ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 6, № 4 (2002) с. 365–367

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 6, No. 4 (2002) p. 365–367

ЕФЕКТИВНА ДІЯ ДЛЯ СФЕРИЧНОЇ ПИЛОВОЇ ОБОЛОНКИ В ЗАГАЛЬНІЙ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТИ

В. Д. Гладуш
Дніпропетровський національний університет
вул. Наукова, 13, Дніпропетровськ, 49050, Україна

(Отримано 5 серпня 2002 р.; в остаточному вигляді — 6 вересня 2002 р.)

Побудовано ефективну дію і варіяційний принцип для сферичної пилової оболонки в ґравітаційному полі.

Ключові слова: оболонка, варіяційний принцип, ефективна дія.

PACS number(s): 04.20.Fy, 04.40.–b, 04.90.+e

Сферично-симетрична пилова оболонка є однією з найпростіших і популярних моделей колапсуючих конфіґурацій. Варіяційний принцип для сферично-симетричної пилової оболонки обговорено в [1]. Загальний лаґранжів підхід до теорії пилових оболонок у ЗТВ розвинуто в [2]. У цій праці збудована ефективна дія і варіяційний принцип для сферичної пилової оболонки у загальній теорії відносности (ЗТВ). Цей випадок має деякі особливості порівняно із загальним розглядом.

Нехай Σ — сферично-симетрична тонка пилова оболонка з поверхневою щільністю пилу σ, яка відокремлює внутрішню ділянку D_- від зовнішньої D_+. Ґравітаційні поля в $D_\pm$ у загальному випадку описуються метриками

$$\begin{aligned} {}^{(4)}ds^2_\pm &= {}^{(2)}ds^2_\pm - r^2 d\sigma^2 \\ &= \gamma^\pm_{ab} dx^a_\pm dx^b_\pm - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\alpha^2)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\gamma^\pm_{ab}$ і r — функції від $x^a_\pm$ $(a, b = 0, 1)$. Запровадимо в $D_\pm$ спільні координати x^a і метрики $\gamma^\pm_{ab}$ так, щоб $\gamma^-_{ab}|_\Sigma = \gamma^+_{ab}|_\Sigma = \gamma_{ab}$. Тоді ${}^{(2)}ds_\pm|_\Sigma \equiv ds$ і світова лінія γ оболонки задається рівнянням $x^a = x^a(s)$. Нехай $u^a = dx^a/ds$ — швидкість пилу, n^a — зовнішня нормаль до оболонки Σ. Повна дія для конфіґурації має вигляд

$$I_{\rm tot} = I_{\rm EH} + I_{\partial D} + I_\Sigma + I_m + I_0\,, \tag{2}$$

$$I_{\rm EH} = -\frac{c}{2\chi} \int\limits_{D_-\cup D_+} \sqrt{-g}\ {}^{(4)}R\, d^2x \wedge d\theta \wedge d\alpha\,. \tag{3}$$

де $I_{\rm EH}$ — дія Айнштайна–Гільберта, c — швидкість світла, k — ґравітаційна стала, $\chi = 8\pi k/c^2$, $g = \gamma r^4 \sin^2\theta$, $\gamma = \det|\gamma_{ab}|$. Скалярна кривина є такою:

$${}^{(4)}R = {}^{(2)}R - 4r^{-1}\, r^{;a}_{\ ;a} - 2r^{-2} r^{,a} r_{,a} - 2r^{-2}\,, \tag{4}$$

$${}^{(2)}R = 2V^a_{\ ;a}\,, \qquad V^a = n^b_{\ ;b} n^a - u^b_{\ ;b} u^a\,. \tag{5}$$

де "${}_{;a}$" і "${}_{,a}$" — коваріянтна (щодо метрики γ_{ab}) і часткова похідні по x^a, ${}^{(2)}R$ — скалярна кривина, яка у двовимірному просторі зводиться до диверґенції. Відзначимо, що, крім цього, є ще й інші особливості двовимірного простору, який виникає тут після вимірної редукції теорії. Так, виконується ланцюжок рівностей: $n_a V^a = -n^a_{\ ;a} = S = n_a u^a_{\ ;b} u^b = n_a f^a$, де S — слід тензора зовнішньої кривини Σ, а $f^a = u^a_{\ ;b} u^b$ — вектор прискорення оболонки. Усе це змушує нас переглянути чотиривимірний підхід, розроблений у [2].

Пил на синґулярній оболонці Σ описується дією

$$I_m = c \int\limits_\Sigma \sigma \sqrt{-g} d\Sigma \wedge d\theta \wedge d\alpha\,. \tag{6}$$

Тут $d\Sigma = -n^a d\Sigma_a$, $dx^a \wedge d\Sigma_b = \delta^a_b d^2x$, $\sqrt{-\gamma} d^2x = \sqrt{-\gamma}\eta \wedge d\Sigma = \omega \wedge \eta$, $\eta = n_a dx^a$, $\omega = u_a dx^a = -\sqrt{-\gamma} d\Sigma$. Після інтеґрування за кутами маємо

$$\begin{aligned} I_{EH} = -\frac{c^3}{4k} \int\limits_{D_-\cup D_+} & \sqrt{-\gamma}\big(r^2\ {}^{(2)}R - 4r\Delta r \\ & - 2(\nabla r)^2 - 2\big) d^2x\,, \end{aligned} \tag{7}$$

$$I_m = -mc \int\limits_\gamma \omega\,, \tag{8}$$

де $m = 4\pi\sigma r^2$ — маса оболонки. Третій член у виразі для повної дії (2)

$$I_\Sigma = \frac{c^3}{2k} \int\limits_\gamma r[r n_a V^a - 2r']\omega \tag{9}$$

необхідний для узгодження варіяційного принципу з крайовою задачею рівнянь Лаґранжа–Ейлера [3]. У виразі (9) $[A] = A|_+ - A|_-$ — стрибок A на Σ, $A|_\pm$ — це граничні значення A при наближенні до Σ ззовні чи зсередини. Четвертий доданок у (2)

$$I_{\partial D} = \frac{c^3}{2k} \oint\limits_{\partial D} r\sqrt{-\gamma}\,(rV^a - 2r^{,a})\,d\Sigma_a \tag{10}$$

потрібен для фіксування метрики на границі D, I_0 — для нормування дії.

Повну дію (2) можна переписати в компактнішій та очевиднішій формі

$$I_{\rm tot} = I_g + I_m + I_0\,, \tag{11}$$

$$I_g = \int\limits_{D_-\cup D_+} L_g d^2x \tag{12}$$

$$= \frac{c^3}{2k} \int\limits_{D_-\cup D_+} \sqrt{-\gamma}\,(2rr_{,a}V^a - r_{,a}r^{,a} + 1)\,d^2x\,,$$

де I_g — ґравітаційна дія першого порядку. Далі $\delta I_m = -mc\int\delta\omega = -mc\int\delta\omega_\gamma$. Значок “ $_{|\gamma}$” позначає обмеження 1-форми на лінію оболонки γ так, що

$$\delta\omega_{|\gamma} = \delta\ {}^{(2)}ds = \frac{1}{2}u^a u^b\ {}^{(2)}ds\ \delta\gamma_{ab}$$

$$= -\frac{1}{2}u_a u_b \omega_{|\gamma}\ \delta\gamma^{ab} = -u_a\omega_{|\gamma}\delta u^a\,. \tag{13}$$

Вимога $\delta I_{\rm tot} = 0$ приводить до об'ємних

$$\dot r' - r'u^b_{;b} = 0\,,\quad \acute r - \dot r n^b_{;b} = 0\,, \tag{14}$$

$$2r\ddot r - 2rr'n^b_{;b} + \dot r^2 - r'^2 + 1 = 0\,, \tag{15}$$

$$2r\acute r' - 2r\dot r u^b_{;b} - \dot r^2 + r'^2 - 1 = 0\,, \tag{16}$$

$$rV^a_{;a} - \Delta r = 0 \tag{17}$$

і поверхневих рівнянь

$$[r'] = r[S] = r[n_a f^a]\,,\qquad c^2r[r'] + km = 0\ , \tag{18}$$

де $\dot r = r_{,a}u^a$, $r' = r_{,a}n^a$. Нехай кожна точка $p\in\Sigma$ зсувається на $\delta x^a(p) = n^a\delta\lambda(p)$ так, що $\Sigma\to\tilde\Sigma$, $D_\pm\to\tilde D_\pm$. При нескінченно малому нормальному зсуві Σ маємо

$$\delta I_{\rm tot} = -\int\limits_{\delta D_-} \left(L_g^+ - L_g^-\right) d^2x$$

$$= -\int\limits_\Sigma [L_g]\delta x^a d\Sigma_a = \int\limits_\Sigma [L_g]\delta\lambda d\Sigma\,. \tag{19}$$

Ураховуючи вимогу $\delta I_{\rm tot} = 0$, знаходимо $[L_g] = -(c^3/2\gamma)\sqrt{-\gamma}\ [2rr'S - r'^2] = 0$. Формули вигляду $[AB] = \bar A\,[B] + \bar B\,[A]$ дають $r\bar r'\,[S] + r[r']\bar S - r\bar r'\,[r'] = 0$ або

$$\bar S \equiv (S_{|+} + S_{|-})/2 = n_a\bar f^a = 0\,. \tag{20}$$

Співвідношення (18) і (20) утворюють повний набір крайових алґебраїчних умов чи в'язів. Зокрема звідси випливають співвідношення

$$S_\pm = n^a u_{a;b}u^b|_\pm = n^a\frac{Du_a}{ds}\bigg|_\pm = \mp\frac{km}{2c^2r^2}\,. \tag{21}$$

Обчислімо $I_{\rm tot}$ на рівняннях (14)–(16) і (17) і в'язях (18) і (20). Це дає

$$I_{\rm tot} = J_{\rm sh} + I_{\partial D} + I_0$$

$$J_{\rm sh} = I_\Sigma - mc\int\limits_\gamma \omega = -\frac{1}{2}\,mc\int\limits_\gamma \omega\,, \tag{22}$$

де $J_{\rm sh}$ — редукована дія для оболонки. Варіяція $\omega^\pm_{|\gamma}$ щодо $x^a_\pm$ має вигляд

$$\delta\omega^\pm_{|\gamma} = \delta\,{}^{(2)}ds_\pm = -(u_{a;\,b}u^b\delta x^{a\ (2)}ds)_\pm + d(u_a\delta x^a)_\pm\,. \tag{23}$$

Звідси одержуємо співвідношення $(\delta\,{}^{(2)}ds - n^c u_{c;\,b}u^b n_a\delta x^{a\ (2)}ds)_\pm = d(u_a\delta x^a)_\pm$, або $(\delta\,{}^{(2)}ds \pm (km/2c^2r^2)n_a\delta x^{a\ (2)}ds)_\pm = d(u_a\delta x^a)_\pm$. З умов $u_a u^a = -n_a n^a = 1$ і $u_a n^a{}_{|\pm} = 0$ знаходимо $n_0^\pm = \sqrt{-\gamma}\ u^1_\pm$, $n_1^\pm = -\sqrt{-\gamma}\ u^0_\pm$. Із цього випливає, що

$$(n_a\delta x^a ds)_{|\pm} = \{\sqrt{-\gamma}\ (u^1\delta x^0 - u^0\delta x^1)ds\}_{|\pm}$$

$$= \{\sqrt{-\gamma}\ (dx^1\delta x^0 - dx^0\delta x^1)\}_{|\pm}\,.$$

$$\left\{\delta\,{}^{(2)}ds \pm (km/2c^2r^2)\sqrt{-\gamma}\ (dx^1\delta x^0 - dx^0\delta x^1)\right\}_\pm$$

$$= d(u_a\delta x^a)_\pm\,. \tag{24}$$

Уведімо векторний потенціял $B_a = B_a(x^0, x^1)$ за допомогою співвідношення

$$d\wedge(B_a dx^a) \equiv G_{01}dx^0\wedge dx^1$$

$$= -\frac{km}{2c^2r^2}\sqrt{-\gamma}\ dx^0\wedge dx^1\,. \tag{25}$$

Ураховуючи, що $\delta(B_a dx^a) - d(B_a\delta x^a) = G_{10}(dx^0\delta x^1 - dx^1\delta x^0)$, маємо $\delta\left\{{}^{(2)}ds \pm\ B_a dx^a\right\}_\pm = d\{(u_a \pm B_a)\delta x^a\}_\pm$. Таким чином, якщо ми, замість (22), запровадимо дію

$$I^{\pm}_{\rm sh} = -mc \int\limits_{\gamma} \left({}^{(2)}ds \mp B_a dx^a \right)_{|\pm} , \qquad (26)$$

то при фіксованих початкових і кінцевих положеннях оболонки виконується умова $\delta I^{\pm}_{\rm sh} = 0$ і (26) дає ефективну дію для пилової сферичної оболонки у ЗТВ.

У координатах кривин визначмо загальні сферичні $\{r,\ \theta,\ \alpha\}$ й індивідуальні часові координати $t_\pm$ для $D_\pm$. Тоді рівняння траєкторії γ є $r = R_\pm(t_\pm)$. Ґравітаційні поля в $D_\pm$ визначаються метриками

$${}^{(4)}ds^2_\pm = f_\pm c^2 dt^2_\pm - f^{-1}_\pm dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\alpha^2) , \quad (27)$$

де $f_\pm = 1 - 2kM_\pm/c^2 r$, $M_\pm$ — маси Шварцшільда $(M_+ > M_-)$. Тут $B_a dx^a = c\varphi(t_\pm, R) dt_\pm$ і з (25) одержуємо, що $\partial\varphi/\partial R = km/2c^2R^2$, звідси $\varphi = -km/2c^2R$. Таким чином, ефективна дія (26) для оболонки набирає вигляду

$$I^{\pm}_{sh} = \int\limits_{\gamma} L^{\pm}_{sh} dt_{|\pm} = -\int\limits_{\gamma} \left(mc\ {}^{(2)}ds \pm \frac{km^2}{2R} dt \right)_{|\pm} , \quad (28)$$

$$L^{\pm}_{sh} = -mc^2 \sqrt{f_\pm - f^{-1}_\pm R^2_{t\pm}/c^2} \pm U , \qquad (29)$$

де $L^{\pm}_{\rm sh}$ — лаґранжіяни щодо стаціонарних у $D_\pm$ спостерігачів $(R_{t\pm} = dR/dt_\pm)$, а $U = -km^2/2R$ — ефективна потенційна енерґія ґравітаційної самодії оболонки.

Умови ізометричности боків оболонки приводять до співвідношень

$$c^2 f_+ R^{-2}_{t+} - f^{-1}_+ = c^2 f_- R^{-2}_{t-} - f^{-1}_- , \qquad (30)$$

$$R^2_\tau \equiv \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 = \frac{c^2 R^2_{t\pm}}{c^2 f_\pm - f^{-1}_\pm R^2_{t\pm}}$$

$$R^2_{t\pm} \equiv \left(\frac{dR}{dt_\pm} \right)^2 = \frac{c^2 f^2_\pm R^2_\tau}{c^2 f_\pm + R^2_\tau} . \qquad (31)$$

Далі із лаґранжіянів $L^{\pm}_{sh}$ (29) знаходимо імпульси та гамільтоніяни оболонки

$$P_\pm = m f^{-1}_\pm R_\tau ,$$

$$H^{\pm}_{\rm sh} = mc^2 \sqrt{f_\pm + c^{-2} R^2_\tau} \mp U = E_\pm , \qquad (32)$$

де $E_\pm$ — енерґії оболонки. Виключаючи з (32) швидкість R_τ, одержуємо

$$f_+ P_+ = f_- P_-$$

$$(E_+ + U)^2 - m^2c^4 f_+ = (E_- - U)^2 - m^2c^4 f_- . \qquad (33)$$

Підставмо в останнє співвідношення $f_\pm$ і U і прирівняймо коефіцієнти при однакових степенях R. Унаслідок цього ми маємо

$$H^{+}_{\rm sh} = H^{-}_{\rm sh} = (M_+ - M_-)c^2 . \qquad (34)$$

Перше співвідношення в (33) разом з (34) можна трактувати як імпульсну й гамільтонову в'язі. Ураховуючи ці в'язі, із формул (32) одержуємо основні співвідношення теорії сферичних пилових оболонок.

---

[1] P. Kraus, F. Wilczek, Nucl. Phys. B **433**, 403 (1995); A. Ansoldi, A. Aurilia, R. Balbinot and E. Spallucci, Class. Quantum Grav. **14**, 2727 (1997); P. Hájíček, J. Bičák, Phys. Rev. D **56**, 4706 (1997); V. A. Berezin, A. M. Boyarsky, A. Yu. Neronov, Phys. Rev. D **57**, 1118 (1998).

[2] V. D. Gladush, J. Math. Phys. **42**, 2590 (2001).

[3] В. Н. Пономарев, А. О. Барвинский, Ю. Н. Обухов, *Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий* (Энергоатомиздат, Москва, 1985).

THE EFFECTIVE ACTION FOR A SPHERICAL DUST SHELL IN GENERAL RELATIVITY

V. D. Gladush

Dnipropetrovsk National University, Department of Physics,
13 Naukova Str., Dnipropetrovsk, 49050, Ukraine

The effective action and variational principle for a spherical dust shell in General Relativity are constructed.