ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 6, № 4 (2002) с. 408–410

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 6, No. 4 (2002) p. 408–410

ЗМІНА АМПЛІТУДИ ЧАНДЛЕРІВСЬКОГО РУХУ ВНАСЛІДОК ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ

Г. С. Курбасова[1], Л. В. Рихлова[2]
[1] *КрАО, НАНУ,*
вул. Обсерваторна, 1, Сімеїз, 98680, Україна,
[2] *ІНАСАН, РАН,*
вул. Пятницька, 48, Москва, 109017, Росія
(Отримано 14 травня 2002 р.)

Розглянуто можливість збудження амплітуди чандлерівського коливання внаслідок параметричного резонансу. З урахуванням тільки внутрішнього джерела енерґії (ґравітаційної взаємодії Землі й Місяця) побудовано диференціяльне рівняння, яке описує параметричний резонанс у системі.

У першій ділянці нестійкости отримано стаціонарний розв'язок цього рівняння щодо амплітуди власного коливання Землі в системі Земля–Місяць.

Ключові слова: Земля, Місяць, резонанс, коливання, система.

PACS number(s): 96.20.−n

I. ВСТУП

Моделювання руху земної системи відліку стосовно інерційної включає рух системи Земля–Місяць навколо Сонця, а також обертання, яке складається з прецесії, нутації, руху полюса та обертання Землі навколо своєї осі.

Детальний аналіз показує, що класичні форми рівнянь руху не враховують окремих властивостей, які зумовлені зв'язком коливань у системі Земля–Місяць–Сонце. Це приводить в окремих випадках до розходження моделі й реального руху, який знаходимо на основі експериментальних спостережень.

У пов'язаній системі власні коливання окремих тіл змінюються. За допомогою математичного апарату, який описує пов'язані коливання, автори цієї роботи [1,2] побудували модель, що передає найважливіші, основні й характерні властивості пов'язаних коливань у системі Земля–Місяць. Прийнятий для цієї моделі ступінь ідеалізації дозволив застосувати відомі методи аналітичного аналізу. У результаті одержано теоретичну величину періоду власних коливань Землі в системі Земля–Місяць, яка дорівнює середньому значенню періоду чандлерівського коливання, визначеного після обробки сучасних експериментальних даних про координати полюса Землі.

У нашій статті обмірковано новий підхід до з'ясування причин зміни амплітуди й періоду чандлерівського руху.

II. ПАРАМЕТРИЧНЕ ЗБУДЖЕННЯ АМПЛІТУДИ ЧАНДЛЕРІВСЬКОГО РУХУ

Частота власних коливань ω_0 і коефіцієнт загасання δ визначаються тільки фізичними властивостями системи. При дослідженні зовнішньої дії на систему Земля–Місяць необхідно відрізняти силову й параметричну дії. Силова дія не приводить до зміни параметрів ω_0 і δ. Чисто силова дія на систему Земля–Місяць може бути тільки внаслідок її ідеалізації, тобто в припущенні, що система лінійна. Параметрична дія, навпаки, змінює тільки ω_0 і δ.

Для реальної системи Земля–Місяць, яка принципово нелінійна, неможливо розділити чисто силову й параметричну дію, тому що під час зростання амплітуди зовнішньої сили або зростання амплітуди вимушених коливань у системі виникає нелінійна залежність ерґоємного параметра ρ (ρ — відстань між центрами мас Землі й Місяця) від миттєвого значення зовнішньої сили. Таку дію належить уважати змішаною, тобто і силовою, і параметричною.

Ця обставина надзвичайно ускладнює аналіз вимушених процесів у нелінійній системі навіть у консервативному наближенні і робить не цілком коректним розгляд прямої силової дії без ураховування водночас дії на параметри системи (параметричної дії).

Тому уявляється доцільним розмежувати чисто параметричну дію на амплітуду й частоту власних коливань Землі в системі Земля–Місяць без протиставлення силового, або прямого, впливу.

Для оцінки параметричної дії використаємо можливість класифікувати види дій, пов'язаних із різними способами внеску енерґії в систему, що зумовлює хід резонансних явищ.

При прямій дії на систему енерґія вимушених коливань утворюється за рахунок безпосередньої роботи зовнішніх сил. Унаслідок параметричної дії зростання запасу енерґії коливання здійснюється з перетворенням енерґії з одного виду в інший.

Із загальної теорії параметричного резонансу випливає, що шляхом періодичної зміни енерґоємного параметра при певних взаємовідношеннях між частотою дії на параметр і власною частотою системи може відбуватися процес, який посилюється стосовно амплітуди і забезпечує часткову або повну компенсацію втрати енерґії в системі. Зокрема за рахунок внутрішніх властивостей системи появляється можливість відновлювати амплітуди власних коливань системи на частоті ω_0. Ефект внутрішньої дії найбільший, коли Місяць знаходиться в перигеї, і найменший, коли — в апогеї. Рух по еліпсу з малим ексцентриситетом можна розглядати як результат вільних коливань навколо кола; так само ми можемо розглядати реальний рух Місяця як вільне коливання навколо варіяційної орбіти з радіусом кривизни $\rho_0 = a$, де a — середня відстань між центрами мас Землі й Місяця, яка відповідає середньому рухові по незбуреній орбіті.

Параметричне збудження коливань (параметричний резонанс) відбувається, якщо наявні певні взаємовідношення між частотою коливання параметра ω_ρ і частотою збуджених коливань ω. Математичний опис періодичної зміни ρ_t щодо ρ_0 має вигляд

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{[1 + e\cos(2\omega t)]}, \qquad (1)$$

де $2\omega = \omega_\rho$ — частота періодичної зміни параметра ρ_t, яка обчислюється за формулою

$$\omega_\rho = \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_a^2 - \omega_c^2)/2}, \qquad (2)$$

де ω_a, ω_c — частоти аномалістичного й синодичного рухів.

Якщо враховувати тільки внутрішнє джерело внеску енерґії (ґравітаційна взаємодія Землі й Місяця), то математичний опис параметричного резонансу можна задати у вигляді такого диференціяльного рівняння:

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + e\cos(2\omega t)]f(x) = 0, \qquad (3)$$

де $f(x)$ — функція, яка описує нелінійну характеристику системи. Задамо $f(x)$ у вигляді:

$$f(x) = x + \gamma x^3, \qquad (4)$$

де

$$\gamma = \pm\sqrt{1 + (4\lambda)^2}/2, \qquad (5)$$

λ — безрозмірний коефіцієнт зв'язку в системі Земля–Місяць [3].

Для рівняння (3) поблизу значень $\omega_0/\omega = 1, 2, 3, \ldots, n$ при цій глибині модуляції параметра ρ є певна ділянка значень ω, у яких становище рівноважного руху стає нестійким, і в системі повинні виникнути і зростати коливання із частотами ω, 2ω, 3ω і т. п.

У наближеному розгляді можна обмежитись розв'язком рівняння (3) із частотою ω, яке стосується порушення умов стійкости рівноважного становища в першій ділянці нестійкости $\omega = \omega_0$.

У цій ділянці стаціонарний розв'язок рівняння (3) щодо амплітуди A і $\gamma < 0$ є таким:

$$A^2 = \frac{4}{3|\gamma|}\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2(1 \pm e/2)}\right]. \qquad (6)$$

На рис. 1 показана залежність, яку описує рівняння (6), коли $\gamma < 0$. Величини ω_1 і ω_2 відповідають межам інтервалів першої ділянки параметричного збудження вільних коливань. Ці величини одержані за умов існування реального розв'язку рівняння (3) і мають вигляд:

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1 + e/2}, \qquad \omega_2 = \omega_0\sqrt{1 - e/2}. \qquad (7)$$

Межі інтервалів першої ділянки параметричного збудження для періоду P_0 чандлерівського коливання і трьох значень параметра e наведені в таблиці 1.

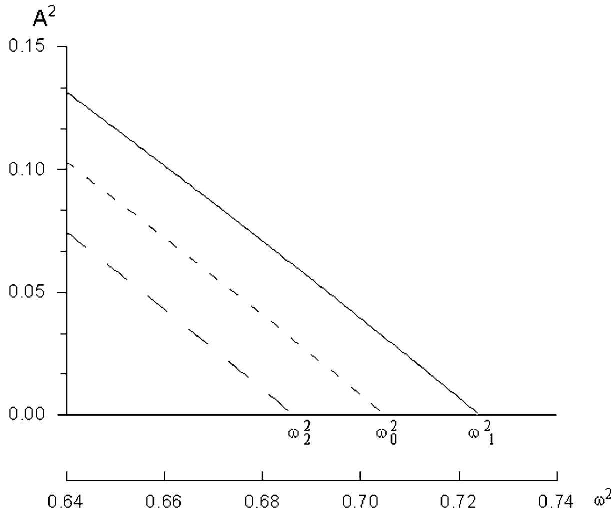

Рис. 1. Графіки параметричного резонансу для консервативної нелінійної системи Земля–Місяць.

e		0.0448	0.0549	0.0650
$P_0 = 435.3$	P_1,(доб)	430.5	429.4	428.4
(доб)	P_2,(доб)	440.3	441.4	442.6

Таблиця 1. Межі інтервалів першої ділянки параметричного збудження чандлерівського коливання.

Відповідно до табл. 1 інтервал зміни середнього періоду внаслідок параметричного збудження складає для різних значень ексцентриситету 2.2%, 2.7%, 3.3%.

Урахування дисипації й деформування амплітуди під впливом вимушених процесів викликає невелике збільшення інтервалів зміни середнього періоду. Наведені на рис. 1 і в табл. 1 теоретичні результати узгоджуються з першим і другим експериментальними законами Мельхіора.

Характер процесів у системі Земля–Місяць за параметричною дією з глибиною модуляції e можна подати так. Наявність у системі коливань із частотою

ω, що попадає до інтервалу $\omega_1-\omega_2$ (відповідний інтервал періодів P_1-P_2 в табл. 1), викликає коливання з обмеженою амплітудою A, яка суттєво залежить від ступеня нелінійности системи γ. Залежно від характеру нелінійности (знак γ) коливання при подальшій зміні ω за межі зазначеної ділянки (першої ділянки параметричного збудження) спадає до нуля чи наростає. Відсутність ізохронности системи приводить до того, що при виникненні параметрично збуджених коливань частота власних коливань із ростом амплітуди змінюється, і сама система виходить на межу відповідної ділянки параметричного збудження. Це викликає зменшення енерґії, яку вкладає система в зміну параметра ρ і тим самим обмежує зростання амплітуди власних коливань.

III. ВИСНОВКИ

1. Періодична зміна енерґоємного параметра ρ викликає зміну амплітуди й періоду чандлерівського руху Землі в системі Земля–Місяць (параметрична дія).

2. Ураховуючи, що в системі Земля–Місяць, відповідно до закону всесвітнього тяжіння, існує один змінний енерґоємний параметр ρ, ми побудували диференціяльне рівняння, яке описує параметричний резонанс.

   У першій ділянці нестійкости знайдено розв'язок цього рівняння щодо амплітуди чандлерівського руху.

3. До причин, які обмежують величину амплітуди чандлерівського коливання, належить нелінійний характер зміни енерґоємного параметра ρ, а також рух барицентру системи Земля–Місяць, який змінює фізичні умови в системі.

4. Порівняння теоретичного взаємозв'язку зміни амплітуди й періоду чандлерівського коливання ($\gamma < 0$) виявляє узгодження з першим і другим законами Мельхіора.

[1] G. Kurbasova, L. Rykhlova, *Polar motion: Historical and Scientific problems,* IAU Colloquim 178, p. 493, (2000).

[2] Курбасова Г. С., Рыхлова Л. В., *Астрометрия, геодинамика и небесная механика на пороге XXI века.* (ИПА РАН, Санкт-Петербург, 2000).

[3] Г. С. Курбасова, Л. В. Рыхлова, Астрон. журн. **78**, 1049 (2001).

THE AMPLITUDE OF CHANDLER OSCILLATIONS CHANGE IN CONSEQUENCE OF PARAMETRIC ACTION

G. Kurbasova[1], L. Rykhlova[2]

[1] *Crimean Astrophysical Observatory, Ukraine*
e-mail: gsk@crao.crimea.ua
[2] *Institute for Astronomy, Russia*
e-mail: rykhlova@inasan.rssi.ru

In the coupled system Earth–Moon the proper frequency of the free Earth oscillations is transformed into proper frequency of the Earth–Moon system. Accordingly, Kurbasova and Rykhlova (2001) have proposed a model describing the most important properties of coupled oscillations in the Earth–Moon system. The admitted level of idealization in this model allowed the application of the known methods of analysis and computation. As a result the theoretical value of the proper oscillation period in the Earth–Moon system was derived equal to the mean Chandler oscillation period that was obtained by reducing experimental data of the Earth pole coordinates. Most investigators of Chandler oscillations came to the conclusion that its period remains not constant in time. This is often supposed to be connected with variations of the amplitude in accordance with the empirical law by Melchior (1954). Considering external action on the Earth–Moon system we distinguish power and parametric action. Power action does not change ω_0 (frequency of Chandler oscillations) and δ (damping coefficient), while the parametric action is changing them. By studying parametric action we classify actions connected with different ways of introducing energy into the system that is decisive for the appearing of resonances. Considering only the internal source of energy input (gravitational interaction of Earth and Moon) the parametric resonance can be described by the differential equation. The processes in a system with parametric action and modulation depth e, can be described in the following way: oscillations with the frequency ω (inside the frequency interval $\omega_1 - \omega_2$) create in the system an oscillating process with the amplitude A that depends significantly on the non-linearity level γ. Depending on the value of γ, the oscillations will decrease to zero or increase along with a change of ω beyond the border of the first non-equilibrium zone.