p &= -f/g^2 + g'/2g - g^{-2}\nabla^2 x, \\ f' &= -p^{-1}\nabla^2 p - gg'p + (gg')'/2. \end{aligned} \quad (174)$$

Умова (174) означає, що для однорідних систем найімовірніше значення p амплітуди флуктуацій спряженої сили протилежне за знаком величині сили f; при цьому сприйнятливість $\chi \equiv (F'')^{-1} = -1/f'$ стає безмежною. Таким чином, вузол S відповідає стаціонарному станові термодинамічної системи, нестійкої до переходу до упорядкованої фази. При цьому фазовий портрет виглядає, як на рис. 12a.

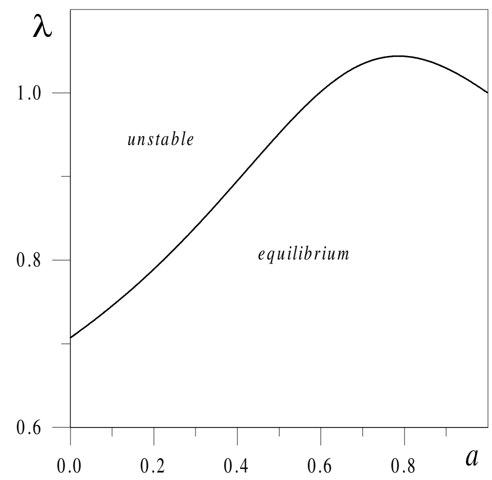

Рис. 11. Фазова діяграма $\lambda(a)$, що показує ділянки, при яких реалізуються нестійкий та рівноважний стани.

При температурах $T > T_i$ реалізується стаціонарний стан у точці C з координатами:

$$\begin{aligned} p &= \nabla p = \nabla x = 0, \\ f &= gg'/2. \end{aligned} \quad (175)$$

В адитивній границі ця точка відповідає однорідному станові термодинамічної рівноваги ($f = 0$). Як видно з рис. 12, відповідний фазовий портрет можна одержати не лише за рахунок підвищення температури (рис. 12b), але й завдяки зменшенню масштабу неоднорідности λ (рис. 12c), а також при збільшенні показника a мультиплікативної функції (рис. 12d).

Відомо, що в процесі своєї еволюції реальна термодинамічна система прямує до рівноважного стану (175), а не до нестійкого (174). Оскільки перше відповідає малим значенням параметра неоднорідности λ, а друге — великим, то можна довести, що в рівноважному стані розподіл флуктуацій спряженого поля $p(\mathbf{r})$ є сильно неоднорідним. При цьому фазові портрети виглядають, як на рис. 12b–d. У порівнянні з рис. 12а їхня характерна особливість полягає в тому, що притягувальний вузол розміщується на осі $p = 0$. Загальний вигляд фазових портретів, наведених на рис. 12, характеризується наявністю двох сепаратрис із гілками PQ та MS_0N. Вони розбивають фазову площину на три ізольовані ділянки, які відповідають великим, проміжним та малим значенням параметра порядку x. Перша із зазначених ділянок характеризується нескінченним зростанням величин x, p зі спливанням часу $t \to \infty$. Насправді така ділянка реалізується з нескінченно малою ймовірністю. Найактуальнішою є ділянка проміжних значень x, у якій із часом система попадає в стаціонарний упорядкований стан. Саме ця ділянка визначає кінетику переходу. Поява ділянки, що відповідає значенням $x \ll 1$, зумовлена мультиплікативним характером шуму. Тут зі збільшенням часу параметр порядку $x(t)$ прямує до значення $x = 0$.

Розгляньмо поведінку системи в кожній ділянці. З цією метою проаналізуймо розподіл імовірности реалізації фазової траєкторії, що відповідає початковим значенням $x_0 \equiv x(t = 0)$. Вона подається у вигляді

$$P(x_0) \propto \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0} g^2p^2\mathrm{d}t\Big), \qquad (176)$$

де враховано вирази (166), (167), інтеґрування проводимо вздовж відповідної траєкторії. Одержану залежність $P(x_0)$ для показника $a < 1/2$ наведено на рис. 13а. Окрім тривіяльного збільшення густини ймовірности (176) з наближенням до початку координат, при значеннях x_0, що відповідають сепаратрисам, спостерігаємо стрибки, поблизу яких $P(x_0)$ може незначно збільшуватись. Поза ділянкою, обмеженою (зовнішньою) сепаратрисою, маємо $P = 0$, оскільки тут $x(t)$, $p(t) \to \pm\infty$ при $t \to \infty$.

Наведену поведінку розподілу $P(x_0)$ пояснюємо характером часових залежностей $x(t)$, $p(t)$ параметра порядку та амплітуди флуктуацій у процесі релаксації початкового значення (рис. 14). Далеко від ділянки S_0CS (див. рис. 12d) величини p, x швидко змінюють свої значення, а з наближенням до неї відбувається уповільнення. Таку поведінку пояснюємо тим, що поблизу названої ділянки дія $S\{x(\mathbf{r},t), p(\mathbf{r},t)\}$ змінюється набагато повільніше, ніж далеко від неї.

При значеннях показника $a > 1/2$ підінтеґральна функція у виразі (176) має розбіжність, тому ймовірність P набуває нульового значення при $x_0 \ll 1$ (див. рис. 13b). Характерно, що зазначену розбіжність спостерігаємо лише в зоні фазового портрета, обмеженій гілкою сепаратриси S_0O на рис. 12d.

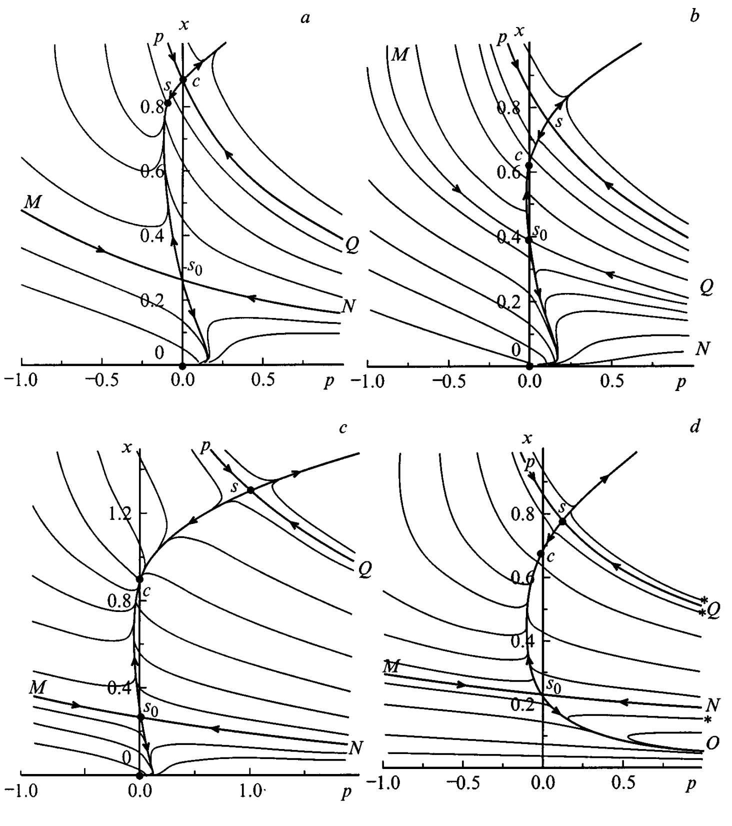

Рис. 12. Основні типи фазових портретів в упорядкованому стані: a) $\varepsilon = -0.9$, $\lambda = 1$, $a = 0.2$; b) $\varepsilon = -0.6$; c) $\lambda = 0.5$; d) $a = 0.7$ (для рис. b, c, d вказано лише параметри, значення яких змінено в порівнянні з рис.а). Позначення стаціонарних точок таке, як і на рис. 10.

Для пояснення вигляду залежности $P(x_0)$ розгляньмо поведінку величин $x(t)$, $p(t)$ при різних значеннях показника a. З цією метою покладімо в рівнянні (167) $\dot{p} = 0$. Одержане в результаті квадратне рівняння дає стаціонарне значення спряженого імпульсу в границі $x \to 0$:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - a\right)^{-1} x^{1-2a}, \qquad a < \frac{1}{2}, \tag{177}$$

$$p = \left(a - \frac{1}{2}\right) x^{-1}, \qquad a > \frac{1}{2}. \tag{178}$$

Таким чином, при $a < 1/2$ система прямує з плином часу до початку координат $x = p = 0$, а з перевищенням критичного значення $a = 1/2$ притягувальний вузол стрибком переміщується на нескінченність ($p \to \infty$, $x = 0$). Відповідна підінтеґральна функція в розподілі (176)

$$g^2p^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - a\right)^{-2} x^{2(1-a)}, \qquad a < \frac{1}{2}, \tag{179}$$

$$g^2p^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^{2} x^{-2(1-a)}, \qquad a > \frac{1}{2} \tag{180}$$

характеризується інверсією знака показника при переході через критичне значення $a = 1/2$. Підставляючи (177) в рівняння руху (166) та залишаючи в ньому головні члени, при $a < 1/2$ одержуємо рівняння $2\dot{x} = -ax^{2a-1}$, яке дає часову залежність параметра порядку

$$x^{2(1-a)} = a(1-a)(t_0 - t), \qquad t < t_0, \qquad a < 1/2, \tag{181}$$

де t_0 — константа інтеґрування, що задає час, протягом якого точка потрапляє на вісь $x = 0$. Підстановка залежности (181) в (179), а результату — в інтеґрал (176) показує, що при $a < 1/2$ імовірність $P(x_0)$ реалізацій траєкторій у ділянці фазового портрета $x \ll 1$ відрізняється від нуля (див. рис. 13a).

Зовсім іншу ситуацію спостерігаємо при показнику $a > 1/2$. У цьому випадку рівняння (166) зводиться до вигляду $2\dot{x} = -(1-a)x^{2a-1}$, що дає (181), де множник $a(1-a)$ замінено на $(1-a)^2$. Однак при $a > 1/2$ вираз g^2p^2 визначається показником з протилежним знаком, так що при $t \to t_0$ g^2p^2 набуває нескінченного значення. У результаті ймовірність (176) стає зникаюче малою (рис. 13b). Фізична причина такої поведінки полягає в тому, що за скінченний проміжок часу $t_0 < \infty$ система потрапляє на вісь $x = 0$, що забезпечує нескінченне значення спряженого імпульсу $p \propto x^{-1} \propto (t_0 - t)^{-1/2(1-a)}$. Наочно це можна уявити як випадання конденсату (absorbing state) конфіґураційних точок з ділянки фазового портрета $x \ll 1$ на вісь абсцис при $p \to \infty$. Наголосимо, що умова $t_0 < \infty$ виконується лише нижче від гілки сепаратриси S_0O на рис. 12c, а в ділянці NS_0O маємо $t_0 = \infty$ і розбіжність підінтеґрального виразу в (176) не проявляється. Тому $P = 0$ стає можливим лише нижче від лінії S_0O.

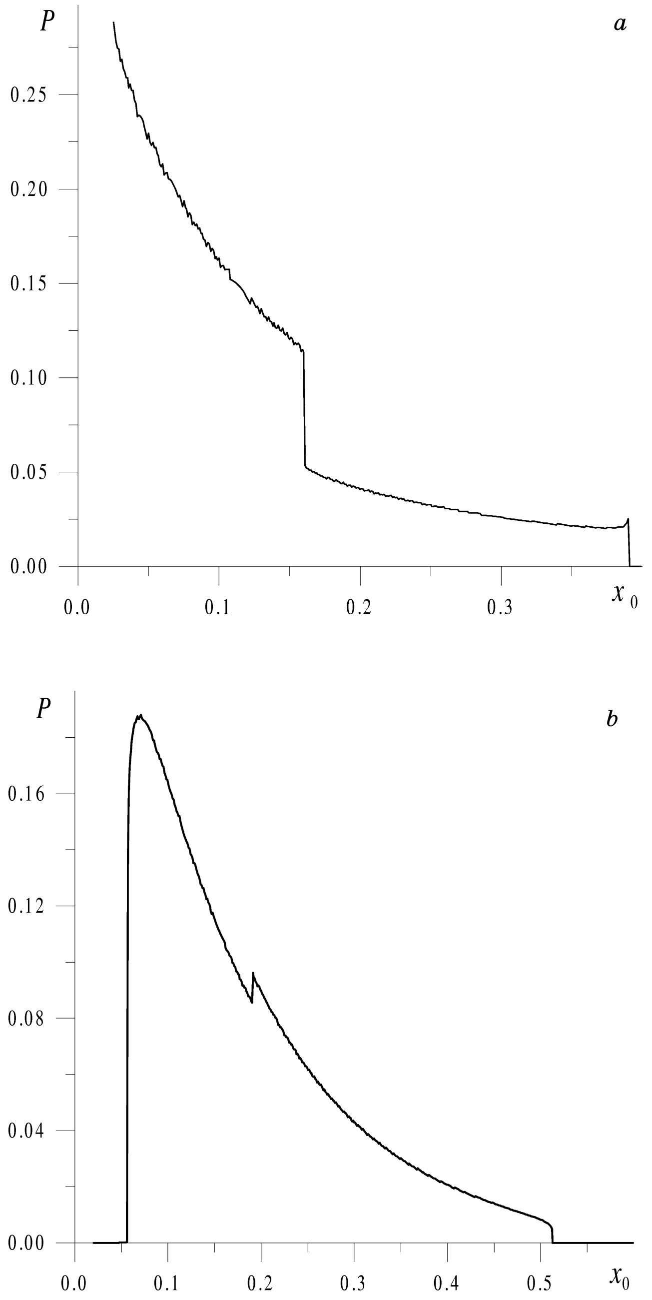

Рис. 13. Залежність імовірности реалізації різних траєкторій P від початкового значення параметра порядку x_0 при $\varepsilon = -0.9$, $\lambda = 1$ та: a) $a = 0.2$; b) $a = 0.7$. Випадок (a) відповідає фазовому портретові на рис. 12a, випадок (b) — рис. 12c. Початкове значення спряженого імпульсу $p_0 = 1$.

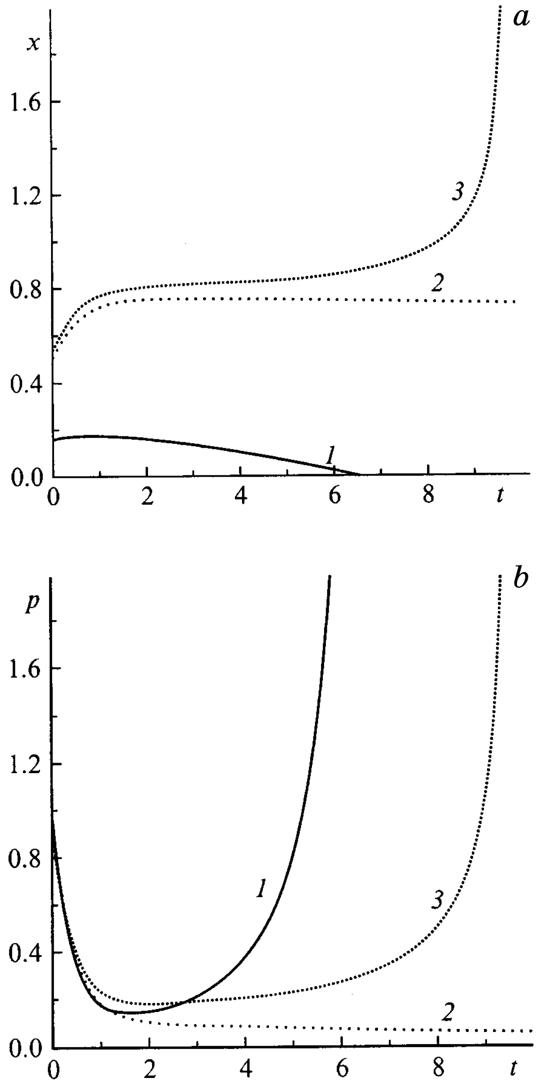

Рис. 14. Залежність імовірности реалізації різних траєкторій P від початкового значення параметра порядку x_0 при $\varepsilon = -0.9$, $\lambda = 1$ та: a) $a = 0.2$; b) $a = 0.7$. Випадок (a) відповідає фазовому портретові на рис. 12a, випадок (b) — рис. 12c. Початкове значення спряженого імпульсу $p_0 = 1$.

Подаючи залежність $x(t)$ співвідношенням Герста $x(t) \propto |t_0 - t|^H$, отримуємо показник

$$H^{-1} = 2(1 - a). \tag{182}$$

Як було з'ясовано в частині I, це значення визначає внутрішню фрактальну вимірність у фазовому просторі $D = 2(1 - a)$. Включення мультиплікативного шуму зі зростаючим показником a приводить до зменшення D від 2 при $a = 0$ до 0 при $a = 1$. Подібно до цього з рівнянь (166), (167) в границі $x \ll 1$ знаходимо залежність координати від імпульсу:

$$x \propto |p_0 - p|^{1/|\Delta|}, \quad \Delta \equiv D - 1 = 1 - 2a. \tag{183}$$

Очевидно, що фрактальна вимірність $|\Delta|$, величина якої обмежена значенням 1, характеризує тип траєкторії (див. розділ I.E).

a. Сумірні масштаби неоднорідности. Вище ми розглянули несумірні масштаби зміни параметра порядку та спряженого імпульсу (див. (164)). Розгляньмо тепер випадок, коли обидва поля мають однакові масштаби неоднорідности та плавно змінюються в просторі [32]. Тоді можна перейти до фур'є-образів, для яких лапласіян замінюється квадратом хвильового вектора:

$$\nabla^2 x \to -\mathbf{k}^2 x, \qquad \nabla^2 p \to -\mathbf{k}^2 p. \tag{184}$$

Крім того, мультиплікативну функцію, залежно від фур'є-образу $x_{\mathbf{k}}$, будемо брати у степеневому вигляді (160). Тоді всі наведені співвідношення залишаються в силі, але у складових, що враховують неоднорідність простору, слід змінити знак.

У короткохвильовому режимі $|\mathbf{k}| > k_0$ фазовий портрет характеризується однією сідловою точкою S, яка лежить на осі $p = 0$. Граничне значення хвильового числа k_0 визначається рівнянням

$$k_0^2 = \varepsilon - (a/2)^{\frac{1}{2-a}} (1 - a)^{-\frac{1-a}{2-a}} (2 - a). \tag{185}$$

При $|\mathbf{k}| = k_0$ відбувається біфуркація в точці з координатами (див. рис. 15):

$$p_0 = 0, \qquad x_0 = [a(1 - a)/2]^{\frac{1}{2(2-a)}}. \tag{186}$$

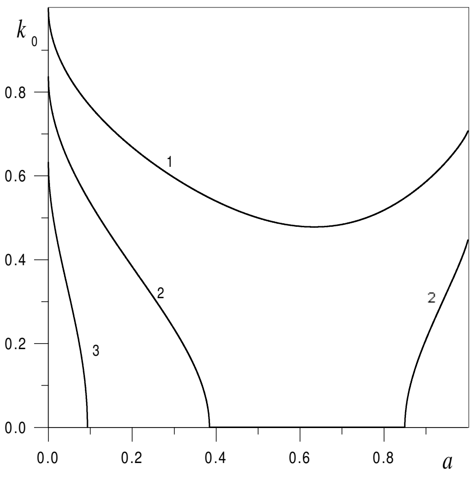

Рис. 15. Діяграма упорядкування; криві 1, 2, 3 відповідають $\varepsilon = 1$; 0.7; 0.4.

Збільшення масштабу неоднорідности в довгохвильовій границі $|\mathbf{k}| \le k_0$ приводить до трансформації сідла у вузол, поблизу якого виникають дві нові сідлові точки. Згідно з (185) граничне значення хвильового числа визначається доданками, перший з яких залежить лише від температури, а другий — від показника мультиплікативного шуму. В адитивній границі $a = 0$ маємо звичайну залежність середнього поля $k_0^2 = \varepsilon$; напрямленій перколяції $a = 1/2$ відповідає максимальне значення $k_0^2 = \varepsilon - 3/2$, а для $a = 1$ маємо $k_0^2 = \varepsilon - 1/2$. Діяграма впорядкування на рис. 15 показує, що фазовому переходу сприяє збільшення масштабу неоднорідности простору та підсилення амплітуди шуму.

Залежно від параметра неоднорідности стаціонарна густина ймовірности має вигляд, показаний на рис. 16. Рисунок свідчить, що підсилення неоднорідности приводить до розширення ділянки фазового портрета, де траєкторії потрапляють у вузол.

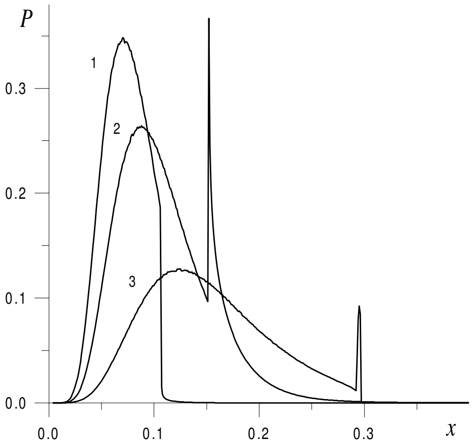

Рис. 16. Імовірність реалізації траєкторій на фазовій площині ($\phi = 0.5$): залежність $P(x)$ при $a = 0.8$ (криві 1, 2, 3 характеризуються значеннями $|\mathbf{k}| = 0.2$, 0.4, 0.6).

2. Урахування кореляції шуму

Хоча в багатьох випадках білий шум добре подає поведінку системи, цілком зрозуміло, що він є ідеалізованою моделлю флуктуацій. Дійсно, якщо для нього всі частоти флуктуацій зображено рівноправним чином, то реальний спектр обмежено скінченою зоною частот, ширина якої задається часом кореляції $\tau < \infty$. При невеликих значеннях $\tau \ll \tau^{(0)}$, де масштаб $\tau^{(0)}$ задає характерний час релаксації параметра порядку, кольоровість шуму можна врахувати розкладанням за параметром спектральної ширини $\sqrt{\tau/\tau^{(0)}}$, яке дає лише поправки, що несуттєво змінюють картину флуктуацій [6]. У протилежному разі $\tau \gg \tau^{(0)}$ застосовується метод динамічної релаксації, який показує, що шум може приводити до якісних змін [33–35]. Однак насправді $\tau \gg \tau^{(0)}$ реалізується лише для вузького класу стохастичних систем. Таким чином, основний інтерес становлять системи із сумірними значеннями часів кореляції флуктуацій та часу релаксації самої системи ($\tau \sim \tau^{(0)}$). Цій границі відповідає метод уніфікованої апроксимації кольорового шуму [36–38]. У його межах ми дослідимо однорідну систему, яка зазнає впливу флуктуаційного середовища з часом кореляції $\tau \sim \tau^{(0)}$ [39].

Будемо, як і раніше, виходити з рівняння Ланжевена

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\zeta(t) \tag{187}$$

для амплітуди гідродинамічної моди $x(t)$, еволюція якої задається детерміністичною силою Ландау $f(x) = \varepsilon x - x^3$ та амплітудою мультиплікативного шуму $g(x) = |x|^a$. На відміну від білого шуму, вважатимемо, що інтенсивність кольорового визначається нормуванням

$$\langle \zeta(t)\zeta(t')\rangle = (1/2\tau)\exp(-|t-t'|/\tau), \tag{188}$$

яке відповідає процесові Орнштайна–Уленбека

$$\tau\dot{\zeta} = -\zeta + \xi(t), \tag{189}$$

де $\xi(t)$ — білий шум.

Для вилучення кольорового шуму ζ візьмемо похідну за часом від (187), виразимо $\dot{\zeta}$ з (189), а ζ з (187). У результаті одержуємо немарківське стохастичне диференціяльне рівняння

$$\tau\Big(\ddot{x} - \dot{x}^2 g'(x)/g(x)\Big) = -\sigma(x)\dot{x} + f(x) + g(x)/\xi(t), \tag{190}$$

де штрих означає диференціювання за x та введено параметр перенормування

$$\sigma(x) = 1 - \tau f(x)\left[\ln\frac{f(x)}{g(x)}\right]'. \tag{191}$$

Додержуючись методу уніфікованої апроксимації кольорового шуму, який надає рівнянню (190) властивости марковости, використовуємо адіябатичне наближення, що дозволяє знехтувати прискоренням $\ddot{x}$, та залишаємо складові $\dot{x} \gg \dot{x}^2$, які задають уповільненішу еволюцію. У межах такого підходу систему описуємо звичайним рівнянням Фоккера–Планка [40,41], яке відповідає лінеаризованому за $\dot{x}$ рівнянню еволюції

$$\sigma(x)\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t). \tag{192}$$

Вираз у лівій частині (192) можна розуміти як часову похідну від гіпотетичного процесу $y(t)$, який пов'язаний з вихідним $x(t)$ умовою $\mathrm{d}y = \sigma(x)\mathrm{d}x$. Застосовуючи стохастичний диференціял Іто (132), повертаємось до процесу $x(t)$, що дає рівняння

$$\dot{x} = \left[\tilde{f}(x) + h(x)\right] + \tilde{g}(x)\xi(t) \tag{193}$$

з перенормованою силою Ландау та амплітудою мультиплікативного шуму:

$$\tilde{f}(x) = f(x)/\sigma(x), \quad h(x) = -g^2(x)\sigma'(x)/2\sigma(x),$$
$$\tilde{g}(x) = g(x)/\sigma(x). \tag{194}$$

Доданок $h(x)$ подає індукований шумом дрейф, зумовлений кольоровістю флуктуацій $\zeta(t)$.

Згідно з польовим методом, викладеним у розділі II.A, ефективне рівняння Ланжевена (193) відповідає таким виразам лаґранжіяна та дисипативної функції:

$$L(x,p) = p\left(\dot{x} - \tilde{f}(x) - h(x) + \tilde{g}(x)\tilde{g}'(x)/2\right)$$
$$-p^2\tilde{g}^2(x)/2, \tag{195}$$

$$R = \dot{x}^2/2\tilde{g}^2. \tag{196}$$

Звідси в межах методу, використаного для білого шуму, знаходимо рівняння Ойлера, згідно з якими стаціонарний стан системи визначається виразами:

$$p = -\sigma f/g^2 + g'/2g, \tag{197}$$

$$p\left[\frac{\sigma f}{g^2}\left(\ln\frac{f}{g}\right)' + \frac{1}{2}\frac{\sigma' g'}{\sigma g} - \frac{g''}{2g}\right] = 0. \tag{198}$$

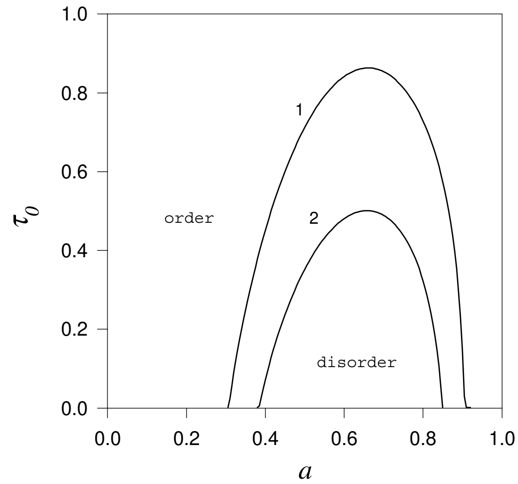

Рис. 17. Фазова діяграма виникнення впорядкованого стану ($x \neq 0$) (криві 1, 2 відповідають $\varepsilon = 0.65$, 0.7).

Як і за відсутности кореляції, система випробовує біфуркацію в упорядкований стан, яку, однак, спостерігаємо не лише при зменшенні температури $-\varepsilon$, але і при збільшенні часу кореляції шуму: при $\tau > \tau_0$ додатково до сідлової точки S, для якої $p \neq 0$, виникає нове сідло S_0 та притягувальний вузол C, які розміщуються на осі $p = 0$. Фазова діяграма на рис. 17 визначає ділянку граничних значень τ_0 часу кореляції та показника a мультиплікативної функції, які відповідають різним фазам. Бачимо, що зростання a приводить до реверсивного переходу "порядок–безпорядок–порядок", тоді як збільшення τ_0 — лише до впорядкування. Температурна залежність марґінального значення τ_c, яке відповідає максимуму залежности $\tau(a)$, показує, що процес упорядкування досягається лише при збільшенні часу кореляції (див. рис. 18).

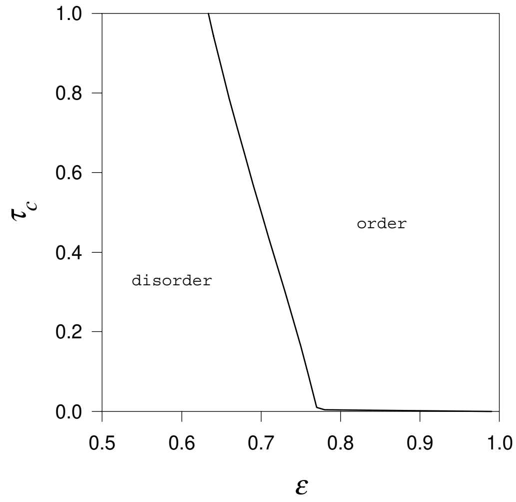

Рис. 18. Фазова діяграма максимального значення часу кореляції шуму, при якому стає можливим створення впорядкованого стану.

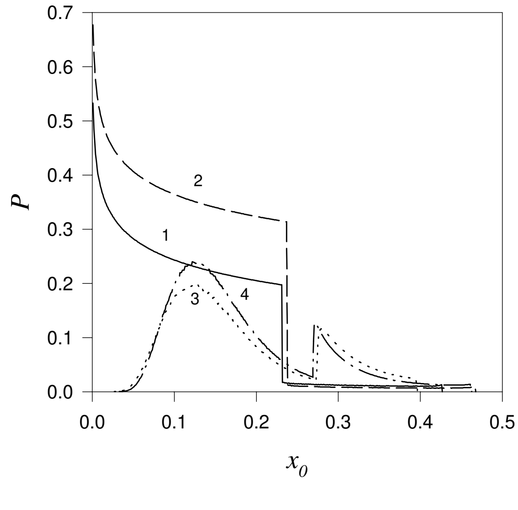

Рис. 19. Залежність стаціонарного розподілу P від початкового значення параметра порядку x_0 при $\varepsilon = 0.7$ (криві 1, 2 відповідають $a = 0.2$ при $\tau = 0.4$, 0.6; криві 3,4 відповідають $a = 0.8$ при $\tau = 0.4$, 0.6). Початкове значення спряженого імпульсу $p_0 = 0.5$.

Хоча час кореляції шуму суттєво впливає на стаціонарні стани системи, він несуттєво змінює часові залежності параметра порядку $x(t)$ та спряженого імпульсу $p(t)$. На границях малих значень $x(t) \ll 1$, $p(t) \ll 1$ маємо такі самі асимптотики, як і для білого шуму, що означає незмінність фрактальних властивостей фазового простору при "зафарбовуванні" шуму. Згідно з рис. 19 зміна τ також є несуттєвою для стаціонарного розподілу.

Таким чином, наявність короткочасової пам'яті флюктуацій приводить до реверсивного переходу, при якому невпорядкована ділянка реалізується лише в обмеженому проміжку показників a та високочастотному спектрі флуктуацій $\tau < \tau_c$. Характерно, що наведена картина визначає поведінку найімовірніших величин. У розділі III.В буде показано, що реверсивний перехід спостерігаємо також для статистичних моментів $\langle x\rangle$, $\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle$.

C. Калібрувальна теорія самоподібних систем

Розгляньмо блукаючу частинку, що здійснює одновимірні польоти Лєві. У такому випадку система є самоподібною, так що її функція розподілу за координатою x в час t однорідна:

$$P(x,t) = a^{-\alpha}\mathcal{P}(y), \quad y \equiv x/a, \tag{199}$$

де $a \equiv a(t)$ — часозалежний масштаб, y — безрозмірна координата, α — показник самоподібности. Для аналізу такої системи зручно використати методи, що ґрунтуються на похідній Джексона $\mathcal{D}_q$ (див. додаток C). Основна перевага цієї похідної при аналізі самоподібних систем полягає в тому, що вона визначає варіяцію функції щодо дилатації $q \neq 1$, а не зміщення $\mathrm{d}x \to 0$, як у звичайному випадку. В цьому розділі таке подання використовуємо для польового дослідження самоподібної стохастичної системи.

На відміну від простого випадку, де масштаб a не залежить від часу t, розгляньмо нестаціонарну систему, для якої величина a та фактор q є функціями t. Як відомо з теорії калібрувальних полів [24], у такому разі система інваріянтна щодо перетворень $x \to qx$, $P \to Q_q P$, $Q_q \sim q^\alpha$, якщо ґрадієнтні складові $\mathcal{D}_q P$, $\partial P/\partial t$ замінюються на подовжені похідні $(\mathcal{D}_q + \epsilon)P$, $(\partial/\partial t + E)P$, де параметри ϵ, E — компоненти калібрувального потенціялу (тут та нижче час t вимірюється в одиницях часу релаксації ймовірности). Відповідно до (C.6) легко бачити, що такі видовжені похідні інваріянтні стосовно нестаціонарної дилатації $q = q(t)$, визначеної перетвореннями:

$$\begin{gathered} x \to qx, \qquad P \to Q_q P, \\ \epsilon \to \epsilon - \frac{\mathcal{D}_q Q_q}{Q_q} - (q-1)\frac{\mathcal{D}_q Q_q}{Q_q}\,\frac{\mathcal{D}_q P}{P}, \qquad E \to E - \dot{Q}, \end{gathered} \tag{200}$$

де крапка означає похідну за часом.

Найпростіший калібрувально-інваріянтний лаґранжіян евклідової теорії поля є таким:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\mathcal{D}_q + \epsilon)P\right]^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_q\epsilon)^2, \tag{201}$$

де перший член ураховує калібрувальну дилатацію, другий — внесок поля. Відповідно для дисипативної функції маємо

$$R = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + E\right)P\right]^2 + \frac{\theta}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + E\right)\epsilon\right]^2, \tag{202}$$

де θ — відношення часів релаксації калібрувального поля та ймовірности. У результаті рівняння Ойлера

$$\mathcal{D}_q\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathcal{D}_q \mathrm{z})} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \mathrm{z}} = -\frac{\partial R}{\partial\dot{\mathrm{z}}}, \quad \mathrm{z} \equiv (P, \epsilon) \tag{203}$$

приводить до диференціяльних рівнянь із частинними похідними та нелінійними складовими:

$$\dot{P} + \mathcal{D}_q^2 P = -EP + \epsilon^2 P, \tag{204}$$

$$\theta\dot{\epsilon} + \mathcal{D}_q^2\epsilon - P\mathcal{D}_q P = -\theta E P + \epsilon P^2. \tag{205}$$

Перші складові у правих частинах описують дисипативний вплив зовнішнього середовища. Далі розглянемо лише консервативні системи, у яких припустимо, що часова компонента калібрувального потенціялу, який обернено пропорційний до відповідного часу релаксації, дорівнюватиме нулеві ($E = 0$).

Приступаючи до аналізу основних рівнянь (204), (205), розгляньмо найпростіший випадок $\epsilon \to 0$, $\mathcal{D}_q^2\epsilon \to 0$, у якому вони набувають форми

$$\dot{P} = -\mathcal{D}_q^2 P, \tag{206}$$

$$\theta\dot{\epsilon} = P\mathcal{D}_q P. \tag{207}$$

Перше з них має дифузійний вигляд, але протилежний знак у правій частині вказує на те, що самоподібна система виявляє розбіжну кінетику, властиву ієрархічним системам [42]. Однак така поведінка реалізується лише протягом короткого часового інтервалу $t \sim \theta \ll 1$. При звичайному часі $t \geq 1$, який буде розглянуто нижче, стає можливою адіябатична апроксимація $\theta \ll 1$, що дозволяє знехтувати лівою частиною (207). У результаті виконується умова $\mathcal{D}_q P \simeq 0$ і система потрапляє до стаціонарного однорідного стану

$$P(x,t) = \mathrm{const} \equiv P_{\mathrm{st}}. \tag{208}$$

У складнішому випадку $\epsilon(t) \to \text{const} \neq 0$ рівняння (205) зводиться до вигляду

$$\mathcal{D}_q P = -\epsilon P, \tag{209}$$

який також приводить до статичного розподілу (208).

Для подальшого аналізу помножимо (204) на $\mathcal{D}_q P$, а (205) на $\mathcal{D}_q \epsilon$. Тоді знаходимо перший інтеґрал

$$\frac{1}{2}(\mathcal{D}_q P)^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_q \epsilon)^2 = \frac{1}{2}(\epsilon P)^2 + \frac{1}{2}C^2, \tag{210}$$

де ми поклали

$$(\dot{P} - P\mathcal{D}_q \epsilon)\mathcal{D}_q P = 0 \tag{211}$$

та використали сталу інтеґрування $C^2/2$. Тоді після припущення

$$\mathcal{D}_q \epsilon = -C, \quad C > 0 \tag{212}$$

та умови $\mathcal{D}_q P \neq 0$ рівняння (211) приводить до експоненціяльної залежности

$$P \propto \mathrm{e}^{-Ct}, \tag{213}$$

а (210) зводиться до вигляду (209).

Як відомо, самоподібним системам властива степенева, а не експоненціяльна поведінка [12], так що в (210), (212) слід покласти $C = 0$. У результаті приходимо до важливої умови калібрування

$$\mathcal{D}_q \epsilon = 0, \tag{214}$$

відповідно до якої потенціял ϵ не може бути функцією параметра дилатації q. Таким чином, рівняння (204) приводить до умови $\dot{P} = 0$, згідно з якою стаціонарний стан системи визначається рівнянням (209). Доповнюючи його визначенням похідної Джексона (C.3), приходимо до співвідношення $[\alpha]_q = -\epsilon$. Як показано в додатку C, q-число Джексона $[\alpha]_q$ зводиться до q-логарифма Цалліса, якщо стаціонарний розподіл P_{st} та параметр дилатації q зв'язані умовою

$$P_{\text{st}}^{q-1} \equiv q^{\alpha}. \tag{215}$$

Тоді одержане вище співвідношення приводить до розподілу Цалліса [12]

$$P_{st} = [1 - (q-1)\epsilon]^{\frac{1}{q-1}}. \tag{216}$$

З порушенням умови калібрування (214) самоподібна система переходить у нестаціонарний режим, у якому її поведінка визначається рівнянням (204). Із урахуванням визначення (C.7) знаходимо

$$\dot{P} = \left(\epsilon^2 - [\alpha]_{qq}\right) P. \tag{217}$$

Тоді використання розподілу (199) разом зі співвідношенням $[\alpha]_q = -\epsilon$ та зв'язком $\dot{P} = -a^{-(1+\alpha)}(\alpha\mathcal{P} + y\mathcal{P}')\dot{a}$ дає

$$a^{-1}\dot{a}(\alpha\mathcal{P} + y\mathcal{P}') = [\delta\alpha]_{qq}\mathcal{P}, \tag{218}$$

де штрих означає диференціювання за арґументом y, а множник $[\delta\alpha]_{qq}$ означено в (C.7).

Можна бачити, що з урахуванням асимптотик (C.8) у границі $q \to \infty$ система переходить в автомодельний режим при

$$\begin{gathered} aq = \text{const}, \quad a^{3\alpha-4}\dot{a} = \text{const} \equiv \tau_0^{-1} \\ y\mathcal{P}' = (\tau_0 - \alpha)\mathcal{P}. \end{gathered} \tag{219}$$

Розв'язок останнього рівняння $\mathcal{P} \propto y^{\tau_0 - \alpha}$ дає часові залежності характеристичного масштабу та густини ймовірности:

$$\begin{gathered} a^{3(\alpha-1)} = \frac{t}{\tau}, \quad P \propto x^{\tau_0 - \alpha}\, t^{-\tau}, \ \tau \equiv \frac{\tau_0}{3(\alpha - 1)} \\ \text{при} \quad q \gg 1, \quad t < \tau. \end{gathered} \tag{220}$$

У протилежному випадку $q \to 1$ величина q в (218) не залежить від t, і в довгочасовій границі одержуємо

$$\begin{gathered} a \propto \exp{(t/\tau_0)}, \quad P \propto x^{\lambda_0\tau_0 - \alpha} \exp{(-\lambda_0 t)}, \ \lambda_0 \equiv \frac{\alpha - 1}{q - 1} \\ \text{при} \quad q \to 1, \ t \gg \lambda_0^{-1}. \end{gathered} \tag{221}$$

Ототожнення часових масштабів τ та λ_0^{-1} в залежностях (220), (221) приводить до зв'язку

$$\tau = 3(q - 1), \tag{222}$$

згідно з яким характерний часовий масштаб визначається степенем неадитивности системи.

Розгляньмо далі випадок ненульової похідної Джексона другого порядку $\mathcal{D}_q^2 \epsilon = [\varepsilon]_{qq}\epsilon$, визначеної величиною ε. Тут рівняння (205) дає калібрувальний потенціял

$$\epsilon = \frac{-[\alpha]_q}{1 - [\varepsilon]_{qq}P^{-2}}, \tag{223}$$

який стає самоподібним, коли $[\varepsilon]_{qq}P^{-2}$ спадає зі зростанням q. Припускаючи це спадання у степеневому вигляді $q^{-\gamma}$ з $\gamma \to 0^+$, із рівняння (220) та умови (219) одержуємо залежність $P(t) \propto q^{\tau}(t)$, де показники зв'язано співвідношенням $\gamma = 2\tau - 3(\varepsilon - 1) > 0$.

У результаті індекс калібрувального потенціялу ε обмежено умовою

$$\varepsilon < 1 + \frac{2}{3}\ \tau = 1 + 2(q-1), \tag{224}$$

де друге рівняння випливає з (222). За цих умов рівняння (204), доповнене апроксимацією $\epsilon \simeq -[\alpha]_q$, що випливає з (223), забезпечує одержані вище часові залежності (220).

Автомодельний режим порушується, якщо множник у правій частині (217)

$$\epsilon^2 - [\alpha]_{qq} = [\alpha]_q^2 \left[(1 - [\varepsilon]_{qq} P_{\rm st}^{-2})^{-2} - 1\right] - [\delta\alpha]_{qq} \equiv -\lambda \tag{225}$$

стає незалежним від часу (тут густина ймовірности стаціонарного стану $P_{\rm st}$ визначається розподілом Цалліса (216) з ефективною енерґією (223)). При цьому декремент експоненціяльної залежности (221) замінюється на λ. Оскільки цей режим відповідає малим значенням q, то можна взяти границю $q \to 1$, для якої

$$\lambda = \lambda_0 - \alpha^2 \left\{ \left[1 - \left(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon - 1}{q-1} \right) \mathrm{e}^{2\epsilon} \right]^{-2} - 1 \right\},$$

$$\lambda_0 \equiv \frac{\alpha - 1}{q-1}. \tag{226}$$

Нарешті, при $q \to 1$, $\varepsilon^2 + (\varepsilon - 1)/(q-1) \ll \mathrm{e}^{2\alpha}$ маємо $\alpha = [\alpha]_q = -\epsilon$, що дає

$$\lambda = \lambda_0 \left[1 - 2\alpha^2 \frac{q-1}{\alpha-1} \left(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon-1}{q-1} \right) \mathrm{e}^{-2\alpha} \right]. \tag{227}$$

Розвинутий формалізм ґрунтується на дилатаційній інваріянтности лаґранжіяна (201) та дисипативної функції (202), яка дозволяє описати еволюцію консервативної самоподібної системи. Її поведінка визначається функцією розподілу (199) та калібрувальним потенціялом ϵ (для звичайної термодинамічної системи останній зводиться до відношення енерґії мікростану до температури). Їх часова залежність описується нелінійними рівняннями (204), (205) у частинних похідних. При виконанні умови калібрування (214) енерґія мікростану не залежить від дилатації, і система знаходиться у стаціонарному стані, який задається розподілом Цалліса (216). Таку картину спостерігаємо в автомодельному режимі (220), який реалізується в часі, обмеженому значенням (222), що задається неадитивністю системи $(q-1)$. На великих інтервалах часу дилатація стає константою, калібрувальна інваріянтність порушується, і система переходить до звичайного експоненціяльного режиму (221).

Проведений розгляд припускає, що система є консервативною — вплив зовнішнього середовища зводиться до нуля, так що в рівняннях (204), (205) $E = 0$. У розділі I.D показано, що врахування такого впливу для ієрархічних систем приводить до часової компоненти калібрувального потенціялу $E \equiv -(\partial/\partial x)F(x) + (\partial^2/\partial^2 x)D(x)$, де $F(x)$ — сила дрейфу, $D(x)$ — коефіцієнт дифузії [9,8]. Оскільки дифузійна складова взята з позитивним знаком, то експоненціяльний режим подавлюється, і самоподібна система знаходиться в автомодельному режимі протягом усього часового інтервалу.

ДОДАТОК

А. Функції Міттаґа–Лєффлєра і Фокса

Наведемо мінімальний набір спеціяльних функцій, що дозволяють перейти від швидкої експоненти $\exp(z)$ до уповільненої степеневої залежности z^α, z — комплексний арґумент. Будемо виходити з розвинення в ряд

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{A.1}$$

Його узагальнення за рахунок заміни факторіяла $k!$ гама-функцією $\Gamma(ak+b)$ з лінійно деформованим арґументом приводить до відповідного ряду для функції Міттага–Лєффлєра:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{A.2}$$

При граничних значеннях параметрів α, β ця функція переходить в експоненту та гіперболу:

$$E_{1,1}(z) = \exp(z), \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{E_{\alpha,\alpha}(z)}{\alpha} = (1-z)^{-2}. \tag{A.3}$$

Якщо перше рівняння випливає безпосередньо з визначення (A.3), то для одержання другого слід продиференціювати за z розвинення в ряд виразу $(1-z)^{-1}$, а також використати асимптотику гама-функції $\lim_{x\to 0} \Gamma(x) \to x^{-1}$ та визначення (A.2). Наведемо також необхідні асимптотики:

$$E_{\alpha,\beta}(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[1 + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} z \right],\ z \to 0; \tag{A.4}$$

$$E_{\alpha,\alpha}(z) \propto z^{-2},\ z \to \infty. \tag{A.5}$$

Якщо деформувати в (A.1) не арґумент факторіяла, а показник k, то приходимо до розвинення в ряд узагальненої функції Фокса:

$$H_{PQ}^{mn}\left(z\left|\begin{matrix}(a_1,A_1)\cdots(a_P,A_P)\\(b_1,B_1)\cdots(b_Q,B_Q)\end{matrix}\right.\right)$$

$$=\Pi\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\frac{\prod\limits_{j=1,j\neq l}^{m}\Gamma\left(b_j-(b_l+k)\frac{B_j}{B_l}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left((1-a_i)+(b_l+k)\frac{A_i}{B_l}\right)}{\prod\limits_{i=n+1}^{P}\Gamma\left(a_i-(b_l+k)\frac{A_i}{B_l}\right)\prod\limits_{j=m+1}^{Q}\Gamma\left((1-b_j)+(b_l+k)\frac{B_j}{B_l}\right)}\ \frac{(-1)^k z^{(b_l+k)/B_l}}{k!B_l}, \tag{A.6}$$

де $B_k(b_j+c)\neq B_j(b_k+d)$ для $j\neq k$, $j\geq 1$, $k\leq n$ та $c,d=0,1,\ldots$ При $z\to 0$ та $z\to\infty$ одержуємо степеневі асимптотики $H\sim z^{b_l/B_l}$ та $H\sim z^{-(1-a_l)/A_l}$ відповідно, де l відповідає мінімальним показникам. Узагальнена функція Фокса зводиться до функції Міттаґа–Леффлєра від оберненого арґументу:

$$E_{\alpha,\beta}(-z)\equiv H_{12}^{11}\left(z\left|\begin{matrix}(0,1)& \\(0,1)&(1-\beta,\alpha)\end{matrix}\right.\right). \tag{A.7}$$

Загалом вона визначається як інверсна трансформанта Мелліна [43]:

$$H_{PQ}^{mn}\left(z\left|\begin{matrix}(a_1,A_1)\cdots(a_P,A_P)\\(b_1,B_1)\cdots(b_Q,B_Q)\end{matrix}\right.\right)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\mathcal{G}}\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+B_js)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-A_is)}{\prod\limits_{i=n+1}^{P}\Gamma(a_i+A_is)\prod\limits_{j=m+1}^{Q}\Gamma(1-b_j-B_js)}z^{-s}ds. \tag{A.8}$$

Контур інтеґрування $\mathcal{G}$ вибираємо так, щоб розділити полюси $\Gamma(1-a_i-A_is)$ та $\Gamma(b_j+B_js)$. Пустий добуток інтерпретуємо як 1. Цілочислові змінні m,n,P,Q задовольняють умови: $0\leq m\leq P$, $0\leq n\leq Q$, коефіцієнти A_i, B_j є додатними, параметри a_i,b_j запобігають ідентичності полюсів у підінтеґральній функції. Інтеґрал (A.8) збігається за умови

$$\Xi=\left(\sum_{i=1}^{m}A_i-\sum_{i=m+1}^{P}A_i\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}B_j-\sum_{j=n+1}^{Q}B_j\right)>0 \tag{A.9}$$

так що функцію H визначаємо в секторі $|\arg z|<(\pi/2)\Xi$. Функцію Фокса обчислюємо також при

$$\Lambda=\sum_{j=1}^{Q}B_j-\sum_{i=1}^{P}A_i>0,\qquad \text{коли}\qquad 0<|z|<\infty, \tag{A.10}$$

або

$$\Lambda=0\qquad\text{та}\qquad 0<|z|<R,\quad R\equiv\prod_{i=1}^{P}A_i^{-A_i}\prod_{j=1}^{Q}B_j^{B_j}. \tag{A.11}$$

Розвинення функції Фокса в ряд (A.6) стає можливим за умови $\Lambda\geq 0$.

B. Дробові інтеґрал та похідна

Будемо виходити з рівняння

$$\int\limits_a^x \mathrm{d}x_1\int\limits_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\, f(x_2)=\int\limits_a^x(x-x')f(x')\,\mathrm{d}x', \tag{B.1}$$

диференціювання якого за x приводить до тотожности. Тоді методом математичної індукції можна довести, що n-кратний інтеґрал зі змінною верхньою границею зводиться до однократного згідно з формулою

$$\int_a^x \mathrm{d}x_1 \int_a^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_a^{x_{n-2}} \mathrm{d}x_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} \mathrm{d}x_n\, f(x_n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-x')^{n-1} f(x')\,\mathrm{d}x', \tag{B.2}$$

де $f(x)$ — довільна функція. При переході від цілого числа n до довільного ϖ факторіял $(n-1)!$ зводиться до гама-функції, і формула (B.2) дає визначення інтеґрала дробового порядку [16], [44]

$$\mathcal{I}_x^{\varpi} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\varpi)} \int_0^x \frac{f(x')}{(x-x')^{1-\varpi}}\,\mathrm{d}x', \quad \varpi > 0. \tag{B.3}$$

Інверсне перетворення дробового інтеґрала $\mathcal{D}_x^{\varpi} \equiv \mathcal{I}_x^{-\varpi}$ порядку $\varpi > 0$ визначаємо як дробову похідну:

$$\mathcal{D}_x^{\varpi} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(-\varpi)} \int_0^x \frac{f(x')}{(x-x')^{1+\varpi}}\,\mathrm{d}x'. \tag{B.4}$$

У ділянці $0 < \varpi < 1$ доцільно застосовувати вираз

$$\mathcal{D}_x^{\varpi} f(x) \equiv \frac{\varpi}{\Gamma(1-\varpi)} \int_0^x \frac{f(x)-f(x')}{(x-x')^{1+\varpi}}\,\mathrm{d}x', \tag{B.5}$$

де враховано відоме співвідношення $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ для $x \equiv -\varpi$.

C. Похідна Джексона

Перевага q-похідної Джексона полягає у зручності її застосування для аналізу самоподібних систем, оскільки ця похідна визначає приріст функції $f(x)$ щодо дилатації $q \neq 1$, а не стосовно зміщення $\mathrm{d}x \to 0$, як у звичайному випадку $q = 1$. Відповідно до такого визначення q-похідна Джексона задається як

$$\mathcal{D}_q f(x) \equiv \frac{f(qx)-f(x)}{q-1}, \quad q > 0. \tag{C.1}$$

Для важливого випадку однорідної функції, що задовольняє умову

$$f(qx) \equiv q^{\alpha} f(x), \tag{C.2}$$

де $q > 0$ — параметр дилатації, $\alpha > 0$ — показник однорідности, q-похідна Джексона зводиться до q-числа Джексона:

$$\mathcal{D}_q f(x) = [\alpha]_q f(x), \quad [\alpha]_q \equiv \frac{\alpha^q - 1}{q-1}. \tag{C.3}$$

Легко бачити, що $[\alpha]_q \to \alpha$ при $q \to 1$, причому $[\alpha]$ змінюється, як $q^{\alpha-1}$ при $q \to \infty$. З одного боку, q-логарифмічну функцію Цалліса

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{q-1}-1}{q-1} \tag{C.4}$$

можна виразити як q-число Джексона (C.3) з показником $\alpha = (q-1)(\ln x/\ln q)$. Разом із рівнянням (C.3) цей зв'язок та рівняння

$$\ln_q(xy) = \ln_q x + \ln_q y + (q-1)(\ln_q x)(\ln_q y) \tag{C.5}$$

дають важливе правило для похідної Джексона:

$$\mathcal{D}_q\left[f(x)g(x)\right] = \left[\mathcal{D}_q f(x)\right] g(x) + f(x)\left[\mathcal{D}_q g(x)\right]$$
$$+(q-1)\left[\mathcal{D}_q f(x)\right]\left[\mathcal{D}_q g(x)\right]. \tag{C.6}$$

Похідну Джексона другого порядку визначаємо так:

$$\mathcal{D}_p \mathcal{D}_q f(x) = \mathcal{D}_p\{[\alpha]_q f(x)\} = [\alpha]_{pq} f(x),$$
$$[\alpha]_{pq} \equiv [\alpha]_p [\alpha]_q + [\delta\alpha]_{pq}, \quad [\alpha]_p \equiv \tfrac{p^{\alpha}-1}{p-1},$$
$$[\delta\alpha]_{pq} \equiv \tfrac{p^{\alpha}[(pq)^{\alpha}-pq]}{(p-1)(pq-1)}. \tag{C.7}$$

При $\alpha > 1$ величина $[\delta\alpha]_{pq}$ має такі асимптотики:

$$[\delta\alpha]_{pq} \to \tfrac{\alpha-1}{p-1} \quad \text{при} \quad p, q \to 1,$$
$$[\delta\alpha]_{pq} \to p^{2(\alpha-1)} q^{(\alpha-1)} \quad \text{при} \quad p, q \to \infty. \tag{C.8}$$

Для узагальнення виразів (B.5), (C.1) введемо дробову ϖ-похідну:

$$\mathcal{D}^{\varpi} f(x) \equiv \frac{\varpi x^{-\varpi}}{\Gamma(1-\varpi)} \int_0^1 \frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)^{1+\varpi}} \, \mathrm{d}q,$$
$$0<\varpi<1. \tag{C.9}$$

Для самоподібної системи функція $f(x)$ є однорідною, тобто задовольняє вираз (C.2). Тоді визначення (C.9) спрощується:

$$\mathcal{D}^{\varpi} f(x) \equiv \{\alpha\}_{\varpi} \, x^{-\varpi} f(x), \quad 0<\varpi<1, \tag{C.10}$$

де дробовим ϖ-числом є

$$\{\alpha\}_{\varpi} \equiv \frac{\varpi}{\Gamma(1-\varpi)} \int_0^1 \frac{1-q^{\alpha}}{(1-q)^{1+\varpi}} \, \mathrm{d}q,$$
$$0<\alpha, \quad 0<\varpi<1. \tag{C.11}$$

Воно може бути виражене в термінах гама-функції:

$$\{\alpha\}_{\varpi} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-\varpi)} - \frac{1}{\Gamma(1-\varpi)}. \tag{C.12}$$

Це число зростає монотонно зі зростанням α та ϖ, набуває нульового значення при $\varpi=0$, $\alpha=0$ та характерних значень $\left\{\frac{1}{2}\right\}_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \simeq 0.322$, $\{1\}_1 = 1$. Така поведінка характеризується такими залежностями

$$\{\alpha\}_{\varpi} = \begin{cases} \alpha & \text{при} \quad \varpi = 1, \\ \Gamma(1+\alpha) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} & \text{при} \quad \varpi = \alpha, \\ \frac{\varpi}{\Gamma(2-\varpi)} & \text{при} \quad \alpha = 1. \end{cases} \tag{C.13}$$

Тому, якщо q-число (C.3) зводиться до показника α у границі $q \to 1$, ϖ-число (C.11), що відповідає дробовому інтеґралові (C.9), зводиться до множника α при $\varpi = 1$.

---

[1] J.-P. Bouchaud, A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1991).
[2] E. W. Montroll, M. F. Shlesinger, in *Studies in Statistical Mechanics*, edited by J. Lebowitz, E. W. Montroll (North-Holland, Amsterdam) **11**, 1 (1984).
[3] W. Schneider, W. Wyss, J. Math. Phys. **25**, 134 (1988).
[4] Е. Федер, *Фракталы* (Мир, Москва, 1991).
[5] Д. О. Харченко, Журн. фіз. досл. **5**, 14 (2001).
[6] В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индуцированные шумом переходы* (Мир, Москва, 1990).
[7] R. Hilfer, Phys. Rev. E **48**, 2466 (1993).
[8] А. И. Олемской, Письма журн. эксп. теор. физ. **71**, 412 (2000).
[9] А. И. Олемской, Письма журн. эксп. теор. физ. **69**, 391 (1999).
[10] R. Rammal, G. Toulouse, M. A. Virasoro, Rev. Mod. Phys. **58**, 765 (1986).
[11] A. I. Olemskoi, in *Physics Reviews*, edited by I. M. Khalatnikov (Gordon & Breach, London) **18**, Part 1 (1996).
[12] C. Tsallis, in *Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications, Lecture Notes in Physics*, edited by S. Abe, Y. Okamoto (Springer-Verlag, Berlin, 2000).
[13] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика* (Наука, Москва, 1978).
[14] D. H. Zanette, Braz. J. Phys. **29**, 108 (1999); cond-mat/9905064 (1999).
[15] Р. Р. Нигматуллин, Теор. мат. физ. **90**, 354 (1992).
[16] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives — theory and applications* (Gordon and Breach, New-York, 1993).
[17] Д. Форстер, *Гидродинамические флуктуации, нарушенная симметрия и корреляционнie функции* (Москва, Атомиздат, 1980).
[18] Д. Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика* (Москва, Наука, 1971).
[19] А. И. Олемской, А. Я. Флат, Усп. физ. наук **163**, 1 (1993).
[20] У d-вимірному випадку друга складова рівняння (128) замінюється на суму складових, що відповідають масштабові l_i, фрактальній вимірності D_i, параметрові подібності ξ_i та сталим α_i при $i=1,\ldots,d$.
[21] В. Е. Захаров, С. Ф. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи* (Москва, Наука, 1980).
[22] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике* (Москва, Физматгиз, 1983).
[23] A. I. Olemskoi, V. F. Klepikov, Phys. Rep. **338**, 571 (2000).
[24] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1994).
[25] A. S. Mikhailov, A. Yu. Loskutov, *Foundations in Synergretics II* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996).
[26] А. И. Олемской, Д. О. Харченко, Физ. тверд. тела **42**, 520 (2000).
[27] A. I. Olemskoi, Physica A, **295**, 409 (2001).
[28] Дж. Николис, *Динамика иерархически соподчиненных систем: Эволюционное представление* (Мир, Москва, 1989).
[29] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика. Ч. 2* (Наука, Москва, 1978).
[30] Для доведення формули (139) розгляньмо одновимірний випадок, у якому ґрадієнт величини x_k подано двома дискретними різницями: $\nabla_+ x_k \equiv x_{k+1} - x_k$ та $\nabla_- x_k \equiv x_k - x_{k-1}$. Очевидно, що перша з них визначає швидкість зміни функції x_k при збільшенні індексу k, а друга — при зменшенні. Будучи симетричним, лапласіян дорівнює добуткові цих операцій: $\nabla^2 \equiv \nabla_+ \nabla_-$. У результаті одержуємо вираз $\sum_j D_{kj} x_j = (x_{k+1} + x_{k-1}) - 2x_k$, який зводиться до символічного запису (139) при $d=1$. Узагальнення для довільної вимірности є очевидним.
[31] А. И. Олемской, Усп. физ. наук **168**, 287 (1998).

[32] Д. О. Харченко, Журн. фіз. досл. **3**, 415 (1999).
[33] M. S. Miguel, R. Toral, cond-mat/9707147 (1997).
[34] А. В. Солдатов, Теор. мат. физ. **85**, 288 (1990).
[35] Д. О. Харченко, Журн. фіз. досл. **3**, 37 (1999).
[36] P. Jung, P. Hängi. Phys. Rev. A **35**, 4464 (1987).
[37] F. Castro, H. S. Wio, G. Abramson, Phys. Rev. E **52**, 159 (1995).
[38] S. E. Mangioni, R. R. Deza, R. Toral, H. S. Wio, Phys. Rev. E **61**, 223 (2000).
[39] D. O. Kharchenko, Physica A **308**, 101 (2002).
[40] V. E. Shapiro, Phys. Rev. E **48**, 109 (1993).
[41] Д. О. Харченко, Укр. фіз. журн **44**, 647 (1999).
[42] A. I. Olemskoi, A. D. Kiselev, Phys. Lett. A **247**, 221 (1998).
[43] A. Prudnikov, Y. Brychkov, and O. Marichev, *Inegrals and series. V. 3* (Gordon and Breach, New York, 1990).
[44] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics* (Ed. World Scientific, Singapore, 2000).

THEORY OF SELF-SIMILAR STOCHASTIC SYSTEMS (PART I)

A. I. Olemskoi, D. O. Kharchenko
Sumy State University
2 Rimskiy-Korsakov Str., Sumy, UA–40007, Ukraine

The work is based on the use of the power-law asymptotics for the distribution function of self-similar systems. Starting from the obvious presentations we consider an anomalous nature of the particle walks, field representation of the stochastic process and time dependencies of most probable values and moments of stochastic variable. According to the equation for the distribution function a difference between main types of the particle walks (Brownian diffusion, Levy flights, subdiffusion) is explained. It is shown that the type of the motion is defined by the spatio–temporal distribution of intensity of the particle jump: if it takes an analytical form we have the ordinary diffusion in the case of nonanalytical dependence in the space we come to the Levy flights and nonanalitycal temporal dependence means the subdiffusion process. In the first case the distribution function acquires a power-law multiplier with respect to the coordinate, and power-law multiplier with respect to time in the second one. The relations between the dynamical exponent and indexes of the Levy flight and the subdiffusion as well as between fractal dimension and multiplicative noise exponent are defined. We show that the diffusion in the ultrametric space is defined with the help of the Fokker–Planck equation defined through the Jekson derivative. It is explained that the multiplicative noise breaks an additivity of the hierarchical system and mupltiplicativity of the probabilities. We find the general type of the fractional order motion equation, which in the limited cases are reduced to the wave equation, oscillating and transporting equation, Landau–Khalatnikov equation for conserved and nonconserved order parameter, Poisson equation and Debye's screening equation. In the nonlinear case it reduced to the Korteweg–de Wrize, sin-Gordon and a nonlinear Schrödinger equations. We show that the distribution function is defined by the exponential dependence with the exponent which is reduced to the standard action in the Euclidean field theory. For the white and coloured multiplicative noises the evolution of the more probable values of the stochastic variable and conjugate momentum is explored. We found that changing of the multiplicative noise exponent the system tests the reversible transition from the ordered state to disordered one and back. Form the Lagrangian and dissipative function, which are invariant with respect to the similarity transformations, the field equations are obtained.