ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 6, № 3 (2002) с. 305–309

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 6, No. 3 (2002) p. 305–309

РІВНЯННЯ ДИФРАКЦІЇ СВІТЛА ТМ-ПОЛЯРИЗАЦІЇ НА ПЕРІОДИЧНИХ НЕПОГЛИНАЮЧИХ СЕРЕДОВИЩАХ

В. М. Фітьо
Національний університет “Львівська політехніка”,
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

(Отримано 21 листопада 2001 р.; в остаточному вигляді — 25 квітня 2002 р.)

На основі рівнянь Максвелла отримано лінійну систему диференціяльних рівнянь з постійними коефіцієнтами, яка описує дифракцію світла ТМ-поляризації на періодичних непоглинаючих середовищах. Електромагнетне поле в об'ємі періодичної структури зображено як суму плоских хвиль з коефіцієнтами, що залежать від координат. Отримано умови кутів дифракції пучків різних порядків. За допомогою єдиного параметра зведено системи диференціяльних рівнянь для ТМ і ТЕ-поляризацій до спільного вигляду.

Ключові слова: дифракція, ТМ-поляризація, періодична структура, об'ємна ґратка.

PACS number(s): 42.25.Fx; 42.25.Pa

I. ВСТУП

Розглядові поширення когерентного світла через періодичні структури (об'ємні голограми, акустооптичні пристрої, ґратки на оптичних волокнах, інтерференційні дзеркала) присвячено багато теоретичних та експериментальних праць [1–4]. Основні теорії, що описують поширення світла в періодичних структурах, проаналізовано в монографії [1]. Проте в цій книзі розглянута лише дифракція оптичних хвиль ТЕ-поляризації. Узагальнення теорії дифракції для ТЕ-поляризації і строгий її розбір зроблено в [5]. У цій праці з використанням скалярного хвильового рівняння й теорії Матьє електромагнетне поле розкладено за модами й отримано лінійну систему диференціяльних рівнянь другого порядку. Формальний, не зовсім вдалий вибір змінних цих рівнянь надмірно ускладнив їх. Традиційний підхід до розгляду поширення електромагнетної хвилі ТМ-поляризація спричиняє необхідність використати для опису поля на ґратці хвильове рівняння щодо напружености магнетного поля, а не рівняння щодо напружености електричного поля [5,6]. Метод зв'язаних хвиль у цьому разі приводить до ще складнішої системи рівнянь, ніж для ТЕ-поляризації, які отримано в [5], тому що в них з'являється зв'язок не тільки між сусідніми порядками дифракції, а взагалі між усіма аналізованими порядками. На наш погляд, найпростіший і найпослідовніший метод отримання диференціяльних рівнянь, що описують поширення світла для ТЕ-поляризації в різноманітних періодичних структурах, викладено в [2]. За його допомогою отримано систему диференціяльних рівнянь другого порядку [7] для ТЕ-хвиль, яка, завдяки цілком природному й вдалому вибору змінних, є лінійною з постійними комплексними (у загальному випадку) коефіцієнтами і простішою, ніж система рівнянь в [5]. Аналіз дифракції за допомогою цих рівнянь для ТЕ-поляризації на товстих і тонких [7,8] голограмах при наближених і точних початкових умовах показав їхню ефективність. Одночасно метод, запропонований у [2] і розвинений у [7], має можливості для отримання системи диференціяльних рівнянь другого порядку щодо напружености електричного поля ТМ-поляризації. Тому метою цієї роботи є одержати систему лінійних диференціяльних рівнянь, що описують поширення оптичної хвилі ТМ-поляризації щодо напружености електричного поля в періодичних середовищах, на основі рівнянь Максвелла, а також зведення системи рівнянь для обох поляризацій за допомогою певного параметра до єдиного вигляду. Така узагальнена система рівнянь для обох поляризацій матиме практичне значення при числовому методі аналізу дифракції. У цьому разі потрібно мати лише одну програму для розрахунку дифракції обох поляризацій. А вибір поляризації буде визначатися одним певним параметром.

II. СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІЯЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПОШИРЕННЯ ОПТИЧНИХ ХВИЛЬ ТМ-ПОЛЯРИЗАЦІЇ В ПЕРІОДИЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Допустимо, що в діелектричному середовищі вздовж певного напрямку діелектрична проникливість міняється відповідно до формули:

$$\varepsilon(x,z) = \begin{cases} \varepsilon_1; & -\infty < z < 0,\ -\infty < x < \infty, \\ \varepsilon_{20} + \tilde{\varepsilon}\cos(K_z z + K_x x); & 0 < z < T,\ -\infty < x < \infty, \\ \varepsilon_3; & T < z < \infty,\ -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{1}$$

де ε_1 і ε_3 — відповідно діелектричні сталі першого і третього середовищ, ε_{20} — постійна складова діелектричної сталої середовища ґратки, $\tilde{\varepsilon}$ — амплітуда змінної складової діелектричної сталої середовища ґратки, K_x — проекція оберненого вектора просторової ґратки на вісь OX, K_z — проекція оберненого вектора на вісь OZ. Причому модуль вектора K зв'язаний з періодом ґратки таким відношенням: $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$.

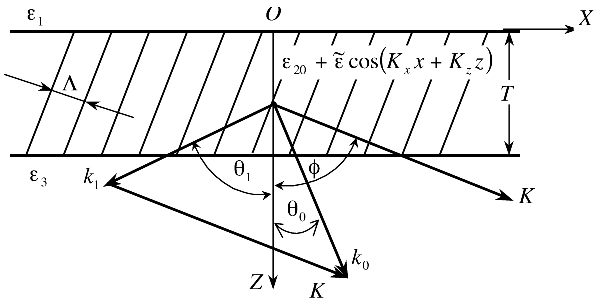

Рис. 1. Схематичне зображення падаючої й дифрагованої плоских хвиль та періодичної об'ємної ґратки. T — товщина ґратки в напрямку оси Z.

На рис. 1 наведено схематичне зображення недифрагованої й дифрагованої плоских хвиль та періодичної об'ємної ґратки. Недифрагована плоска хвиля з хвильовим вектором k_0 поширюється під кутом θ_0 до оси OZ, а дифрагована хвиля поширюється в перший порядок під кутом θ_1. Вектор K направлений під кутом ϕ до оси OZ. Уведемо систему таких позначень:

$$n_{20} = \sqrt{\varepsilon_{20}},\ \tilde{n} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\sqrt{\varepsilon_{20}}},\ k^2 = k_i^2 = \left(\frac{2\pi n_{20}}{\lambda}\right)^2.$$

Рівняння, що описують поширення ТМ-хвиль (напруженість електричного поля лежить у площині поширення та дифракції оптичної хвилі) через періодичне середовище, можна отримати із системи рівнянь, які наведені в [9] і мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{E} = j\frac{\omega}{c}\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = -j\varepsilon_2\frac{\omega}{c}\mathbf{E}, \end{cases} \tag{2}$$

де ε_2 міняється вздовж певного напрямку відповідно до формули (1).

На основі системи рівнянь (2) можемо написати рівняння другого порядку таким чином:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \varepsilon_2\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}. \tag{3}$$

Розв'язок рівняння (3) будемо шукати у вигляді суперпозиції плоских хвиль з коефіцієнтами $A_i(z)$, які залежать від z, як у [2], але запишемо $\mathbf{E}(x,z)$ як суму векторів:

$$\mathbf{E}(x,z) = \sum_i(\mathbf{l}\cos\theta_i - \mathbf{n}\sin\theta_i)A_i(z)E_i \times \exp[-j(k_{i,x}x + k_{i,z}z)], \tag{4}$$

де $(\mathbf{l}\cos\theta_i - \mathbf{n}\sin\theta_i)E_i\exp[-j(k_{i,x}x + k_{i,z}z)]$ є розв'язком хвильового рівняння (3) у вигляді плоскої хвилі при $\tilde{n} = 0$, яка відповідає i-вому порядку дифракції та поширюється під кутом θ_i; $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$ — одиничні вектори, які направлені відповідно вздовж осей OX, OZ; $k_{i,x} = k\sin\theta_i$, $k_{i,z} = k\cos\theta_i$.

Амплітуда E_i визначається з умови нормування [2,7]:

$$\lim_{a\to\infty,\ b\to\infty}\frac{1}{4ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}|E_i|^2|\cos\theta_i|dxdy = 1, \tag{5}$$

звідки

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{|\cos\theta_i|}}. \tag{6}$$

Отже, розв'язок рівняння (3) можна записати так:

$$\mathbf{E}(x,z) = \sum_i(\mathbf{l}\cos\theta_i - \mathbf{n}\sin\theta_i)A_i(z) \times \frac{\exp[-j(k_{i,x}x + k_{i,z}z)]}{\sqrt{|\cos\theta_i|}}. \tag{7}$$

Узявши rot від $\mathbf{E}(x,z)$, що описується виразом (7), будемо мати:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(x,z) = \mathbf{m}\sum_i\left(\cos\theta_i\frac{dA_i}{dz} - jkA_i\right) \times \frac{\exp[-j(k_{i,x}x + k_{i,z}z)]}{\sqrt{|\cos\theta_i|}}, \tag{8}$$

де $\mathbf{m}$ — одиничний вектор уздовж оси OY. Виконаймо знову операцію rot від правої та лівої частини рівности (8), унаслідок чого отримаємо такий вираз:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}(x,z) = \sum_i\left\{\mathbf{l}\left[-\frac{d^2A_i}{dz^2}\cos\theta_i + jk\frac{dA_i}{dz}(1+\cos^2\theta_i) + k^2A_i\cos\theta_i\right]\right.$$

$$+\mathbf{n}\left[-jk\frac{dA_i}{dz}\cos\theta_i\sin\theta_i - k^2A_i\sin\theta_i\right]\Bigg\}\frac{\exp[-j(k_{i,x}x+k_{i,z}z)]}{\sqrt{|\cos\theta_i|}}. \tag{9}$$

Праву частину рівняння (3) можна записати так:

$$\varepsilon_2\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}(x,z)=\sum_i(\mathbf{l}\cos\theta_i-\mathbf{n}\sin\theta_i)\frac{\exp[-j(k_{i,x}x+k_{i,z}z)]}{\sqrt{|\cos\theta_i|}}A_i$$

$$\times\left\{\varepsilon_{20}\frac{\omega^2}{c^2}+\tilde{\varepsilon}\frac{\omega^2}{2c^2}\{\exp[j(K_xx+K_zz)]+\exp[-j(K_xx+K_zz)]\}\right\}. \tag{10}$$

Прирівнявши праві частини рівнянь (9) і (10) та скоротивши подібні члени (потрібно врахувати, що $\varepsilon_{20}\frac{\omega^2}{c^2}=k^2$), отримаємо такий вираз:

$$\sum_i\left\{\mathbf{l}\left[\frac{d^2A_i}{dz^2}\cos^2\theta_i-jk\frac{dA_i}{dz}(1+\cos^2\theta_i)\right]+\mathbf{n}\left(jk\frac{dA_i}{dz}\cos\theta_i\sin\theta_i\right)\right.$$

$$\left.+\tilde{\varepsilon}\frac{\omega^2}{2c^2}\{\exp[j(K_xx+K_zz)]+\exp[-j(K_xx+K_zz)]\}A_i(\mathbf{l}\cos\theta_i-\mathbf{n}\sin(\theta_i)\right\}\frac{\exp[-j(k_{i,x}x+k_{i,z}z)]}{\sqrt{|\cos\theta_i|}}=0. \tag{11}$$

Помноживши рівняння (11) скалярно на $(\mathbf{l}\cos\theta_i-\mathbf{n}\sin\theta_i)\frac{\exp[j(k_{i,x}x+k_{i,z}z)]}{\sqrt{|\cos\theta_i|}}\cos\theta_i$ і проінтеґрувавши в площині xy для всіх i за правилом (5), отримаємо такий вираз:

$$\frac{d^2A_i}{dz}\cos^2\theta_i-2jk_{i,z}\frac{dA_i}{dz}+a\cos(\theta_i-\theta_{i-1})\sqrt{\frac{|\cos\theta_i|}{|\cos\theta_{i-1})}}A_{i-1}\exp(j\Delta_{i+}z)$$

$$+a\cos(\theta_i-\theta_{i+1})\sqrt{\frac{|\cos\theta_i|}{|\cos\theta_{i+1}|}}A_{i+1}\exp(-j\Delta_{i-}z)=0, \tag{12}$$

де $a=k^2\frac{\tilde{n}}{n_{20}}$, $\Delta_{i+}=K_z+k_{i,z}-k_{i-1,z}$, $\Delta_{i-}=K_z-k_{i,z}+k_{i+1,z}$. Отже, ми одержали систему рівнянь, що описує дифракцію ТМ-хвиль на об'ємних непоглинаючих ґратках, яка подібна до системи рівнянь, отриманої в [7] для ТЕ-поляризації, і є лінійною системою диференціяльних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Система рівнянь (12) відповідає рівнянню (11) лише при виконанні такої умови:

$$K_x+k_{i,x}-k_{i-1,x}=0. \tag{13}$$

Згідно з цією умовою визначаємо напрямки дифракції (кути дифракції θ_i) як на товстих, так і на тонких ґратках. Знаючи $k_{0,x}$ (яке визначається напрямком недифрагованої хвилі), за формулою (13) можна визначити $k_{\pm1,x}$, потім $k_{\pm2,x}$ і т. д. За $k_{i,x}$ можна розрахувати $k_{i,z}$ відповідно до формули $k_{i,z}=\sqrt{k^2-k_{i,x}^2}$. Таким чином, у системі рівнянь (12) визначаємо всі величини. Результати експериментальної перевірки умови (13) для об'ємної фазової голограми товщиною 18 мкм наведено в [7]. Кути дифракції лазерного пучка вимірювали з точністю 6 кутових хвилин. Експериментально зняті точки відповідають формулі (13) у межах похибки кутових вимірювань.

Якщо $\tilde{n}\ll1$, для розрахунків дифракції на товстих голограмах можна використати параболічне наближення [2], при якому нехтують другою похідною в рівнянні (12). Така система рівнянь матиме вигляд:

$$\frac{dA_i}{dz}+j\frac{a}{2k_{i,z}}\cos(\theta_i-\theta_{i-1})\sqrt{\frac{|\cos\theta_i|}{|\cos\theta_{i-1}|}}A_{i-1}\exp(j\Delta_{i+}z)$$

$$+j\frac{a}{2k_{i,z}}\cos(\theta_i-\theta_{i+1})\sqrt{\frac{|\cos\theta_i|}{|\cos\theta_{i+1}|}}A_{i+1}\exp(-j\Delta_{i-}z)=0. \tag{14}$$

Системи рівнянь (12) і (14), які є лінійними із змінними коефіцієнтами, можна перетворити в лінійні системи з постійними коефіцієнтами шляхом заміни змінних:

$$A_i(z)=B_i(z)\exp(j\Delta_i z), \tag{15}$$

де $\Delta_i=iK_z+k_{i,z}$.

При такій заміні змінних система (12) матиме вигляд:

$$\begin{gathered}\frac{d^2B_i}{dz^2}\cos^2\theta_i-2j\left(k_{i,z}\sin^2\theta_i-iK_z\cos^2\theta_i\right)\frac{dB_i}{dz}\\+\left(k_{i,z}^2+k_{i,z}^2\sin^2\theta_i+2ik_{i,z}K_z\sin^2\theta_i-i^2K_z^2\cos^2\theta_i\right)B_i\\+a\cos(\theta_i-\theta_{i-1})\sqrt{\frac{|\cos\theta_i|}{|\cos\theta_{i-1}|}}B_{i-1}+a\cos(\theta_i-\theta_{i+1})\sqrt{\frac{|\cos\theta_i|}{|\cos\theta_{i+1}|}}B_{i+1}=0.\end{gathered} \tag{16}$$

Систему (14) у параболічному наближенні, зробивши заміну змінних згідно з формулою (15), запишемо так:

$$\begin{gathered}\frac{dB_i}{dz}+j(iK_z+k_{i,z})B_i+j\frac{a}{2k_{i,z}}\cos(\theta_i-\theta_{i-1})\sqrt{\frac{|\cos\theta_i|}{|\cos\theta_{i-1}|}}B_{i-1}+\\j\frac{a}{2k_{i,z}}\cos(\theta_i-\theta_{i+1})\sqrt{\frac{|\cos\theta_i|}{|\cos\theta_{i+1}|}}B_{i+1}=0.\end{gathered} \tag{17}$$

Для симетричних (прямих) об'ємних ґраток ($K_z=0$) на основі (16) отримаємо систему диференціальних рівнянь, яка є дещо простішою:

$$\begin{gathered}\frac{d^2B_i}{dz^2}\cos^2\theta_i-2jk_{i,z}\sin^2\theta_i\frac{dB_i}{dz}+k_{i,z}^2(1+\sin^2\theta_i)B_i\\+a\cos(\theta_i-\theta_{i-1})\sqrt{\frac{|\cos\theta_i|}{|\cos\theta_{i-1}|}}B_{i-1}+a\cos(\theta_i-\theta_{i+1})\sqrt{\frac{|\cos\theta_i|}{|\cos\theta_{i+1}|}}B_{i+1}=0.\end{gathered} \tag{18}$$

Систему рівнянь (16) й аналогічну систему рівнянь, що отримана для ТЕ-поляризації у праці [7], можна об'єднати, ввівши параметр s у цю систему як множник перед кутом θ_i, який може приймати значення: одиниця для ТМ-поляризації і нуль для ТЕ-поляризації. Відповідне рівняння з параметром s має вигляд:

$$\begin{gathered}\frac{d^2B_i}{dz^2}\cos^2(s\theta_i)-2j\left[k_{i,z}\sin^2(s\theta_i)-iK_z\cos^2(s\theta_i)\right]\frac{dB_i}{dz}\\+\left[k_{i,z}^2+k_{i,z}^2\sin^2(s\theta_i)+2ik_{i,z}K_z\sin^2(s\theta_i)-i^2K_z^2\cos^2(s\theta_i)\right]B_i\\+a\cos[s(\theta_i-\theta_{i-1})]\sqrt{\frac{|\cos\theta_i|}{|\cos\theta_{i-1}|}}B_{i-1}+a\cos[s(\theta_i-\theta_{i+1})]\sqrt{\frac{|\cos\theta_i|}{|\cos(\theta_{i+1})|}}B_{i+1}=0.\end{gathered} \tag{19}$$

III. ВИСНОВКИ

Отже, ми отримали системи (16)–(18) диференціяльних рівнянь, що описують дифракцію плоских ТМ-хвиль на об'ємних ґратках. Ці системи є також лінійними з постійними коефіцієнтами, але відповідні коефіцієнти відрізняються від коефіцієнтів системи для ТЕ-хвиль і є дещо складнішими за виразами. Вони передбачають відомий експериментальний факт: коли для якоїсь із двох зв'язаних хвиль $\theta_i - \theta_{i-1} = \frac{\pi}{2}$, то відповідний коефіцієнт зв'язку між хвилями дорівнює нулеві, тобто вони між собою не взаємодіють. Параметр s у (19) дозволяє описати дифракцію світла на періодичних середовищах одною системою диференціяльних рівнянь: $s = 1$ для ТМ-поляризації і $s = 0$ для ТЕ-поляризації.

[1] L. Solymar, D. J. Cooke, *Volume Holography and Volume Gratings* (Academic Press, Department of Engineering Science University of Oxford, Oxford, 1981).

[2] А. Ярив, П. Юх, *Оптические волны в кристаллах* (Мир, Москва, 1987).

[3] V. Mizrahi, P. J. Lemaire, T. Erdogan, W. A. Reed, D. J. DiGiovanni, R. M. Atkins, Appl. Phys. Lett. **13**, 1727 (1993).

[4] S. Yu. Lebid, Ya. V. Bobitski, V. M. Fitio, T. V. Fityo, Proc. SPIE **3291**, 165 (1998).

[5] Т. К. Гейлорд, М. Г. Мохарам, ТИИЭР **73**, 53 (1985).

[6] M. G. Moharam, T. K. Gaylord. J. Opt. Soc. Amer. **73**, 451 (1983).

[7] V. M. Fitio, Proc. SPIE **4148**, 34 (2000).

[8] В. М. Фітьо, Я. В. Бобицький, Т. В. Фітьо, Укр. фіз. журн. **46**, 1032 (2001).

[9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред* (Наука, Москва, 1982).

EQUATIONS OF DIFFRACTION OF LIGHT WITH TM-POLARISATION ON PERIODICAL NONABSORBAL MEDIUMS

V. M. Fitio

National University "Lvivska Polytechnica",
12 Bandera Str., Lviv, UA-79013, Ukraine,
e-mail: polyana@polynet.lviv.ua

A linear system of differential equations with constant coefficients which describes diffraction of light with TM-polarisations on periodical nonabsorbal mediums was obtained on the basis of Maxwell's equations. The electromagnetic field in a periodic structure volume is represented as a sum of plane waves with coefficients which depend on coordinates. Conditions of diffraction angles of different orders beams have been obtained. Systems of differential equations for TM and TE polarisations have been brought together.