

ІНВЕРСНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ АТМОСФЕРИ СОНЦЯ ТА ЗІР

М. І. Стоділка

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
Астрономічна обсерваторія
вул. Кирила і Мефодія, 8, Львів, 79005, Україна
(Отримано 3 червня 2002 р.)*

Розглянуто інверсну задачу для дослідження неоднорідностей атмосфери Сонця та зір за профілями фраунгоферових ліній; неоднорідності вважаємо вкрапленими в незбурену атмосферу. Стратифікацію параметрів неоднорідностей визначено з умови найліпшого узгодження теоретичних профілів з експериментальними. Задачу розв'язано з використанням функцій відгуку, для зображення яких застосовано метод коротких характеристик. Результати тестування показують, що відтворені параметри добре узгоджуються з базовою моделлю в ділянці чутливості вибраних ліній і слабо чутливі до початкових прикидок.

Ключові слова: інверсні методи, перенесення випромінювання, зоряні атмосфери, лінії Fe I.

PACS number(s): 97.10.Ex

I. ВСТУП

Атмосфера Сонця чи зорі динамічна в часі, неоднорідна в просторі; вона структурована ґрануляцією, плямами, факелами тощо. Ці неоднорідності є віддзеркаленням процесів, що відбуваються в глибинних шарах зорі.

Оскільки спектральні лінії відображають фізичні умови тих шарів атмосфери зорі, де вони утворюються, то дослідження спектрів Сонця та зір дозволяє отримати інформацію про фізичні умови в цих неоднорідностях, які можна описати набором відповідних параметрів — температура, густина, швидкість тощо, що змінюються як уздовж просторових координат, так і в часі.

Поліпшення точності та роздільної здатності спектральних приладів дає змогу отримати більше інформації зі спостережуваних даних; при цьому виникає потреба в розвитку витончених методів, які б максимально враховували механізми утворення ліній і були б здатні відтворити спостережувані особливості. Поставлену задачу розв'язують інверсні методи, що відтворюють стратифікацію параметрів шляхом підгонки синтезованих й експериментальних даних і дозволяють, таким чином, отримати напівемпіричні моделі атмосфери.

Перші спроби одержати стратифікацію параметрів атмосфери зводились до побудови моделей атмосфер методом спроб та помилок шляхом синтезу теоретичних профілів і порівняння їх зі спостережуваними. Звичайно, такий підхід громіздкий і, основне, мало-ефективний навіть при дослідженні по одній лінії.

У другому підході розв'язок інверсної задачі зводиться до знаходження функції джерела [1,2]. Так, у праці [1] функцію джерела зображено лінійною кусково-неперервною апроксимацією; задача полягає у встановленні на основі експериментальних даних

параметрів такої апроксимації. У працях Теплицької та ін. [2] при розв'язку рівняння переносу як рівняння Фредгольма I роду використано метод регуляризації за Тихоновим для знаходження функції джерела в лінії. На жаль, отриманої інформації замало для відтворення параметрів атмосфери.

У третьому підході, щоб полегшити підгонку даних, використовують функції відклику, які ввели в аналіз спектральних ліній Беккерс і Мілкей [3]: функція відклику відображає чутливість лінії поглинання на конкретній довжині хвилі до локальних варіацій фізичних умов уздовж променя зору. Усесторонній аналіз чутливості функцій відгуку різних спектральних ліній до параметрів моделі атмосфери зроблено в [4]. Функції відгуку набули популярності після того, як у [5] було запропоновано оригінальний інверсний метод для дослідження профілів Стокса спектральних ліній у наближенні локальної термодинамічної рівноваги (ЛТР) для одновимірної плоскопаралельної атмосфери. Інверсний код дає змогу отримати стратифікацію з глибиною таких параметрів як: температура, тиск, вектор магнетного поля, поле швидкостей. Розроблена стратегія була розвинута в працях: [6] — не-ЛТР інверсний метод для спектральних ліній (запропоновано наближення фіксованих не-ЛТР коефіцієнтів — FDC для швидкого обчислення функцій відклику), [7] — розширення методу, запропонованого в [6], для нерівноважного перенесення поляризованого випромінювання. У всіх схемах для найкращої підгонки даних застосовуємо метод найменших квадратів. Розроблені методи успішно використовували для вивчення сонячних плям [8], тонких магнетних трубок [9], сонячної ґрануляції [10,11], фотосферних осциляцій Сонця [12], мікроструктурованих магнетних атмосфер [13], коливань у сонячних плямах [14] та магнетних трубках [15], дослідження розподілу магнетного поля та хемічного складу по по-

верхні зорі [16].

У [17] застосовано фур'є-аналіз для спектра, що дозволило за відхиленням синтезованих й експериментальних профілів отримати тільки середні значення температури, швидкості та їхні градієнти. Інверсні методи є ефективним і перспективним підходом при дослідженні фізичних умов в атмосферах Сонця та зір на основі результатів спостережень як з низькою, так і високою просторовою роздільною здатністю. Поряд з інверсними методами використано моделювання фізичних процесів; цей підхід громіздкий для обчислення, а для числових розрахунків доводиться робити низку фізичних спрощень.

Інверсні методи та моделювання фізичних процесів є взаємодоповнювальними підходами при дослідженні атмосфери Сонця та зір: перший дає змогу отримати напівемпіричні моделі атмосфер, неоднорідностей, їхні індивідуальні властивості, тоді як другий — теоретичні моделі, їх розгортку в просторі та часі, дозволяє ліпше зрозуміти фізику явищ, що відбуваються в досліджуваних об'єктах; правда, результати, одержані при моделюванні, ліпше збігаються зі спостереженнями при вивченні спектрів з невисокою просторовою роздільною здатністю.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Ми аналізуємо неоднорідності типу ґранул, плям, факелів тощо, вкраплені в незбурену атмосферу, динаміку процесів уважаємо квазістаціонарною, тобто в такому випадку виконується умова горизонтального балансу тисків; поза неоднорідністю незбурена атмосфера перебуває в гідростатичній рівновазі, а всередині неоднорідності загальний тиск визначається статичним та динамічним тиском, зумовленим рухом речовини та тиском магнетного поля (для плям):

$$P_{\text{out}} = n_{\text{tot}}kT + \rho \frac{v^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi},$$

де: P_{out} — повний газовий тиск поза неоднорідністю; n_{tot} — загальна концентрація частинок у ділянці неоднорідності, причому $n_{\text{tot}} = n + n_e$, n та n_e — концентрація важких частинок та електронів; ρ — густина речовини неоднорідності, $v^2 = V_{\text{micro}}^2 + V_{\text{macro}}^2 + V_{\text{los}}^2$, де V_{micro} , V_{macro} , V_{los} — мікротурбулентна швидкість, макротурбулентна швидкість та швидкість руху речовини вздовж поля зору, ці три величини задають поле швидкостей неоднорідності. Вхідними даними є: профілі ліній поглинання аналізованого хемічного елемента, абсолютні значення інтенсивності в континуумі кожної лінії, стратифікація газового тиску у вибраній моделі спокійного Сонця, а також набір відповідних атомних параметрів; магнетного поля неоднорідності надалі не розглядаємо.

Задача зводиться до знаходження стратифікації концентрації атомів водню, електронів, температури та поля швидкостей з умови найліпшого узгодження

теоретичних профілів з експериментальними. По-ставлена задача є оберненою і, як і всі обернені задачі, — некоректною. Некоректність можна обійти, використовуючи спеціальні алгоритми обертання матриці чи вводячи спеціальні тихонівські стабілізатори, які певним чином обмежують поведінку розв'язку; другий підхід перспективніший. Розв'язок задачі шукаємо методом ітерацій: на основі використуваної моделі атмосфери обчислюємо теоретичні профілі ліній, за якими визначаємо поправки до параметрів моделі і т. д., поки не виконається умова збіжності ітераційної процедури.

При розв'язанні подібних задач використовують функції відгуку, що описують чутливість профілів ліній до варіації параметрів моделі.

III. ФУНКЦІЇ ВІДГУКУ

Нехай $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ — вектор, що задає стратифікацію x параметра за глибиною атмосфери, а $\delta\mathbf{x}$ — вектор, що описує його варіацію, тобто незначне збурення параметра x в кожній точці атмосфери. Тоді при відсутності магнетного поля рівняння переносу випромінювання для моделі атмосфери, що задається x параметрами, матимуть вигляд:

$$\frac{dI}{dl} = \chi(S - I), \quad (1)$$

а для моделі з $x + \delta x$ параметрами:

$$\frac{d(I + \delta I)}{dl} = (\chi + \delta\chi)(S + \delta S - I - \delta I), \quad (2)$$

де: I — інтенсивність випромінювання, S — функція джерела, dl — зміна геометричної глибини вздовж напрямку поширення променя, χ — коефіцієнт поглинання. Звідси, урахувавши (1), отримуємо рівняння переносу для варіації δI :

$$\frac{d\delta I}{d\tau} = \delta I - \delta S^{\text{ef}}, \quad (3)$$

де: $\delta S^{\text{ef}} = S \frac{\delta\eta}{\eta} - I \frac{\delta\chi}{\chi}$, τ — оптична глибина, η — коефіцієнт випромінювання.

Для формального розв'язку рівняння (3) застосуємо метод коротких характеристик [18]: будемо вважати, що функція джерела міняється лінійно між двома сусідніми точками; тоді, використавши відоме співвідношення формального розв'язку, для двох сусідніх точок атмосфери вздовж напрямку поширення променя маємо:

$$\delta I_n = \delta I_{n+1} e^{-\Delta\tau_{n+1,n}} + a_n \delta S_n^{\text{ef}} + b_n \delta S_{n+1}^{\text{ef}}, \quad (4)$$

де: $b_n = (1 - (\Delta\tau_{n+1,n} + 1)e^{-\Delta\tau_{n+1,n}})/\Delta\tau_{n+1,n}$, $a_n = 1 - e^{-\Delta\tau_{n+1,n}} - b_n$; $\Delta\tau_{n+1,n} = \tau_{n+1} - \tau_n$ — оптична

глибина між точками $n + 1, n$; ($\tau = 0$ — для верхньої точки атмосфери). Оскільки оптична глибина в нижніх шарах різко зростає, то природно вважати, що $\Delta\tau_{N+1,N} \gg 1$, $n = N$ — нижня точка. Тоді:

$$a_N = 1, b_N = 0,$$

а

$$\delta I_N = \delta S_N.$$

Використавши рекурентне співвідношення (4), для інтенсивності, що виходить з атмосфери, отримуємо вираз:

$$\begin{aligned} \delta I_1 &= \delta S_N (a_N e^{-\tau_{N,1}} + b_{N-1} e^{-\tau_{N-1,1}}) \\ &+ \delta S_{N-1} (a_{N-1} e^{-\tau_{N-1,1}} + b_{N-2} e^{-\tau_{N-2,1}}) \\ &+ \dots + \delta S_2 (a_2 e^{-\tau_{2,1}} + b_1) + \delta S_1 a_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Як бачимо, збурення, що йде з n -ого шару атмосфери, визначається зміною функцій джерела в шарах n та $n + 1$, тобто враховується вплив сусідніх шарів. Зазначимо, що вираз для вихідної інтенсивності (5), отриманий за допомогою рекурентного співвідношення методу коротких характеристик, точніший, ніж аналогічний вираз, записаний через функції внеску; це особливо стосується шарів з великими оптичними глибинами ($\tau \geq 1$). Крім цього, точність зображення (5) можна збільшити, застосувавши, наприклад, параболічну інтерполяцію для збурень функції джерела.

Для обчислення збурення функції джерела використовуємо локальне наближення, тобто будемо вважати, що δS_n^{ef} визначається тільки параметрами точки n :

$$\delta S_n^{\text{ef}} = \sum_{k=1}^3 \partial S_n^{\text{ef}} / \partial x_n^{(k)} \delta x_n^{(k)}, \quad (6)$$

де верхній індекс k відповідає за температуру ($k = 1$), швидкість руху речовини вздовж променя зору ($k = 2$), мікротурбулентну швидкість ($k = 3$) та макротурбулентну швидкість ($k = 4$); макротурбулентна швидкість буде введена нижче. Ми вважаємо, що макротурбулентна швидкість для кожної лінії індивідуальна, тоді як решта параметрів спільні для всіх ліній і міняються з глибиною. Підставивши (6) в (5), отримуємо:

$$\delta I_{1,i} = \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^N R_{n,i}^{(k)} \delta x_n^{(k)}, \quad (7)$$

де: $R_{n,i}^{(k)}$ — функції відгуку на $\lambda = \lambda_i$ до збурень k -го параметра для n -го шару атмосфери, причому:

$$R_{n,i}^{(k)} = \partial S_n^{\text{ef}} / \partial x_n^{(k)} (a_n \exp(-\tau_{n,1}) + b_{n-1} \exp(-\tau_{n-1,1})). \quad (8)$$

Зазначимо, що в не-ЛТР випадку функція джерела залежить також від інтенсивності, яка визначається станом сусідніх шарів атмосфери. Отже, функція джерела перестає бути локальною. Однак, згідно з [7], відхилення від локальності проявляються тільки для функції відгуку щодо температури для сильних ліній, і то у верхніх шарах атмосфери.

Навіть при дослідженні спектрів з високою просторовою роздільною здатністю виникає потреба вводити мікротурбулентну швидкість, що моделює дрібномасштабні рухи. Ми також вводимо макротурбулентну швидкість, яка відображає турбулентність нисхідних та висхідних потоків на великих масштабах і спричиняє додаткове розширення лінії. Швидкість руху речовини вздовж променя зору викликає зміщення центра лінії й формує її асиметрію.

Вплив макротурбулентної швидкості на профіль лінії будемо описувати згортокою профіля з гауссіаном, яка визначається V_{macro} , тобто:

$$\tilde{I}_{1,i} = \sum_{i'=-L}^L c_{i'} I_{1,i+i'}, \quad (9)$$

де коефіцієнти $c_{i'}$ дорівнюють добуткові гауссіана при $\lambda = \lambda_{i'}$ на ваговий множник, який обчислюється методом інтегрування. Отже,

$$\delta \tilde{I}_{1,i} = \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^N \tilde{R}_{n,i}^{(k)} \delta x_n^{(k)} + \tilde{R}_i^{(4)} \delta x^{(4)}, \quad (10)$$

де:

$$\tilde{R}_{n,i}^{(k)} = \sum_{i'=-L}^L c_{i'} R_{n,i+i'}^{(k)}, \quad \tilde{R}_i^{(4)} = \partial \tilde{I}_{1,i} / \partial x^{(4)}$$

— функції відгуку з урахуванням макротурбулентності.

Згідно з (8), функції відгуку визначаються частинними похідними $\partial S_n^{\text{ef}} / \partial x_n^{(k)}$. Урахувавши вираз для δS_n^{ef} , отримуємо:

$$\partial S_n^{\text{ef}} / \partial x_n^{(k)} = S_n / \eta_n \cdot \partial \eta_n / \partial x_n^{(k)} - I_n / \chi_n \cdot \partial \chi_n / \partial x_n^{(k)},$$

де: $\eta = \eta_l + \eta_c$, $\chi = \chi_l + \chi_c$, η_l , χ_l , η_c , χ_c — коефіцієнти випромінювання та поглинання в лінії та континуумі відповідно.

Коефіцієнти поглинання й випромінювання в лінії задаються реальними заселеностями рівнів; $n_i = \beta_i \cdot n_i^*$, де n_i^* — рівноважні заселеності рівнів, β_i — коефіцієнти відхилення від ЛТР; при розрахунку функції відгуку будемо вважати їх фіксованими-FDC на-

ближення [6]. Не-ЛТР коефіцієнти обчислюємо шляхом розв'язку задачі переносу випромінювання. Таким чином, відповідні похідні при обчисленні функцій відклику будемо визначати, як в ЛТР наближенні. Оскільки аналітичні вирази для похідних (наприклад за T) досить громіздкі, то зручно порахувати η та χ у трьох точках $\mathbf{x} - \Delta\mathbf{x}$, \mathbf{x} , $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, а похідну визначити за параболою чи сплайном, проведеними через ці точки.

Функції відгуку зобразимо двовимірним масивом $(I \times N)$, де N — число точок по глибині, I — число точок по λ для кожної лінії. У [5] запропоновано простий підхід для зменшення розмірності масиву, що є функцією відгуку. Так справді можна ввести дещо видозмінені функції відгуку, що визначають збурення δI , через значення функцій у вузлових точках l , що залишаються після відповідного прорідження масиву. Нехай $\mathbf{M}(N \times N')$ — матриця, що інтерполює значення змінної $\delta\mathbf{x}(N)$ через значення у вузлових точках $\delta\mathbf{x}'(N')$, N' — кількість вузлів: $\delta\mathbf{x} = \mathbf{M}\delta\mathbf{x}'$. Матрицю \mathbf{M} легко отримати, маючи відповідне інтерполяційне співвідношення. Отже, $\delta\mathbf{I} = \mathbf{R}\delta\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{M}\delta\mathbf{x}' = \mathbf{R}'\delta\mathbf{x}'$; матриця \mathbf{R}' має розмірність $(I \times N')$. Таке перетворення дозволяє стиснути інформацію, що часто використовують в інверсних задачах для зменшення розмірності матриць, які доводиться обертати.

IV. ПЕРЕНЕСЕННЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ

Невід'ємною частиною інверсної задачі є розв'язок рівняння переносу випромінювання в межах даної моделі атмосфери чи неоднорідності. Задача доволі спрощується, якщо виконується умова локальної термодинамічної рівноваги, бо в цьому випадку функція джерела відома — вона дорівнює функції Планка. Тоді легко отримати вихідну інтенсивність

$$I(t) = \int_0^{\infty} B(t - \tau) e^{-\tau} d\tau.$$

Для чисельного знаходження інтенсивності ми використовуємо рекурентне співвідношення методу коротких характеристик:

$$I_n = I_{n+1} e^{-\Delta\tau_{n+1,n}} + S_n (1 - e^{-\Delta\tau_{n+1,n}}) + \frac{S_{n+1} - S_n}{\Delta\tau_{n+1,n}} \cdot (1 - (\Delta\tau_{n+1,n} + 1) e^{-\Delta\tau_{n+1,n}}),$$

тобто, знаючи інтенсивність на нижній границі: $I_N = B_N$, легко отримати I_1 .

У не-ЛТР випадку доводиться знаходити сумісний розв'язок рівнянь переносу та статрівноваги: нерівноважну багаторівневу задачу переносу розв'язуємо методом прискореної Λ -ітерації з використанням укладених сіток та прискоренням збіжності [18].

V. ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ АТОМІВ ВОДНЮ ТА ЕЛЕКТРОНІВ

Розв'язуючи рівняння переносу випромінювання, необхідно за відомим хемічним умістом елементів визначати заселеності рівнів n_i атома, який дає досліджувані лінії, причому:

$$\sum_i n_i = \epsilon n_H,$$

де: ϵ — хемічний уміст досліджуваного елемента, а n_H — концентрація атомів водню.

Загальна кількість частинок визначається, в основному, атомами водню, гелію та іншими домішковими атомами й електронами:

$$n_{\text{tot}} = 1.10087 n_H + n_e,$$

де множник 1.10087 урахує наявність інших, крім водню, хемічних елементів в атмосфері Сонця; концентрація електронів n_e , як ми вважаємо, визначається такими елементами: H, C, N, O, Ne, Ca, Fe, Na, ... (всього сімнадцять елементів), які відіграють роль донорів, та від'ємними йонами водню — акцепторами електронів.

Концентрацію електронів обчислюємо із співвідношення Саха–Больцмана, тобто вважаємо, що наявна ЛТР для процесів йонізації атомів водню та атомів, які є поставщиками електронів:

$$n_I/n_{I+1} = C_I \cdot T^{-3/2} U_I/U_{I+1} \exp(\chi_I/kT) \cdot n_e = S_I \cdot n_e,$$

де: n_I, U_I — концентрація атомів та сума за станами для атома I-ї стадії йонізації.

Для водню маємо:

$$n^H = n_{-1}^H + n_0^H + n_1^H,$$

для решти елементів: $n^{\text{el}} = n_0^{\text{el}} + n_1^{\text{el}}$, оскільки в сонячній атмосфері переважно наявні елементи у двох сусідніх стадіях йонізації. Використавши формулу Саха–Больцмана, одержуємо:

$$n_1^H = n^H / (1 + n_e S_0^H + n_e^2 S_0^H S_{-1}^H),$$

$$n_1^{\text{el}} = \epsilon^{\text{el}} \cdot n^H / (1 + n_e S_0^{\text{el}}).$$

Отже,

$$n_e = n_1^H - n_{-1}^H + \sum_i n_{1,i}^{\text{el}}.$$

Таким чином, для визначення n^H та n_e отримаємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} n_{\text{tot}} = 1.10087n^{\text{H}} + n_e, \\ n_e = n^{\text{H}} \cdot f(n_e), \end{cases}$$

де:

$$f(n_e) = 1/(1 + n_e S_0^{\text{H}} + n_e^2 S_0^{\text{H}} \cdot S_{-1}^{\text{H}}) + 1/(1 + (n_e S_{-1}^{\text{H}})^{-1} + (n_e^2 S_0^{\text{H}} \cdot S_{-1}^{\text{H}})^{-1}) + \sum_i \epsilon_i^{\text{el}} / (1 + n_e S_{0,i}^{\text{el}}).$$

Система рівнянь нелінійна. Для її розв'язку ми використали метод лінеаризації:

$$n_e^{\text{old}} + \delta n_e = n^{\text{H,old}} \cdot f(n_e^{\text{old}}) + n^{\text{H,old}} f'(n_e^{\text{old}}) \delta n_e.$$

Звідси:

$$n_e^{\text{new}} = n_e^{\text{old}} + (n^{\text{H,old}} \cdot f(n_e^{\text{old}}) - n_e^{\text{old}}) / (1 - n^{\text{H,old}} \cdot f'(n_e^{\text{old}})).$$

Маючи уточнене значення n_e , з першого рівняння системи визначаємо нове значення n^{H} . Збіжність розв'язку достатньо висока; так, для досягнення точності $\delta n_e / n_e \approx 10^{-3}$ досить декількох ітерацій.

За початкове наближення виберемо: $n_e = n_{\text{tot}}/2$, $n^{\text{H}} = n_{\text{tot}}/(2 \cdot 1.10087)$, тобто вважаємо, що всі елементи повністю йонізовані.

Зауважимо, що система рівнянь для n^{H} та n_e розв'язується для кожної точки за глибиною використаної моделі атмосфери.

VI. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ

Параметри моделі будемо вибирати так, щоб теоретичні профілі, порашовані в межах отриманої моделі, найліпше збігалися зі спостережуваними. Для оцінки близькості профілів уведемо цільову функцію:

$$\chi^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^M (I_i^{\text{obs.}} - \tilde{I}_{1,i})^2 / \sigma_i^2,$$

де: ν — число ступенів вільності (число експериментальних значень мінус число параметрів моделі) або ж тільки число експериментальних точок, σ_i — деякі вагові множники, вони можуть характеризувати, наприклад, похибки вимірювань, або ж їх можна використовувати для зміни внеску різних ділянок лінії в цільову функцію. Якщо ν — число ступенів вільності, а σ_i — похибки вимірювань, то маємо критерій χ^2 , в іншому випадку — найменші квадрати.

Для простоти всі подальші співвідношення будемо записувати тільки для однієї лінії; насправді, в цільову функцію входять дані всіх вибраних ліній. Крім цього, надалі будемо вважати, що цільова функція унімодальна.

Нехай \mathbf{x} — сукупність параметрів, якими зображено модель, а $\delta \mathbf{x}$ — їх варіація, що мінімізує цільову функцію; тоді, розклавши χ^2 в ряд Тейлора з точністю до другого порядку, отримуємо:

$$\chi^2(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \chi^2(\mathbf{x}) + (\nabla^T \chi^2) \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{D} \delta \mathbf{x}, \quad (11)$$

де

$$\partial \chi^2 / \partial x_n = -\frac{2}{\nu} \sum_{i=1}^M (I_i^{\text{obs.}} - \tilde{I}_{1,i}) / \sigma_i^2 \cdot \partial \tilde{I}_{1,i}(\mathbf{x}) / \partial x_n,$$

\mathbf{D} — матриця Гессе, що визначається другими похідними χ^2 , тобто

$$D_{kj} = \frac{2}{\nu} \sum_{i=1}^M 1/\sigma_i^2 \left[\partial \tilde{I}_{1,i} / \partial x_k \cdot \partial \tilde{I}_{1,i} / \partial x_j - (I_i^{\text{obs.}} - \tilde{I}_{1,i}) \partial^2 \tilde{I}_{1,i} / \partial x_k \partial x_j \right].$$

Другий доданок поблизу мінімуму малий; крім цього, для успішно вибраної моделі вираз $(I_i^{\text{obs.}} - \tilde{I}_{1,i})$ дає похибки, що не корелюють між собою. Отже, при сумуванні за i другий доданок пропадає; крім цього, використання других похідних збільшує чутливість моделі до шумів. Ураховуючи сказане, матрицю Гессе зобразимо лише першим доданком:

$$D_{kj} \approx 2/\nu \sum_{i=1}^M 1/\sigma_i^2 \partial \tilde{I}_{1,i} / \partial x_k \cdot \partial \tilde{I}_{1,i} / \partial x_j.$$

Як бачимо, перші та другі похідні досить просто описати відповідними функціями відгуку.

Зі співвідношення (11) маємо:

$$\chi^2(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \chi^2(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{x}^T \nabla \chi^2 + \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{D} \delta \mathbf{x}.$$

З нього легко отримати вираз, яким апроксимується градієнт χ^2 :

$$\delta \chi^2 / \delta x_i = \nabla_i \chi^2 + \sum_j D_{ij} \delta x_j.$$

Оскільки в ділянці мінімуму градієнт χ^2 близький до нуля, то отримуємо систему рівнянь:

$$\mathbf{D} \delta \mathbf{x} = -\nabla \chi^2, \quad (12)$$

розв'язок якої дає шукані збурення, що мінімізують цільову функцію:

$$\mathbf{x}^{\text{new}} = \mathbf{x}^{\text{old}} - \mathbf{D}^{-1} \nabla \chi^2(\mathbf{x}^{\text{old}}).$$

Для чисельного розв'язку системи рівнянь ми використали метод Левенберга–Марквардта [19], який є комбінацією методу найшвидшого спуску (при \mathbf{x} далеких від оптимальних) та формули (12) для знаходження розв'язків поблизу мінімуму. Щоб забезпечити плавний перехід від одного підходу до другого, використовують параметр λ (якщо \mathbf{x} далеко від оптимального значення, то $\lambda > 1$), яким модифікуються діагональні елементи матриці \mathbf{D} : $d_{ii} \rightarrow d_{ii}(1 + \lambda)$.

Матриця \mathbf{D} погано зумовлена і може бути виродженою; при її обертанні ми використовували SVD алгоритм [19]. Виродженість матриці спричинена кореляцією параметрів сусідніх точок атмосфери та відсутністю чутливості деяких шарів до відповідних збурень. Згадана кореляція збільшується при збільшенні кількості вузлів, тобто при збільшенні розмірів матриці \mathbf{D} .

Профілі ліній не однаково чутливі до різних фізичних параметрів; так, чутливість функцій відклику до температури значно більша, ніж чутливість до швидкостей. Щоб урахувати неоднакову чутливість функцій відклику до різних параметрів моделі, ми, як у праці [5], використали модифікований SVD метод.

Таким чином, маючи уточнені значення параметрів моделі, для текучої моделі розв'язуємо задачу переносу випромінювання і знаходимо не-ЛТР коефіцієнти β_i ; а за ними — теоретичні профілі, які знову використовуємо для найліпшої підгонки до спостережуваних даних — χ^2 мінімізації і т. д.

Як критерій зупинки такої ітераційної процедури уточнення параметрів моделі будемо використовувати умову:

$$\begin{cases} |\delta x_i/x_i| < \epsilon, \text{ для } |x_i| > 1 \\ |\delta x_i| < \epsilon, \text{ для } |x_i| \leq 1 \\ \lambda \leq 10^{-4}, \end{cases}$$

яка повинна виконуватись для всіх шуканих параметрів, причому $\epsilon \sim 10^{-3}$.

VII. РЕЗУЛЬТАТИ ТЕСТУВАННЯ

Для тестової задачі ми вибрали три лінії нейтрального заліза: дві слабкі λ 671.032 нм, λ 670.357 нм та помірну λ 649.494 нм, еквівалентні ширини яких 1.24 нм, 4.33 нм та 16.2 нм. Ці лінії дозволяють відтворити стратифікацію параметрів у широкому інтервалі висот; глибини утворення цих ліній (за функціями внеску в емісію): 32 км ÷ 64 км, 27 км ÷ 162 км та 28 км ÷ 560 км відповідно. Профілі вибраних ліній були пораховані для моделі VAL-C [20] в наближенні ЛТР; їх будемо вважати “спостережуваними”. Таким чином, вхідними даними будуть “спостережувані профілі”, інтенсивність випромінювання в континуумах ліній та стратифікація газового тиску згідно з моделлю спокійного Сонця.

Роботу алгоритму ми ініціалізували при різних значеннях температури $T_0 = 4500$ К; 5500 К і 6000 К

та швидкостей $V_{\text{micro}} = 0.5$ км/с; 1 км/с; 2 км/с, $V_{\text{los}} = 0$; 1 км/с; 2 км/с.

Атмосферу Сонця зображали сукупністю параметрів з кроком $\Delta h = 25$ км по глибині, усього $N = 41$ точка. Для зменшення машинного часу ми визначали параметри моделі у вузлах (точках, що залишаються після деякого прорідження); початкове число вузлів становить 11, на другому етапі — 21, а на третьому — 41 (вузли збігалися зі всіма точками по глибині атмосфери). При переході до більшого числа вузлів і для стискання інформації, яку дають функції відгуку, використовували лінійну інтерполяцію, оскільки остання відфільтровує високочастотні шуми, що виникають при ітераційному уточненні параметрів моделі. Застосування параболічної інтерполяції, наприклад, дещо погіршує збіжність.

Розроблений код дозволяє відтворювати температуру, поле швидкостей (V_{los} , V_{micro} , V_{macro}), концентрацію атомів та електронів.

Підгонку профілів проводили двома способами:

1. Методом Левенберга–Марквардта [19];
2. Програмою АМОЕВА [19], яка при знаходженні мінімуму вираховує тільки значення цільової функції.

За часом пошук оптимальних параметрів приблизно однаковий. Але другий підхід працює значно гірше при збільшенні кількості параметрів і їх розмірності; крім цього, він дуже чутливий до початкових ініціалізацій і, основне, не завжди збігається.

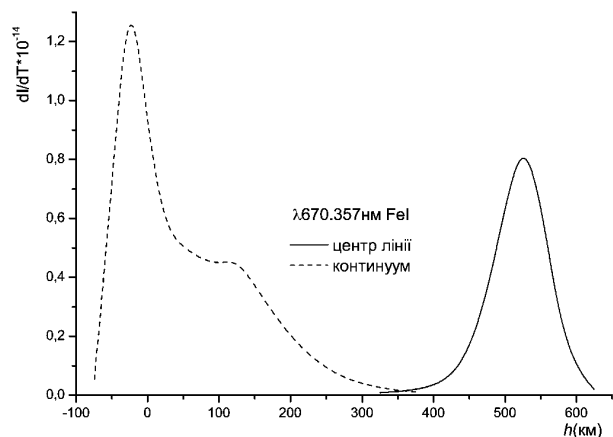


Рис. 1. Функції відгуку за температурою для λ 670.357 нм FeI.

Функції відгуку, що використовуються при мінімізації цільової функції, дають змогу визначати ділянки найбільшої чутливості різних ділянок профілів ліній до параметрів моделі (температури, наприклад). На рис. 1 показані функції відгуку dI/dT для центра лінії λ 649.494 нм та її континууму. Як бачимо, інтенсивність випромінювання в центрі лінії найчутливіша до температури в ділянці температурного мінімуму ≈ 520 км. У крилах лінії максимум чутливості зсувається в глибші шари атмосфери; а в континуумі максимум припадає на $h \approx -20$ км; причому

в бік зовнішніх шарів залежність є більш пологою, що зумовлено чутливістю коефіцієнта поглинання в неперервному спектрі до температури. На поведінці функції відгуку відображаються осциляції температури, що виникають як результат інверсної процедури.

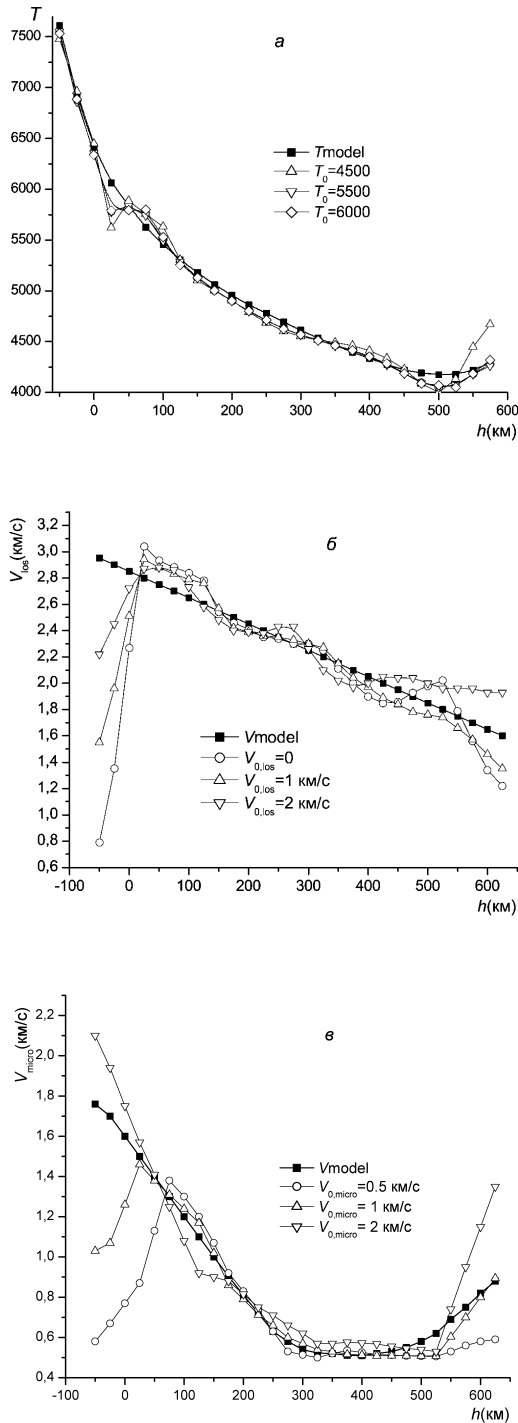


Рис. 2. Результати відтворення параметрів моделі за трьома фотосферними лініями FeI (базова модель — VAL-C) для різних початкових прикидок: а) T_0 і $V_{\text{micro}} = 1$ км/с; б) $V_{0,\text{los}}$ і $T_0 = 6000$ К; в) $V_{0,\text{micro}}$ і $T_0 = 6000$ К.

Результати тесту подано на рис. 2, де наведено стратифікацію параметрів (температура, швидкість уздовж променя зору, мікротурбулентна швидкість) вихідної моделі та відтворення стратифікації цих трьох параметрів при різних початкових прикидках параметрів.

Результати відтворення температури наведено для симетричних профілів, одночасно відтворювали мікротурбулентну швидкість (рис. 2а). Відтворення швидкостей проводили паралельно з відтворенням температурної стратифікації. На рис. 2б і рис. 2в показано результати інверсії для різних початкових значень швидкості і $T_0 = 6000^\circ$ К — для початкової прикидки температури.

Три вибрані профілі ліній FeI дозволяють відтворити температуру та поле швидкостей у фотосфері: від 0 до 500 км. На результати інверсії найбільший вплив має помірні лінії. У центральній частині відтворюваного інтервалу висот середня похибка температури $\sim 50^\circ$, а швидкостей ~ 0.1 км/с, на краю інтервалу похибка зростає до 150° та 0.2 км/с. Центральна частина помірної лінії утворюється в ділянці температурного мінімуму, внаслідок цього ядро ЛТР-профілю цієї лінії через незначну інверсію дещо розмите, що збільшує похибку в районі 500 км. Похибки відтворення параметрів породжені здебільшого незначними осциляціями розв'язків, останні появляються як наслідок поганої зумовленості матриці \mathbf{D} (р-ня (12)). Згадані осциляції розв'язків можна суттєво зменшити, якщо в систему рівнянь увести тихонівські стабілізатори [19], якість відтворення параметрів при цьому зростає, однак необхідно мати а ргіоні інформацію про поведінку розв'язку.

Як видно з рисунків, отримані стратифікації параметрів слабо залежать від початкових прикидок.

При підгонці профілів найбільша похибка не перевищує 0.1 % і то в центральній частині лінії. Якість відтворення швидкості вздовж поля зору погіршується при збільшенні її градієнта; зрозуміло, що найліпші результати отримуємо для $V_{\text{los}} = \text{const}$.

Розроблений підхід дозволяє вивчати неоднорідності як квазістаціонарні утворення, що знаходяться в незбуреній атмосфері, при цьому відпадає проблема визначати глибини утворення ліній і прив'язки отриманих параметрів до відповідних шарів атмосфери. При дослідженні нестационарних процесів, коли горизонтальний баланс тисків не виконується, одержані розробленим кодом дані можна використати як початкове наближення для подальшого уточнення.

Вивчаючи помірні та сильні лінії, необхідно враховувати не-ЛТР ефекти. При цьому для кожної точної моделі доводиться розв'язувати не-ЛТР багаторівневу задачу перенесення випромінювання і за отриманими не-ЛТР параметрами β визначати нові поправки до параметрів моделі; це так зване FDC-наближення [6]. У деяких випадках не-ЛТР проблему можна обійти. Так, для ліній FeI отримано параметричні залежності не-ЛТР поправок для температури [21]. Такі поправки, очевидно, можна використати за

умови, що вони є пораховані для сітки моделей, які досліджуються.

VIII. ВИСНОВКИ

1. Розроблено методику, що дозволяє вивчати квазістаціонарні неоднорідності, які розглядаються вкрапченими в спокійну атмосферу Сонця чи зорі.

2. У межах концепцій методу коротких характеристик запропоновано ефективне зображення функцій відгуку.

3. Пораховані для моделі VAL-C теоретичні профілі, які використано як вхідні дані для розробленого коду, відтворюють стратифікацію параметрів (температура, поле швидкостей), що добре узгоджується з базовою моделлю в ділянці чутливості досліджуваних ліній. Отримані результати слабо чутливі до початкових прикидок параметрів моделі атмосфери.

-
- [1] S. N. Holt, *Astron. Astrophys.* **30**, 185 (1974).
 [2] Р. Б. Теплицкая, И. П. Турова, В. Г. Скочиллов, *Кинем. физ. небес. тел* **8**, 27 (1992).
 [3] J. M. Beckers, R. W. Milkey, *Sol. Phys.* **43**, 289 (1975).
 [4] V. A. Sheminova, *Astron. Astrophys.* **239**, 721 (1998).
 [5] B. Ruiz Cobo, I. C. del Toro Iniesta, *Astrophys. J.* **398**, 398 (1992).
 [6] H. Socas-Navarro, B. Ruiz Cobo, J. Trujillo Bueno, *Astrophys. J.* **507**, 470 (1998).
 [7] H. Socas-Navarro, J. Trujillo Bueno, B. Ruiz Cobo, *Astrophys. J.* **530**, 977 (2000).
 [8] M. Collados, V. Martinez Pillet, B. Ruiz Cobo, I. C. del Toro Iniesta, M. Vazquez, *Astron. Astrophys.* **291**, 622 (1994).
 [9] L. R. Bellot Rubio, B. Ruiz Cobo, M. Collados, *Astrophys. J.* **478**, L45 (1997).
 [10] C. Frutiger, S. K. Solanki, M. Fligge, Bruls J. H. M. I., *Astron. Astrophys.* **358**, 1109 (2000).
 [11] J. M. Borrero, L. R. Bellot Rubio, *Astron. Astrophys.* **385** (3), 1056 (2002).
 [12] B. Ruiz Cobo, I. Rodriguez Hidalgo, M. Collados, *Astrophys. J.* **488**, 462 (1997).
 [13] Sanchez Almeida, *Astrophys. J.* **491**, 993 (1997).
 [14] L. R. Bellot, B. Ruiz Cobo, I. Rodriguez Hidalgo, *Astrophys. J.* **534**, 989 (2000).
 [15] L. R. Bellot Rubio, B. Ruiz Cobo, M. Collador, *Astrophys. J.* **535**, 475 (2000).
 [16] N. Piskunov, O. Kochukhov, *Astron. Astrophys.* **381**, 736 (2002).
 [17] P. Mein, N. Mein, J. M. Malherbe, L. Dame, *Astron. Astrophys.* **177**, 283 (1987).
 [18] М. І. Стоділка, Р. Є. Рикалюк, *Журнал. фіз. досл.* **2**, 427 (1998).
 [19] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipies in Fortran* (Cambridge University Press, New York, 2nd ed., 1992).
 [20] J. E. Vernazza, E. H. Avrett, R. Loeser, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **45**, 635 (1981).
 [21] Н. Г. Щукина, *Кинем. физ. небес. тел* **14**, 415 (1998).

THE INVERSE PROBLEM FOR A STUDY OF SOLAR AND STELLAR ATMOSPHERE INHOMOGENEITIES

M. Stodilka

*Astronomical Observatory of Ivan Franko National University of Lviv
 8 Kyryla i Mefodiya Str., Lviv, UA-79005, Ukraine
 e-mail: sun@astro.franko.lviv.ua*

The present paper deals with the analysis of the inverse problem for the investigation of solar and stellar atmosphere inhomogeneities using Fraunhofer lines; we consider the inhomogeneities to be imbedded in the unperturbed atmosphere. The stratification of inhomogeneity parameters is obtained from the condition of theoretical and experimental profiles bestfit. When solving the problem we used the short characteristics method to represent the response functions. The test results show good coincidence of the reproduced parameters with the reference model and their faint sensibility to the starting guesses.