ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 6, № 4 (2002) с. 383–385

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 6, No. 4 (2002) p. 383–385

МОЖЛИВІ РЕЖИМИ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО ОБЕРТАННЯ СОНЯЧНОЇ КОНВЕКТИВНОЇ ЗОНИ

П. Г. Брайко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Астрономічна обсерваторія, вул. Обсерваторна, 3, Київ, 04053, Україна
(Отримано 13 серпня 2002 р.; в остаточному вигляді — 2 вересня 2002 р.)

Розглянуто проблему диференційного обертання сонячної конвективної зони. На основі експериментальних даних було зроблено аналіз поведінки кутової швидкости як функції, що залежить від радіуса та широти. Побудовано модель диференційного обертання в сонячній конвективній зоні у сферичній системі координат при умові мінімуму витрат енерґії на тертя. Виявлено, що закон обертання з указаним вище обмеженням діє в інерційному інтервалі (0.72–0.82 R_s).

Ключові слова: сонячна конвективна зона, диференційне обертання Сонця, тензор в'язких напружень.

PACS number(s): 90.60.–j, 96.60.Bn

I. ВСТУП

У [1] експериментально було знайдено, що швидкість обертання Сонця у приекваторіяльних широтах зростає до поверхні, а для широт, більших за 40 градусів, кутова швидкість спадає в цьому напрямку. На відстані 0.95–0.97 сонячного радіуса (R_s) на всіх широтах спостерігаємо загальний спад кутової швидкости, що, можливо, пов'язано з нелінійними ефектами. З рис. 1, зробленого на основі обробки спостережених геліосейсмологічних даних, видно, що ізоротаційні поверхні сонячної конвективної зони (СКЗ) розміщуються конусоподібно вздовж радіуса на противагу тому, як це вважали раніше за результатами чисельного моделювання.

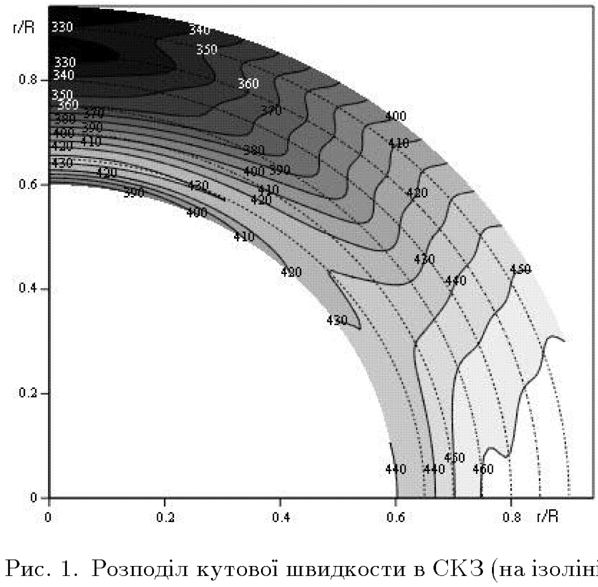

Рис. 1. Розподіл кутової швидкости в СКЗ (на ізолініях — швидкість кутового обертання в нГц).

Досі було розроблено достатньо моделей, які описують параметри диференційного обертання для СКЗ. Вони ґрунтуються на рівняннях Нав'є–Стокса, неперервности та турбулентного потоку тепла. Більшість статистичних моделей, що описують турбулентні рухи, мають за основу розклад Рейнольдса, у якому швидкість і термодинамічні змінні в системі виражені усередненими членами та флуктуаційними (турбулентними) компонентами. Також для спрощення часто використовують теорію "довжини змішування", яка враховує турбулентність течій рідини і включення в початкові рівняння напружень Рейнольдса. Слід зазначити, що в рівняння руху входить також усереднений тензор в'язких напружень, який забезпечує перенос імпульсу при в'язкому русі, але перевага турбулентности робить використання тензора напружень Рейнольдса доцільнішим.

II. ТЕОРЕТИЧНА МОДЕЛЬ, ЩО ВІДПОВІДАЄ УМОВІ МІНІМУМУ ВИТРАТ ЕНЕРҐІЇ НА ТЕРТЯ

Автори праці [2] не вказали граничних умов, що повинні накладатись на межі СКЗ, адже циліндрична система координат не дає змоги це зробити коректно. Розгляньмо ту ж саму задачу, але у сферичній системі координат, де можна використати такі граничні умови для неоднорідного середовища: значення кутової швидкости в нижній частині підтахоклінної ділянки (0.64 R_s, там, де швидкості розгалужуються по широтах) приймаємо сталим. Це вважаємо нижньою межею моделі; похідну за радіусом у вказаній вище ділянці приймаємо деякою додатною величиною; умови та обмеження поведінки кутової швидкости на верхній межі ділянки ($\approx 0.85\ R_s$), що розглядається, не накладаються.

Загальне рівняння Нав'є–Стокса для турбулентної течії в інерційній системі має таку форму:

$$(U\nabla)U + \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\mathrm{div}(\rho\sigma_{ij}) = g, \qquad (1)$$

де U — усереднена швидкість, $\sigma_{ij} = \langle u_i' u_j' \rangle$ — тензор напружень Рейнольдса, складений із флюктуаційних швидкостей, який, за припущенням Буссінеску, може виражатись через тензор в'язкости. Він описує обмін імпульсом між турбулентністю та усередненою течією. Диверґенція, що містить тензор σ_{ij}, є вектором, який складається з компонент $\partial(\rho\sigma_{ij})/\partial x_j$, ∇p — ґрадієнт тиску, ρ — густина, g — прискорення вільного падіння. Магнетні поля до розгляду не включені. Приймаємо також рівняння неперервности в стаціонарному варіянті та рівняння турбулентної кінетичної енерґії, що враховують фактори переносу тепла та турбулентности.

Нехай $U_\phi = \Omega(r,\theta) r sin\theta$ — лінійна усереднена швидкість в азимутальному напрямку. У сферичній системі координат для азимутальної компоненти рівняння стаціонарного руху при відсутності відхилення від осьової симетрії (тобто $\frac{\partial}{\partial\phi} = 0$) записуємо так:

$$\rho\left(U_r\frac{\partial U_\phi}{\partial r} + \frac{U_r U_\phi}{r} + \frac{U_\theta}{r}\frac{\partial U_\phi}{\partial\theta} + \frac{U_\theta U_\phi \operatorname{ctg}\theta}{r}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma_{\phi r}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma_{\phi\theta}\sin\theta)\right)$$
$$+\frac{\sigma_{r\phi}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\phi}\operatorname{ctg}\theta}{r}. \qquad (2)$$

Нехай компоненти тензора в'язких напружень у цій системі координат для азимутальної компоненти мають вигляд:

$$\sigma_{r\phi} = \mu\left(\frac{\partial U_\phi}{\partial r} - \frac{U_\phi}{r}\right),$$
$$\sigma_{\theta\phi} = \mu\frac{1}{r}\left(\frac{\partial U_\phi}{\partial\theta} - U_\phi\operatorname{ctg}\theta\right). \qquad (3)$$

У результаті спрощень отримуємо:

$$\frac{3r}{l}\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + 2\Omega + \frac{U_\theta}{U_r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + 2\frac{U_\theta}{U_r}\Omega\operatorname{ctg}\theta\right) \qquad (4)$$
$$= r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \left(4 + r\frac{\partial\ln\mu}{\partial r}\right)r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2} + 3\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\Omega}{\partial\theta},$$

де $\mu(r,\theta)$ — сумарний коефіцієнт в'язкости (зсувної, променистої та турбулентної). Розгляньмо праву частину рівняння (4), де закладений механізм турбулентної в'язкости, який реалізує умову мінімальних витрат на тертя при будь-якому русі речовини. Відзначимо, що в СКЗ переважає турбулентна в'язкість. Доданки є так званим оператором Лапласа в п'ятивимірному просторі і при згортанні мають вигляд $\mathrm{div}(\mu r^2\sin^2\theta\,\mathrm{grad}\,\Omega)$. Спробуймо знайти розв'язок, як і в циліндричній системі координат, методом Фур'є, через розділення змінних. Відтак отримуємо систему рівнянь з параметром Λ:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2} + 3\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial h}{\partial\theta} + \Lambda^2 h = 0, \qquad (5)$$

$$r^2\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + 4r\frac{\partial q}{\partial r} + r^2\frac{\partial\ln\mu}{\partial r}\frac{\partial q}{\partial r} - \Lambda^2 q = 0. \qquad (6)$$

Провівши аналіз рівняння (5) на відшукання розв'язків, виявили, що h наближено визначається функцією Ґеґенбауера з дискретними значеннями. Рівняння (6) підпадає під категорію рівнянь, розв'язком яких є циліндричні функції Бесселя q з півцілим індексом із урахуванням похідної від натурального логарифма динамічної в'язкости μ. Цей параметр поводить себе неадекватно протягом СКЗ, тому необхідні певні спрощення. Приймаючи модель СКЗ Стікса (1993) [3], можна знайти необхідні параметри, щоб уточнити рівняння (6). Використавши 28 точок з кроком $0.01R_s$, побудували емпіричну формулу для μ, яка відповідає модельним даним з коефіцієнтом кореляції 0.944:

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial r} \cong \frac{-36.9}{(20.51 - 20.5r)^{0.8}}.$$

У результаті розв'язання рівняння методом послідовних наближень з використанням початкових умов для кожної з перших трьох мод функції Ґеґенбауера було отримано сукупність ізоліній для широт, що зображені на рис. 2.

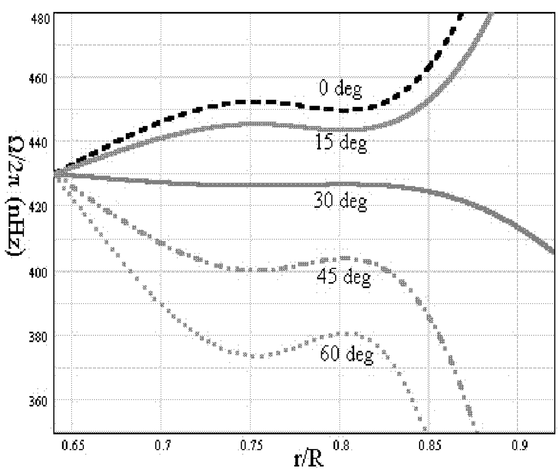

Рис. 2. Вигляд диференційного обертання СКЗ при умові мінімальних витрат енерґії на тертя для різних геліоширот.

Результати дослідження показують, що модель якісно відповідає виглядові обертання Сонця в ділянці, що розглядається, за винятком верхньої частини СКЗ ($> 0.82R_s$), де турбулентність стає більш дрібномасштабною, а дисипація, яка не врахована, починає відігравати значну роль. Математично це пояснюється тим, що функції Бесселя, які описують диференційне обертання, мають комплексний арґумент, тому залежність стає практично експоненційною. Порівняння значень експерименту та теоретичних досліджень для інтервалу $(0.72 \div 0.82R_s)$, які відображено у цій праці, показують, що для широкого діяпазону коефіцієнт кореляції не менший за 0.85, за винятком геліоширот близько 30 градусів, де коефіцієнт кореляції дорівнює 0.65. Це вказує на певну неточність у припущеннях і проведених розрахунках. Можна вважати, що для широт, де кореляція порівняно невелика, на обертання накладаються моди вищого порядку, які наближають вигляд обертання до реального.

ВИСНОВКИ

Розглянувши тензор Рейнольдса, який описує дисипацію поля швидкостей (у цьому випадку це азимутальний напрямок), і припустивши, що вона мінімальна, знайшли множину розв'язків рівняння (5). Її можна записати як поліноми Лежандра або добуток радіяльної та кутової частин відповідно функцій Бесселя та Ґеґенбауера. Використавши модель Стікса для СКЗ (1993) та зробивши певні припущення щодо розподілу динамічної турбулентної в'язкости, встановили можливість існування режиму руху речовини при мінімальних утратах енерґії на тертя, що підтверджується порівнянням геліосейсмологічних експериментальних даних та моделі. Для вдосконалення знайденого розподілу кутових швидкостей в СКЗ можна розглянути ширший діяпазон з урахуванням тих фізичних особливостей, що існують у ділянці тахокліна та поверхневих шарах.

[1] R. Howe, J. Christensen-Dalsgaard, F. Hill *et al.*, Science **287**, 2456 (2000).
[2] A. Giao, Ph. Wehrle, Beitr. z. Phys. d. Freien Atmosph. **19**, 237 (1932).
[3] M. Stix, приватне повідомлення (1993).

POSSIBLE REGIMES OF DIFFERENTIAL ROTATION IN THE SOLAR CONVECTIVE ZONE

P. G. Braiko
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Astromomical Observatory
3, Observatorna Str., Kyiv, 04053, Ukraine
suryadev@observ.univ.kiev.ua

The problem of differential rotational generation in the solar convective zone was studied. The behavioural analysis of the angular velocity as a function that depends on the radius and latitude was carried out at the base of experimental data. In the spherical coordinates the model of differential rotation in the solar convective zone was built. The condition of minimum energy loss used in friction was applied. The results of this study reassert the real law of the solar rotation for the inertial interval (0.72–0.82 R_s).