ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 7, № 1 (2003) с. 1–26

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 7, No. 1 (2003) p. 1–26

ТЕОРІЯ САМОПОДІБНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ. ЧАСТИНА II

О. І. Олємской, Д. О. Харченко
Сумський державний університет
вул. Римського-Корсакова, 2, Суми, 40007, Україна

(Отримано 17 червня 2002 р.)

Показано, що опис еволюції статистичних моментів, які зводяться до параметра порядку, автокорелятора та функції відгуку, приводить до обчислення середнього від степеневої функції з дробовим показником, що досягається використанням властивости самоподібности. У цьому випадку реверсивний фазовий перехід "безлад–лад–безлад" спостерігається при зміні температури. Розвинута схема застосовується з використанням дробових рівнянь Лоренца з адитивними шумами до розгляду задачі про критичність, яка самоорганізовується. Знайдені умови формування лавини показують, що її поведінка критично залежить від інтенсивностей флюктуацій керувального параметра. Згідно з фазовою діяграмою, переривчастий режим критичности, яка самоорганізовується, реалізується, якщо інтенсивності флюктуацій енерґій лавин та складности їхнього ансамблю перевищують критичні значення. Відтворено степеневу форму розподілу за розмірами лавин, для показника якого знайдено зв'язки з динамічним показником, фрактальною вимірністю фазового простору, показником мультиплікативного шуму та параметром неадитивности.

Ключові слова: самоподібність, мультиплікативний шум, білий/кольоровий шум, польоти Леві, субдифузія, фрактальна вимірність, неадитивність, параметр порядку, керувальний параметр, критичність, яка самоорганізовується, дробовий диференціял/інтеґрал.

PACS number(s): 02.50.–r, 47.53.+n, 64.60.Cn, 64.60.Lx, 72.70.+m.

ВСТУП

Характерна особливість польового підходу, викладеного в частині I [1], полягає в тому, що він дозволяє показати поведінку найімовірніших величин. Розділ I присвячений дослідженню основних статистичних моментів — параметра порядку, автокорелятора та двочасової функції Ґріна. У результаті вдається подати еволюцію стохастичної системи не тільки при переходах, індукованих шумом, а також при фазових перетвореннях. У такому викладі ми спочатку досліджуємо простіший випадок білого шуму (розділ I.A), а потім розглядаємо кольоровий шум (розділ I.B). При одержанні виразів для швидкостей параметра порядку та функції Ґріна операція усереднення не викликає обтяжень, тоді як рівняння для зміни автокорелятора містить середнє від степеневої функції з дробовим показником. Його обчисленню присвячено розділ I.A.1. Властивість самоподібности дозволяє виразити дробове середнє через моменти цілого порядку. Як наслідок одержуємо замкнену систему рівнянь для параметра порядку, автокорелятора та функції Ґріна. У підрозділі I.A.2 розглянуто невпорядковану систему, що має фрактальну вимірність $D < 1$. Установлено, що при малому часі автокорелятор змінюється степеневим чином, а при великому — експоненційно прямує до стаціонарного стану. Дослідження впорядкованого стану в розділі I.A.3 показує, що мультиплікативний шум трансформує перехід другого роду в перший. Нелінійний характер еволюції системи поблизу стаціонарної точки, яка відповідає невпорядкованому стану, приводить до того, що експонента Ляпунова набирає форми Цалліса. З іншого боку, властивість самоподібности відображається використанням перетворень Мелліна для опису стаціонарного впорядкованого стану. В результаті з'ясовується, що поблизу цього стану система поводиться аномально — ефективний декремент загасання логарифмічно змінюється з часом. Як і в підрозділі II.B.2 (див. [1]), дослідження кольорового шуму (розділ I.B) досягається методом уніфікованої апроксимації. Його використання в підрозділі I.A.1 показує, що характер поведінки системи в невпорядкованому стані якісно не змінюється. Однак зафарбовування шуму приводить до якісної зміни картини впорядкуваня — з підвищенням температури система спочатку впорядковується, а потім розупорядковується. Зазначений реверсивний перехід спостерігається лише за умови, що час кореляції не перевищує певного критичного значення. Що стосується еволюції системи, то зафарбовування шуму не змінює її характеру, зокрема клас універсальности системи не залежить від часу кореляції.

На відміну від фазового переходу, який забезпечується закритичним значенням керувального параметра, в розділі II досліджено режим самоорганізовуваної критичности, яка не потребує зовнішнього впливу. У такому викладі ми виходимо з найпростішої моделі формування лавини при русі піску нахиленою поверхнею (розділ II.A). Знайдено стаціонарні значення швидкости течії піску та нахилу його поверхні. Врахування флюктуацій зазначених величин у розділі II.B приводить до фазової діяграми, що визначає ділянки формування лавини, рівноважний та змішаний стани. Останній відповідає перервному режиму критичности, яка самоорганізовується і визначається інтенсивностями флюктуацій вертикальної компоненти швидкости та нахилу поверхні. У розділі II.C показано, що адекватне зображення самоподібної поведінки системи потребує використання дробового оберненого зв'язку, який суттєво модифікує систему Лоренца. Для подачі розподілу за розмірами лавин у розділі II.D використано псевдотермодинамічну картину Едвардса, в межах якої самоорганізація приводить до неґативної температури. При цьому знову використано дробову систему Лоренца, де роль параметра порядку відіграє розмір лавини, спряжене поле зводиться до неадитивної складности (complexity), а енерґія, яка не зберігається, є керувальним параметром. Знайдено фазову діяграму, що визначає різні ділянки поведінки системи залежно від інтенсивностей шумів зазначених величин. У результаті з'ясовується, що самоподібний розподіл, властивий критичності, яка самоорганізовується, забезпечується флюктуаціями енерґії піщинок, які рухаються. Дослідження стохастичної системи в розділі II.E показує, що самоподібний розподіл подається, з одного боку, як розв'язок нелінійного рівняння Фоккера–Планка, яке описує поведінку неадитивної системи, а з іншого — відповідає дробовому рівнянню Фоккера–Планка для польотів Леві. Зіставлення розв'язків зазначених рівнянь приводить до співвідношень між показником розподілу за розмірами лавин, фрактальною вимірністю фазового простору, показником мультиплікативного шуму, кількістю рівнянь, необхідних для зображення самоузгодженої поведінки системи в режимі критичности, яка самоорганізовується, динамічним показником та параметром неадитивности Цалліса.

Ця стаття містить другу частину огляду, початого в попередньому номері. Щоб уникнути повторення матеріялу, ми використовуємо рівняння частини I, застосовуючи суцільну нумерацію.

I. ЕВОЛЮЦІЯ СТАТИСТИЧНИХ МОМЕНТІВ

У розділі II (див. [1]) ми дослідили поведінку найімовірніших значень стохастичної змінної, що представляє перехід, індукований шумом. На відміну від цього, наведений нижче розгляд присвячено вивченню статистичних моментів, які характеризують не лише екстремуми функції розподілу, але сильніші зміни її вигляду, наприклад, порушення симетрії. Буде показано, що при цьому залежність моментів від інтенсивности шуму проявляє аномальну поведінку, властиву фазовому перетворенню [2]. Такими моментами є параметр порядку $\eta(t) \equiv \langle x(t)\rangle$, автокорелятор $S(t) \equiv \langle(\delta x)^2\rangle$, $\delta x(t) \equiv x(t) - \langle x(t)\rangle$ та двочасова функція Ґріна $G(t,t') \equiv \langle x(t)x(t')\rangle$. Для спрощення ми будемо розглядати 0-вимірний простір, у якому відсутня залежність від координати. Спочатку (розділ I.A) буде досліджено білий шум [3], а в розділі I.B — кольоровий шум [4].

A. Білий шум

Зазвичай, будемо виходити з рівняння Ланжевена (137), у якому мультиплікативна функція має степеневий вигляд (160), а білий шум задається корелятором (136). Відповідно до цього, корелятор амплітуди мультиплікативного шуму $g(x(t))$ та початкової функції $\zeta(t')$ підпорядковується умові

$$\langle g(x(t))\zeta(t')\rangle = 0, \qquad t \neq t'. \tag{229}$$

Усереднюючи рівняння Ланжевена, для першого моменту одержуємо $\dot\eta = \langle f(x)\rangle$, де $\langle f(x)\rangle \neq f(\eta)$. Сила $f(x) = -\partial F(x)/\partial x$ задається вільною енерґією Ландау (165), де параметр ε відіграє роль безрозмірної температури, відрахованої від критичного значення. Усереднення такої сили дає складову $\langle x^3\rangle$, яка зводиться до розкладу за кумулянтами $\eta\langle x^2\rangle \equiv \eta(\eta^2 + S)$. Як наслідок, еволюційне рівняння параметра порядку набирає вигляду

$$\dot\eta = \eta\left(\varepsilon - \eta^2\right) - 3\eta S, \tag{230}$$

де η, S є функціями часу t.

Відповідно до (136) та (229) маємо

$$\langle g(x(t))x(t')\zeta(t)\rangle = \langle g(x(t))x(t')\rangle\langle\zeta(t)\rangle$$
$$+\langle g(x(t))\zeta(t)\rangle\eta(t') + \langle g(x(t))\rangle\langle x(t')\zeta(t)\rangle = 0.$$

Тоді рівняння для двочасового корелятора має форму

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,t') = \{\varepsilon - 3[\eta^2(t) + S(t)]\}G(t,t'). \tag{231}$$

Отже, проблема полягає у знаходженні рівняння для варіяції $S \equiv \langle x^2\rangle - \eta^2$. Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}x^2 \equiv (x+\mathrm{d}x)^2 - x^2$, де $\mathrm{d}x$ визначається стохастичним диференціяльним рівнянням (131), для $\langle x^2\rangle$ одержуємо

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x^2\rangle = 2\langle xf(x)\rangle + \langle g^2(x)\rangle. \tag{232}$$

Підставляючи сюди визначення мультиплікативної функції та детерміністичної сили, приходимо до середнього $\langle x^{2a}\rangle$ з дробовим степенем, яке слід розкласти за стандартними кумулянтами.

1. *Обчислення дробового середнього*

Доповнимо вихідний розподіл $P(x)$ допоміжним $P_q(x)$, $0 < q < 1$ на основі зв'язку

$$x^q P(x)\mathrm{d}x \equiv yP_q(y)\mathrm{d}y. \tag{233}$$

Тоді нормований розподіл $P_q(y)$ нової стохастичної змінної $y \equiv x^q$ є таким:

$$P_q(y) = q^{-1} y^{(1-q)/q} P(y^{1/q}). \qquad (234)$$

Уводячи позначення $\langle \ldots \rangle_q$ для середнього за $P_q(y)$ та $\langle \ldots \rangle$ за $P(x)$, одержуємо

$$\langle x^q \rangle = \langle y \rangle_q, \qquad (235)$$

$$\langle x^q \rangle \equiv \int x^q P(x) \mathrm{d}x,$$

$$\langle y \rangle_q \equiv q^{-1} \int y y^{(1-q)/q} P(y^{1/q}) \mathrm{d}y.$$

Таким чином, використання розподілу (234) дозволяє знайти середнє від степеневої функції x^q з дробовим показником $q < 1$.

Однорідна функція розподілу самоподібної стохастичної системи має асимптотику [5]:

$$P(x) \simeq A x^{-2a}, \qquad A \equiv \frac{1}{2} |1-2a| \, b^{|1-2a|}, \qquad (236)$$

де стала нормування A задається параметром обрізання $b \to 0$:

$$2 \int\limits_b^{1/b} P(x) \mathrm{d}x = 1. \qquad (237)$$

Застосування (236) для цілого $n > 0$ дає

$$\langle x^{nq} \rangle \equiv A \int x^{nq} x^{-2a} \mathrm{d}x$$

$$= A(1-2a+nq)^{-1} x^{1-2a+nq}. \qquad (238)$$

Тоді з (235) випливає

$$\langle x^{nq} \rangle = \alpha_n(q) \langle x^n \rangle^{p_n(q)}, \qquad (239)$$

де показник $p_n(q)$ та множник $\alpha_n(q)$ задаються виразами:

$$p_n(q) = \frac{1-2a+nq}{1-2a+n},$$

$$\alpha_n(q) = A^{\frac{n(1-q)}{(1-2a+n)}} \; p_n^{-1}(q) \; (1-2a+n)^{p_n(q)-1}. \qquad (240)$$

Тепер ми можемо сформулювати рівняння для автокорелятора $S = \langle x^2 \rangle - \eta^2$, яке ґрунтується на (232), (239), (240). Згідно з розглядом, проведеним у розділі I.B частини I, поведінка системи з мультиплікативним шумом визначається показником a, пов'язаним з фрактальною вимірністю фазового простору D співвідношенням (55). При $1/2 < a < 1$, коли фрактальна вимірність $D < 1$, система завжди невпорядкована, і її поведінка задається лише функцією $G(t,t')$ та автокорелятором $S(t)$. Перший визначається рівнянням (231), а для другого з урахуванням (232), (239), (240) маємо

$$\dot{S} = 2S(\varepsilon - 3S) + \alpha_2 S^{p_2}, \qquad (241)$$

$$\alpha_2 \equiv \alpha_2(a) = A^{2(1-a)p_2} p_2^{-p_2},$$

$$p_2 \equiv p_2(a) = (3-2a)^{-1},$$

де покладено $q = a$, $n = 2$. В ділянці $0 < a < 1/2$, де фрактальна вимірність $D > 1$, система може бути впорядкованою, і замість (241) одержуємо

$$\dot{S} = 2S\left[\varepsilon - 3(\eta^2 + S)\right] + \alpha_1 \eta^{p_1}, \qquad (242)$$

$$\alpha_1 \equiv \alpha_1(2a) = A^{(1-2a)p_1} p_1^{-p_1},$$

$$p_1 \equiv p_1(a) = [2(1-a)]^{-1},$$

де $q = 2a$, $n = 1$.

2. Невпорядкована система

Цей випадок реалізується для показника $a > 1/2$, коли фрактальна вимірність $D < 1$ і еволюція системи задається рівняннями (241), (231), що визначають часові залежності одно- та двочасового кореляторів $S(t)$, $G(t,t')$. Форму першої з них подано на рис. 1a, з якого бачимо, що $S(t)$ монотонно зростає до стаціонарного значення S_0, визначеного рівнянням

$$\varepsilon - 3S_0 + (\alpha_2/2) S_0^{p_2 - 1} = 0. \qquad (243)$$

У границі $S \ll 1$, коли $S^{p_2} \gg S \gg S^2$, рівняння (241) дає степеневу форму часової залежности:

$$S(t) = B t^{1/(1-p_2)},$$

$$B \equiv \left[\frac{A^{2(1-a)}}{p_2(1-p_2)}\right]^{p_2/(1-p_2)},$$

$$p_2 \equiv (3-2a)^{-1}, \qquad (244)$$

де покладено $S(t=0) = 0$. У протилежному разі $S_0 - S \ll S_0$ маємо експоненційну залежність $(S - S_0) \propto \mathrm{e}^{-\lambda t}$, $\lambda \equiv 6(2-p_2)S_0 - 2(1-p_2)\varepsilon$. Згідно з (243), зростання температури ε монотонно збільшує стаціонарну величину S_0 від мінімального значення $(\alpha_2/6)^{1/(2-p_2)}$ (див. рис. 1b).

Часову залежність корелятора $G(t,0)$, що визначається розв'язком рівняння (231), подано на рис. 2 при різних показниках a, температурах ε та однакових початкових умовах. Характерно, що корелятор $G(t,0)$

спочатку досягає максимуму, а потім монотонно спадає до нуля. Зростання ε та a підсилює зазначений максимум.

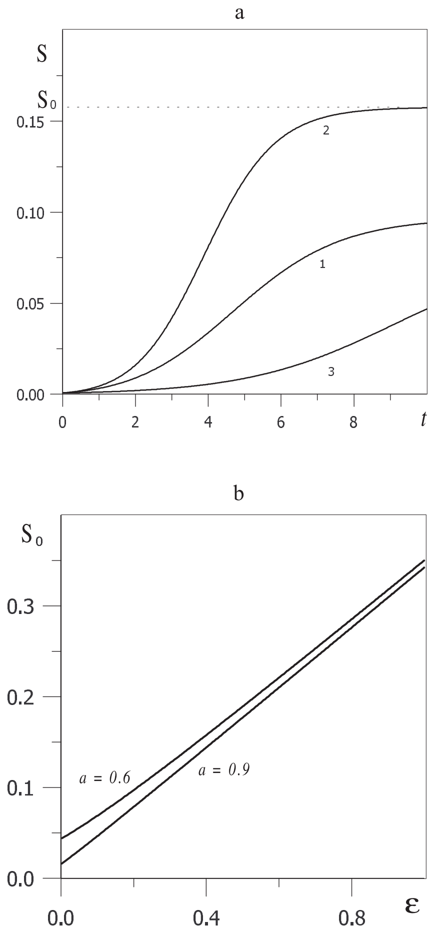

Рис. 1. Поведінка автокорелятора при $a > 1/2$: a) часова залежність $S(t)$ (криві 1, 2, 3 відповідають $a = 0.6$, $\varepsilon = 0.2$; $a = 0.6$, $\varepsilon = 0.4$; $a = 0.9$, $\varepsilon = 0.2$); b) стаціонарна точка S_0 залежно від температури ε для декількох значень показника a.

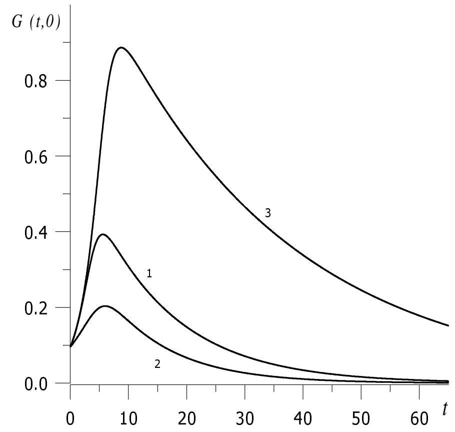

Рис. 2. Часова залежність ґрінівської функції в домені $a > 1/2$ для декількох значень показника a та температури ε (криві 1, 2, 3 відповідають $a = 0.6$, $\varepsilon = 0.4$; $a = 0.6$, $\varepsilon = 0.2$; $a = 0.9$, $\varepsilon = 0.4$.

3. Упорядкована система

Тепер розгляньмо випадок $a < 1/2$, який відповідає фрактальній вимірності фазового простору $D > 1$. При цьому поведінка системи задається диференціяльними рівняннями (230), (231), (242), для аналізу яких доцільно скористатися методом фазової площини. Як видно з фазового портрета на рис. 3a, при малих температурах ε є лише одна притягувальна точка $\eta_0 = 0$, $S_0 = \varepsilon/3$. Зростання ε приводить до біфуркації в точці $\eta_c = [(2-p_1)(4-p_1)^{-1}\varepsilon_0]^{1/2}$, $S_c = (2/3)(4-p_1)^{-1}\varepsilon_0$, що відповідає температурі

$$\varepsilon_0 = \frac{4-p_1}{2-p_1}\left[\frac{3}{8}(2-p_1)\alpha_1\right]^{2/(4-p_1)}. \tag{245}$$

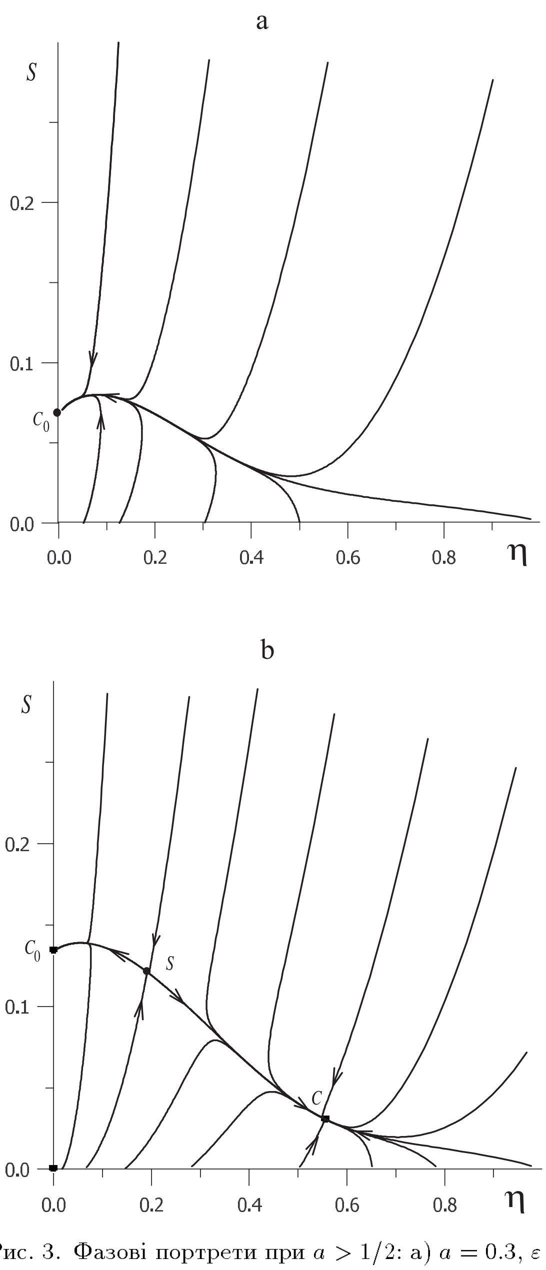

Рис. 3. Фазові портрети при $a > 1/2$: a) $a = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$; b) $a = 0.3$, $\varepsilon = 0.4$.

Як свідчить рис. 4, значення ε_0 нескінченно зростає з наближенням показника a до критичної величини $a = 1/2$. Координати сідла та вузла, що створюються внаслідок біфуркації, визначаються рівняннями:

$$\varepsilon - \eta_0^2 - (3/4)\alpha_1\eta_0^{p_1-2} = 0,$$
$$S_0 = (4\alpha_1)^{-1}(\varepsilon - 3S_0)^{(p_1/2)-1}, \qquad (246)$$

які випливають з (230), (242) при $\dot{\eta} = 0$, $\dot{S} = 0$. Температурні залежності стаціонарних значень η_0, S_0 подано на рис. 5, де штрихова лінія відповідає сідловій точці S, а суцільна — вузловій C.

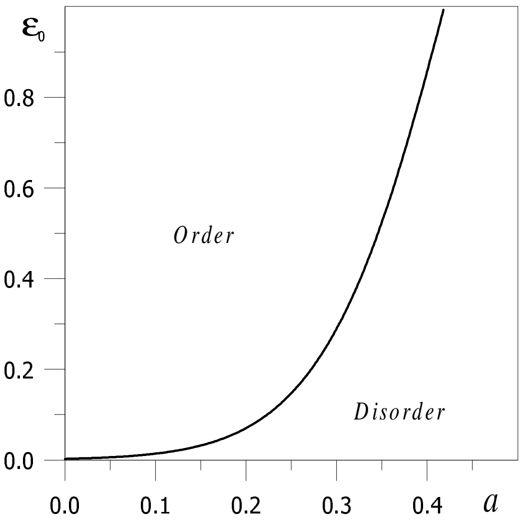

Рис. 4. Фазова діяграма системи.

Характерно, що поданий перехід належить до першого роду, тоді як вихідний x^4-потенціял відповідає неперервному перетворенню. Таким чином, при малих значеннях показника мультиплікативного шуму ($a < 1/2$) флюктуації трансформують рід переходу, тоді як при $a > 1/2$ шум узагалі пригнічує процес упорядкування (див. [2]).

Розгляньмо часові залежності основних статистичних моментів. Спочатку проаналізуймо невпорядкований стан, що відповідає точці C_0 на рис. 3, у межах великих часових інтервалів $t \to \infty$. Наявність середніх дробового порядку в рівнянні (242) не дозволяє використовувати звичайний метод показників Ляпунова, що відповідає експоненційним часовим залежностям. Це можна обійти, використавши узагальнену експоненту Цалліса [6]:

$$\mathrm{e}^{qt} \Rightarrow \exp_q(t) \equiv [1 + (1-q)t]^{1/1-q}, \qquad (247)$$

де параметр q відіграє роль показника Ляпунова. Вона підпорядковується правилу диференціювання

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp_q(t) = \left(\exp_q(t)\right)^q \equiv \exp_q^q(t). \qquad (248)$$

У границях малих та великих часових інтервалів маємо асимптотики:

$$\lim_{t\to 0}\exp_q(t) \to 1 + t,$$
$$\lim_{t\to\infty}\exp_q(t) \to [(1-q)t]^{1/1-q}\,, \qquad (249)$$

першу з яких буде застосовано для визначення множників Ляпунова, а за допомогою другої встановлюємо індекс q. Характерно, що при значеннях параметра $q \neq 1$ експонента Цалліса змінюється за степеневим законом у границі $t \to \infty$.

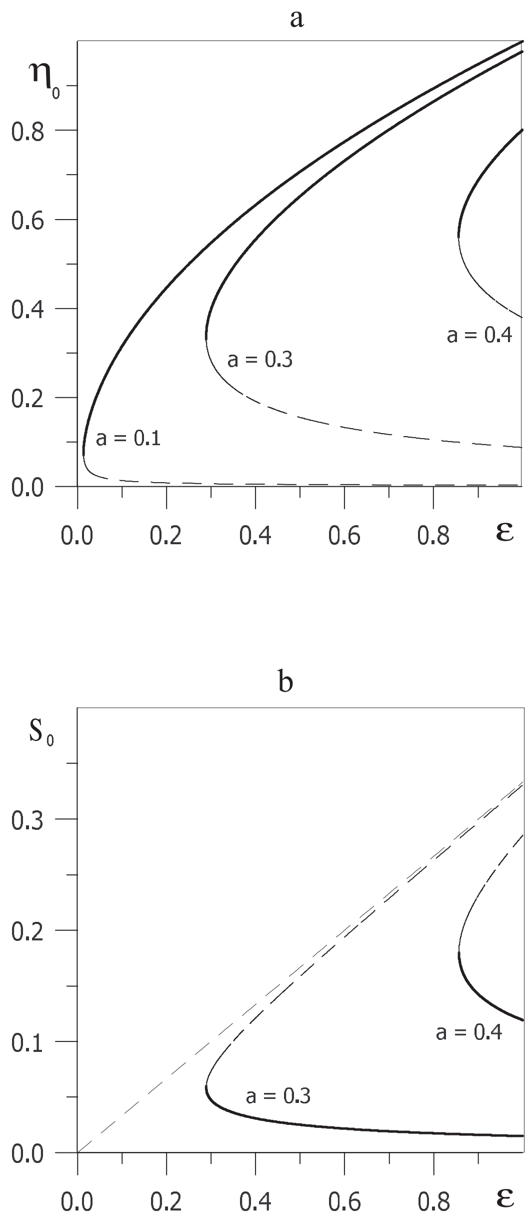

Рис. 5. Стаціонарні стани системи при $a > 1/2$: a) параметр порядку η залежно від температури ε при різних значеннях a; b) автокорелятор S залежно від температури ε при різних значеннях a.

Будемо шукати розв'язки рівнянь (230), (242) у вигляді

$$\eta(t) = m\exp_\mu(t), \quad S(t) = S_0 + n\exp_\nu(t), \tag{250}$$

де $S_0 = \varepsilon/3$ відповідає точці C_0, індекси μ, ν підлягають визначенню. Оскільки множник n визначає величину поправки в розкладі (250), то він підпорядковується умові $n \ll 1$, тоді як значення єдиної складової m може бути довільним. З фізичного погляду, це означає, що параметр порядку поводиться нелінійно, тоді як автокорелятор — лінійно. Підставляючи (250) у (230) та враховуючи складові не вище від першого порядку за амплітудами $m, n \ll 1$, маємо

$$3n\exp_\mu^{1-\mu}(t)\exp_\nu(t) = -1. \tag{251}$$

Тоді, використовуючи (249), у границі великого часового інтервалу одержуємо

$$n^{-1} = 3(1-\mu), \quad \nu = 2. \tag{252}$$

Підставляючи (250) в (242), для m та μ знаходимо

$$\exp_\nu^{1-\nu}(t)\left[2\varepsilon n - \alpha_1 m^{p_1}\exp_\mu^{p_1}(t)\exp_\nu^{-1}(t)\right] = -n. \tag{253}$$

Вище зазначалося, що у границі малого часового інтервалу функція $\exp_\nu^{1-\nu}(t)$ зводиться до 1 і для множника Ляпунова одержуємо

$$3\alpha_1 m^{p_1} = -(1+2\varepsilon). \tag{254}$$

Відповідно, у границі великих масштабів часу маємо $\exp_\mu^{p_1}(t)\exp_\nu^{-1}(t) = \mathrm{const} \equiv p_1^{-1}$, звідки

$$\mu = 1 + p_1 \equiv 1 + [2(1-a)]^{-1}. \tag{255}$$

Таким чином, у границі $t \to \infty$ автокорелятор прямує до стійкого значення S_0 за гіперболічним законом

$$S(t) = S_0 + (2/3)(1-a)t^{-1}, \qquad t \to \infty. \tag{256}$$

Параметр порядку спадає степеневим чином

$$\eta(t) = \eta_0 - [2(1-a)]^{2(1-a)}|m|t^{-2(1-a)}, \qquad t \to \infty, \tag{257}$$

де амплітуда m подається рівнянням (254).

Отже, при малих відхиленнях температури від критичної точки ($\varepsilon < \varepsilon_0$) спостерігається монотонний спад параметра порядку $\eta(t)$, тоді як автокорелятор поводиться немонотонно (див. фазовий портрет на рис. 3a). Складніша поведінка статистичних моментів у ділянці $\varepsilon > \varepsilon_0$, де біфуркація приводить до впорядкування. Як видно з рис. 3b, фазова площина розділяється на дві ділянки, що відповідають малим та великим значенням параметра порядку. У першій поведінка системи аналогічна до попереднього випадку $\varepsilon < \varepsilon_0$. Якщо початкові значення величин забезпечують потрапляння фазової точки до ділянки, що лежить праворуч сепаратриси, то система еволюціонує до притягувального вузла C. Відповідна часова залежність на рис. 6 (див. криву 2) показує критичне уповільнення поблизу сепаратриси C_0SC на рис. 3b, яке проявляється і в ділянці невпорядкованого стану (крива 1).

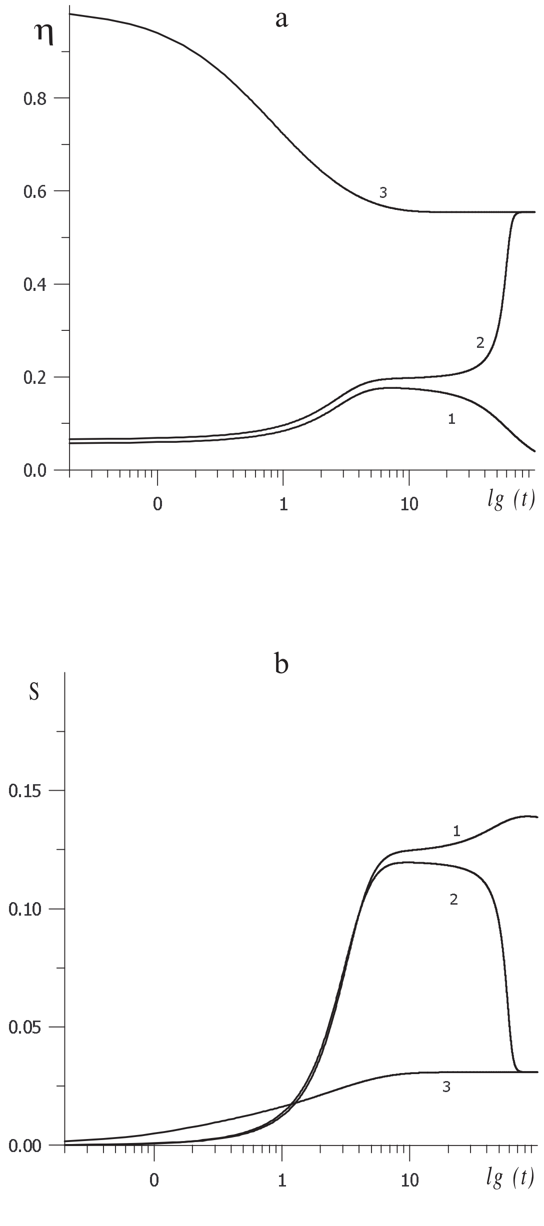

Рис. 6. Часові залежності різних траєкторій фазового портрета рис.3: a) часові залежності параметра порядку зображено при $a = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$ та $S(0) = 0$ (криві 1, 2, 3 відповідають $\eta(0) = 0.057$, $\eta(0) = 0.066$, $\eta(0) = 1.0$); b) часові залежності автокорелятора при $a = 0.3$, $\varepsilon = 0.4$ та $S(0) = 0$ (криві 1, 2, 3 відповідають $\eta(0) = 0.057$, $\eta(0) = 0.066$, $\eta(0) = 1.0$).

Проведений розгляд свідчить про те, що нелінійна поведінка системи поблизу невпорядкованого стану, який відповідає точці C_0, потребує узагальнення експоненти Ляпунова відповідним виразом Цалліса (247). Поблизу вузла C, який відповідає впорядкованому станові, параметр порядку та автокорелятор набувають скінченних значень, що дозволяє використовувати лінійне наближення. У результаті в експоненті (247) стає суттєвою лише друга складова, що подає ядро перетворення Мелліна. Однак якщо експонента Цалліса характеризується одним значенням параметра q, то перетворення Мелліна містить їх спектр:

$$\eta(t) = \eta_0 + \int m_q t^q \mathrm{d}q, \tag{258}$$

$$S(t) = S_0 + \int n_q t^q \mathrm{d}q. \tag{259}$$

Підставляючи ці визначення в лінеаризовані рівняння (230), (242), для амплітуд $m_q, n_q \ll 1$ одержуємо

$$\left(q/t + 2\eta_0^2\right) m_q - 3\eta_0 n_q = 0, \tag{260}$$

$$\left[4\eta_0(\varepsilon - \eta_0^2) - \alpha_1 \eta_0^{p_1-1} p_1\right] m_q + \left[q/t + 2(\varepsilon + \eta_0^2)\right] n_q = 0. \tag{261}$$

Ця система має розв'язок за умови

$$c = (\varepsilon + \eta_0^2)\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\eta_0^2(2\varepsilon - \eta_0^2) - 3\alpha_1\eta_0^{p_1}p_1}{\varepsilon + 2\eta_0^2}}\right], \tag{262}$$

де введено сталу $c = -q/t$. В результаті параметр порядку (258) та автокорелятор (259) змінюються поблизу впорядкованої точки C так:

$$\eta(t) = \eta_0 + m \exp\left(-ct \ln t\right), \tag{263}$$

$$S(t) = S_0 + n \exp\left(-ct \ln t\right), \tag{264}$$

де амплітуди m, n відповідають індексові $q = -ct$.

Часові залежності функції $G(t,0)$ зображено на рис. 7. Коли $\varepsilon < \varepsilon_0$, що відповідає фазовому портрету на рис. 3a, при великих початкових значеннях параметра порядку $\eta(0)$ спостерігається монотонне спадання, а з його зменшенням з'являється максимум (див. рис. 7a). Така поведінка залишається при переході до упорядкованої ділянки $\varepsilon > \varepsilon_0$ (рис. 7b), що відповідає фазовому портретові на рис. 3b.

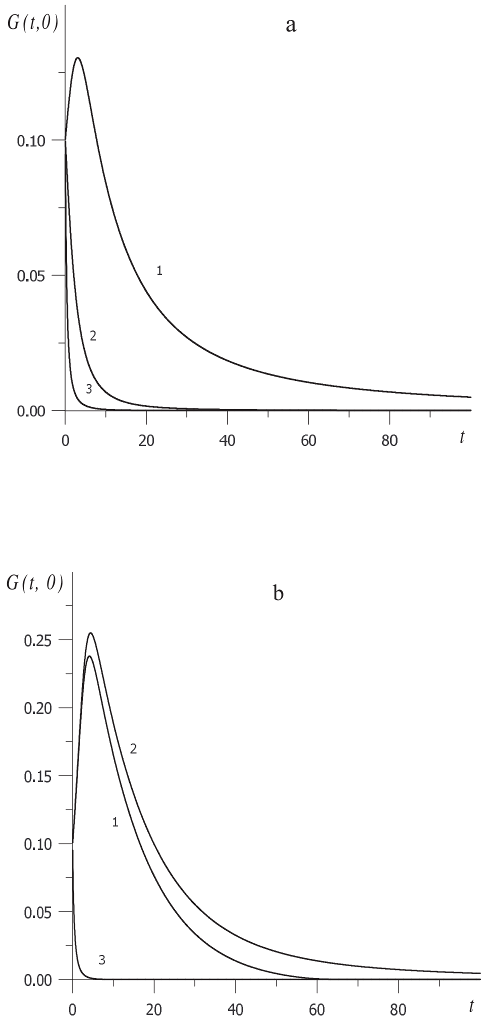

Рис. 7. Часова залежність корелятора $G(t,0)$: a) $a = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$, $S(0) = 0$ (криві 1, 2, 3 відповідають $\eta(0) = 0.098$, $\eta(0) = 0.4$, $\eta(0) = 0.97$); b) $a = 0.3$, $\varepsilon = 0.4$, $S(0) = 0$ (криві 1, 2, 3 відповідають $\eta(0) = 0.057$, $\eta(0) = 0.066$, $\eta(0) = 1.0$).

B. Кольоровий шум

Описуючи переходи, індуковані кольоровим шумом (підрозділ II.B.2 частини I), ми показали, що система реалізує реверсивний перехід — упорядкування протікає лише при значеннях показника мультиплікативного шуму, обмежених верхнім і нижнім значеннями. Тут ми побачемо, що при включенні кореляцій шуму статистична картина, описана в розділі I.A, також приводить до реверсивного перетворення, яке, однак, відповідає обмеженому інтервалові температури, а не показника. На відміну від стаціонарного випадку d-вимірного простору, розглянутого в [2,7–9], будемо досліджувати еволюцію 0-вимірної системи [4].

Як і раніше, опишемо стохастичну систему рівнянням Ланжевена (137), у якому сила задається вільною енерґією (165), мультиплікативна функція має вигляд (160), а шум подається процесом Орнштайна–

Уленбека (189). Використовуючи наближення уніфікованої апроксимації кольорового шуму, одержуємо до рівняння (192), усереднення якого дає

$$\langle \sigma(x)\dot{x} \rangle = \langle f(x) \rangle. \tag{265}$$

Підставляючи сюди вираз (191) для $\sigma(x)$ та виносячи знак похідної за часом за усереднення, після розкладу за кумулянтами отримуємо

$$[\epsilon + \kappa(\eta^2 + S)]\dot{\eta} + \kappa\eta\dot{S} = \eta(\varepsilon - \eta^2) - 3\eta S, \tag{266}$$

де введено позначення:

$$\epsilon = 1 - \varepsilon\tau(1-a), \qquad \kappa = \tau(3-a). \tag{267}$$

Для конструювання рівняння автокорелятора використовуємо допоміжний стохастичний процес $\mathrm{d}y \equiv \sigma \mathrm{d}x$, для якого врахування складових одного порядку за $\mathrm{d}t$ дає $\mathrm{d}y^2 \equiv (y+\mathrm{d}y)^2 - y^2 = \epsilon^2\mathrm{d}x^2 + (2\epsilon\kappa/3)\mathrm{d}x^4 + (\kappa/3)^2\mathrm{d}x^6$. Нехтуючи внеском $x^6 \ll 1$, одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} &2\epsilon\eta\left[\epsilon + 4\kappa\left(\frac{1}{3}\eta^2 + S\right)\right]\dot{\eta} + \epsilon[\epsilon + 4\kappa(\eta^2+S)]\dot{S} \\ &= 2\left[\epsilon\varepsilon(\eta^2+S) - \left(\epsilon - \frac{\kappa\varepsilon}{3}\right)(\eta^4 + 6\eta^2 S + 3S^2)\right] \\ &+\langle x^{2a}\rangle, \end{aligned} \tag{268}$$

де останній член задається виразом (239).

1. *Невпорядкована система*

Як і для білого шуму, невпорядкована система реалізується в ділянці показників $a > 1/2$, що відповідає фрактальній вимірності $D < 1$. Еволюція такої системи задається рівнянням

$$\dot{S}\left(\frac{\epsilon}{2} + 2\kappa S\right) = S\left(\varepsilon - S\left(3 - \frac{\varepsilon\kappa}{\epsilon}\right)\right) + \alpha_2 S^{p_2}, \tag{269}$$

розв'язання якого подано на рис. 8. Бачимо, що автокорелятор монотонно досягає стаціонарного стану, визначеного рівнянням

$$\varepsilon - \left(3 - \frac{\varepsilon\kappa}{\epsilon}\right)S_0 + \alpha_2 S_0^{p_2-1} = 0, \tag{270}$$

де $S_0 \neq -\epsilon/4\kappa$. На рис. 9 наведено залежність стаціонарних станів від температури ε та часу кореляції τ. Бачимо, що зростання обох параметрів ε, τ збільшує стаціонарне значення S_0.

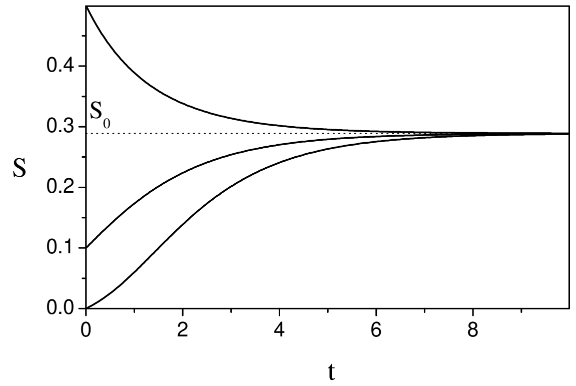

Рис. 8. Часова залежність автокорелятора S при $\varepsilon = 0.6$, $\tau = 0.5$, $a = 0.8$.

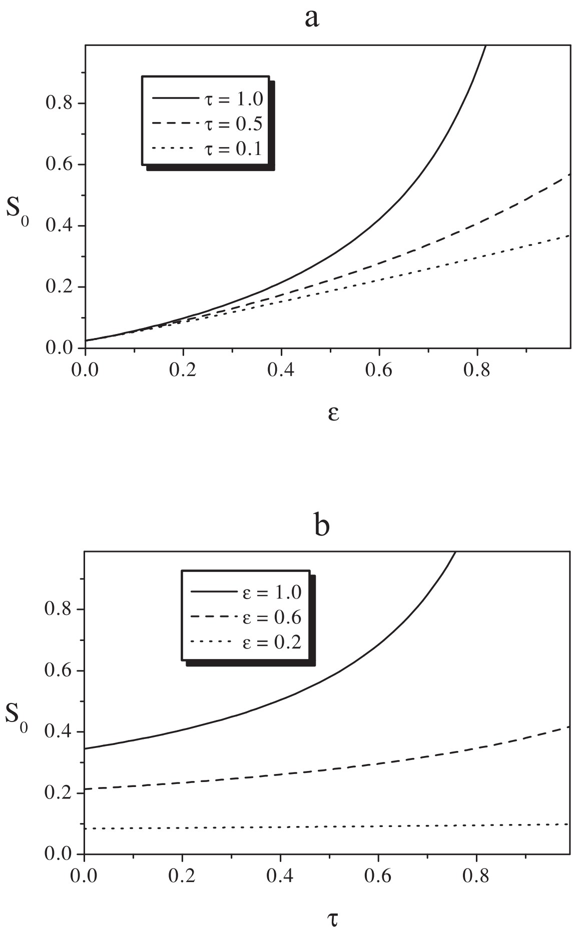

Рис. 9. Стаціонарні стани системи при $a = 0.8$: a) залежність S_0 від керувального параметра при різних τ; b) залежність S_0 від часу кореляції шуму при різних ε.

При малому часі $t \ll 1$ реалізується границя $S \ll 1$, у якій $S^{p_2} \gg S \gg S^2$, і рівняння (269) приводить до степеневої залежности

$$S = Bt^{\frac{1}{1-p_2}}, \quad B = \left[\frac{2(1-p_2)\alpha_2}{\epsilon}\right]^{\frac{1}{1-p_2}}, \quad t \to 0. \tag{271}$$

У протилежному разі $S - S_0 \ll S_0$ маємо експоненційну поведінку

$$S - S_0 \propto \mathrm{e}^{-\lambda t},$$
$$\lambda = \frac{-\varepsilon + S_0(3 - \varepsilon\kappa/\epsilon) - \alpha_2 p_2}{\epsilon/2 + 2\kappa S_0}, \quad t \to \infty. \tag{272}$$

2. Упорядкована система

Перейдімо до випадку $a < 1/2$, коли фрактальна вимірність $D > 1$ і система упорядковується. Тоді її динаміка описується рівняннями:

$$\gamma(\eta, S)\dot{\eta} = \eta[\epsilon - \eta^2 - 3S][\epsilon + 4\kappa(\eta^2 + S)]$$
$$-2\kappa\eta\left[\varepsilon(\eta^2 + S) - \left(1 - \frac{\kappa\varepsilon}{3\epsilon}\right)(\eta^4 + 6\eta^2 S + 3S^2)\right]$$
$$-\kappa\epsilon\alpha_1\eta^{p_1+1}, \tag{273}$$
$$\beta(\eta, S)\dot{S} = \left[\varepsilon(\eta^2 + S) - \left(1 - \frac{\kappa\varepsilon}{3\epsilon}\right)(\eta^4 + 6\eta^2 S + 3S^2)\right]$$
$$\times[\epsilon + \kappa(\eta^2 + S)] - \eta^2\left[\epsilon + 4\kappa\left(\frac{\eta^2}{3} + S\right)\right][\varepsilon - \eta^2 - 3S]$$
$$+[\epsilon + \kappa(\eta^2 + S)]\alpha_1\eta^{p_1}, \tag{274}$$

що визначають параметр порядку та автокорелятор. Тут множники, які задають швидкість зміни величин, мають вигляд:

$$\gamma(\eta, S) = [\epsilon + \kappa(\eta^2 + S)][\epsilon + 4\kappa(\eta^2 + S)]$$
$$- 2\eta^2\kappa\left[\epsilon + 4\kappa\left(\frac{\eta^2}{3} + S\right)\right], \tag{275}$$
$$\beta(\eta, S) = \left[\frac{\epsilon}{2} + 2\kappa(\eta^2 + S)\right][\epsilon + \kappa(\eta^2 + S)]$$
$$- \kappa\eta^2\left[\epsilon + 4\kappa\left(\frac{\eta^2}{3} + S\right)\right]. \tag{276}$$

Одержана система диференціальних рівнянь розв'язується методом фазової площини, використання якого показує, що зафарбовування шуму несуттєво змінює вигляд фазового портрета, наведеного на рис. 3. Розгляньмо спочатку стаціонарний стан, у якому $\dot{\eta} = 0$, $\dot{S} = 0$. Малим значенням параметра ε відповідає єдина особлива точка з координатами

$$\eta_0 = 0, \quad S_0 = \frac{1 - \varepsilon\tau(1 - a)}{1 - 2\varepsilon\tau(1 - 2a/3)}\ \frac{\varepsilon}{3}, \tag{277}$$

що характеризують невпорядкований стан. Подібно до білого шуму підвищення параметра ε приводить до біфуркації в точці $\varepsilon = \varepsilon_0$. У результаті виникають сідло та вузол з координатами, що задаються рівняннями:

$$[\epsilon - \eta_0^2 - 3S_0][\epsilon + 4\kappa(\eta_0^2 + S_0)]$$
$$= 2\kappa\left[\varepsilon(\eta_0^2 + S_0) - \left(1 - \frac{\kappa\varepsilon}{3\epsilon}\right)(\eta_0^4 + 6\eta_0^2 S + 3S_0^2)\right]$$
$$+\kappa\epsilon\alpha_1\eta_0^{p_1}, \tag{278}$$
$$\left[\varepsilon(\eta_0^2 + S_0) - \left(1 - \frac{\kappa\varepsilon}{3\epsilon}\right)(\eta_0^4 + 6\eta_0^2 S_0 + 3S_0^2)\right]$$
$$\times[\epsilon + \kappa(\eta_0^2 + S_0)] = \eta_0^2\left[\epsilon + 4\kappa\left(\frac{\eta_0^2}{3} + S_0\right)\right]$$
$$\times[\varepsilon - \eta_0^2 - 3S_0] - [\epsilon + \kappa(\eta_0^2 + S_0)]\alpha_1\eta_0^{p_1}. \tag{279}$$

Згідно з фазовою діяграмою на рис. 10, при великих показниках a зростання часу кореляцій шуму τ монотонно звужує ділянку впорядкування. З іншого боку, зменшення значення a забезпечує немонотонне розширення ділянки впорядкування, так що при сталому часі τ зростання ε_0 приводить спочатку до впорядкування, а потім до розупорядкування. Таким чином, при значеннях параметра кореляції τ, обмежених зверху і знизу, упорядкований стан виникає також на скінченому відрізку значень температури ε. Інакше кажучи, фазовий перехід проявляє реверсивний характер, однак, на відміну від переходу, індукованого шумом, обмежена ділянка параметрів системи відповідає впорядкованому станові. Найбільше це проявляється на температурних залежностях стаціонарних значень параметра порядку (рис. 11a) та автокорелятора (рис. 12a), тоді як на відповідних залежностях від часу кореляції (див. рис. 11b, 12b) реверсивний характер переходу не проявляється.

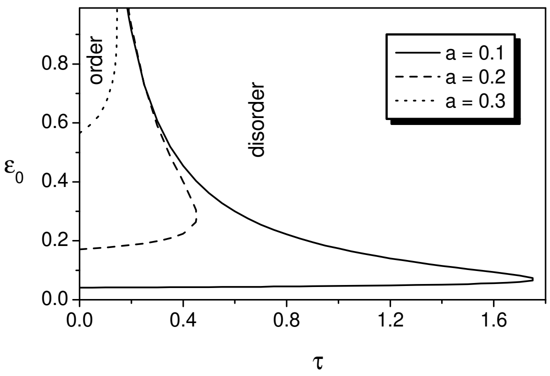

Рис. 10. Фазова діяграма системи.

Дослідження еволюції системи поблизу стаціонарних точок досягається використанням експоненти Цалліса (250) та перетворень Мелліна (258), (259), уведених у підрозділі I.A.3. Поблизу стаціонарної точки, що відповідає невпорядкованій фазі, для амплітуд залежностей (250) одержуємо

$$m^{p_1} = \frac{(\epsilon + \kappa S_0)(\epsilon + 4\kappa S_0)}{\kappa\epsilon\alpha_1},$$

$$n = \frac{1}{\kappa\epsilon p_1}\frac{(\epsilon + \kappa S_0)(\epsilon + 4\kappa S_0)}{\epsilon/2 - \varepsilon + 2\kappa S_0}, \qquad (280)$$

тоді як показники визначаються виразами (252) (255), що відповідають асимптотикам $\eta(t) \propto t^{-2(1-a)}$, $S(t) \propto t^{-1}$, властивим білому шуму. Із фазового портрета, наведеного на рис. 3b, видно, що впорядкування системи потребує перевищення початковим значенням параметра порядку критичної величини η_c, яка відповідає перетинанню сепаратриси з віссю абсцис. Згідно з рис. 13 зростання часу кореляції приводить лише до слабкого збільшення критичного значення η_c. Дослідження еволюції системи поблизу впорядкованого стану показує, що, незважаючи на значне ускладнення формалізму, зафарбовування шуму не змінює вигляду залежностей (263), (264).

Таким чином, зафарбовування шуму приводить до якісної зміни характеру фазового переходу, який стає реверсивним. Однак оскільки клас універсальности не змінюється, то динаміка системи не зазнає якісних змін.

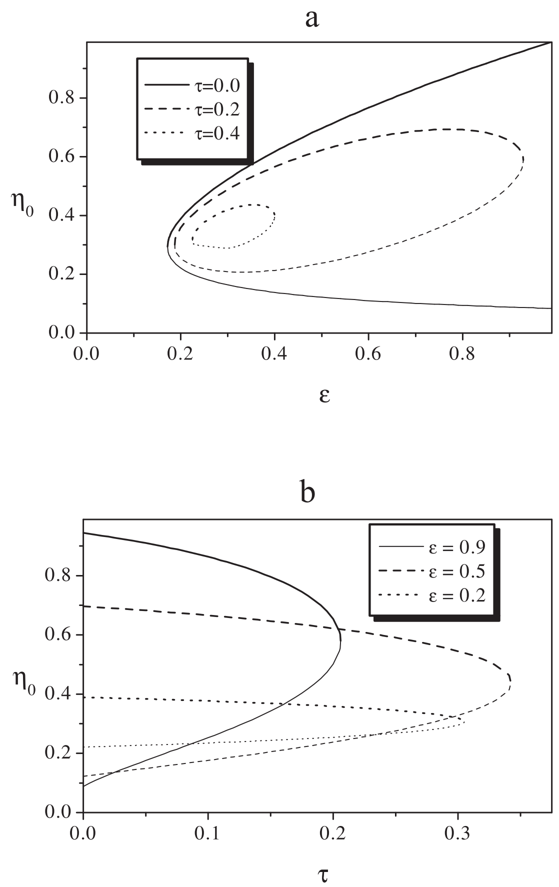

Рис. 11. Стаціонарні стани системи при $a = 0.2$; a) параметр порядку залежно від температури; b) параметр порядку залежно від часу кореляції шуму (тонкі лінії відповідають сідловій стаціонарній точці, товсті — притягувальному вузлу).

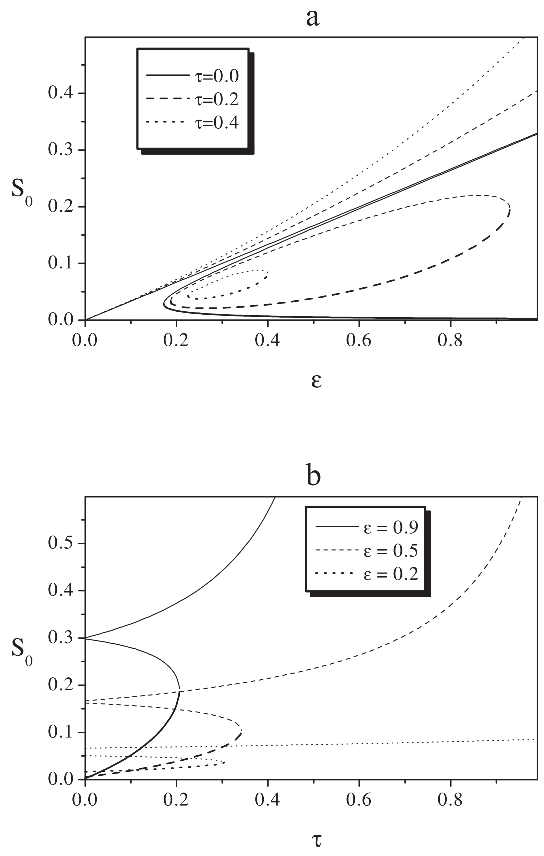

Рис. 12. Стаціонарні стани системи при $a = 0.2$; a) автокорелятор залежно від температури; b) автокорелятор залежно від часу кореляції шуму (тонкі лінії відповідають сідловій стаціонарній точці, товсті — притягувальному вузлу).

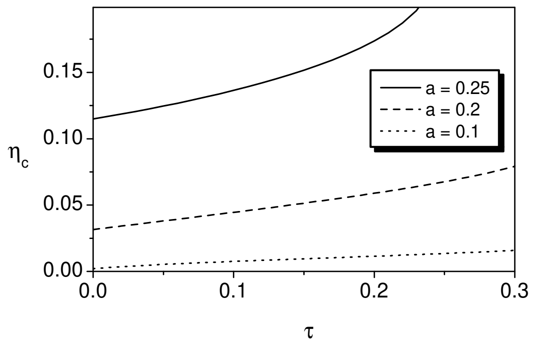

Рис. 13. Критичне значення параметра порядку η_c залежно від часу кореляції шуму τ при $\varepsilon = 0.5$ та різних показниках мультиплікативного шуму a.

II. КРИТИЧНІСТЬ, ЯКА САМООРГАНІЗОВУЄТЬСЯ

Одним із основних уявлень сучасної фізики є концепція фазового переходу, згідно з якою мала зміна керувального параметра (наприклад, температури) може привести до якісної перебудови системи, якщо зовнішній вплив забезпечує критичне значення цього параметра. Основна особливість фазового переходу полягає в тому, що він розвивається критично — утворення нової фази приводить до самоподібної структури, у якій відсутній характерний масштаб [10]. Формально властивість самоподібности виражається однорідністю функції розподілу $P(x)$ за амплітудою x гідродинамічної моди, що відповідає за впорядкування:

$$P(x/x_c) = x_c^{\tau} P(x). \tag{281}$$

Згідно з (281), зміна масштабу x_c випадкової величини x приводить до мультиплікативної зміни ймовірности її реалізації P, яка характеризується показником τ. Уводячи масштабну змінну $y \equiv x/x_c$ та функцію розподілу $\mathcal{P}(y) \equiv y^{\tau} P(y)$, можна переписати (281) у вигляді

$$P(x) = x^{-\tau}\mathcal{P}(y), \tag{282}$$

з якого випливає основна властивість самоподібних систем: у межі великих та малих значень стохастичної змінної x, коли функцію $\mathcal{P}(y)$ можна покласти сталою, розподіл $P(x)$ набирає степеневого вигляду.

Як і всі фазові переходи, процес самоорганізації потребує інтенсивного зовнішнього впливу. Останнім часом, однак, виявлено безліч систем, у яких самоорганізація протікає спонтанно. Яскравим проявом такої поведінки, відомим як критичність, яка самоорганізовується (СОК), є землетруси та снігові лавини. Окрім того, режим СОК проявляється при течії сипких матеріялів нахиленою поверхнею (відома модель sandpile) [11–14], природному відбору в біологічних системах [15], лісових пожежах, протіканні рідини в пористих середовищах і т. ін. (див. [16]). Суттєва особливість СОК полягає в переривчастому характері процесу, що відповідає режимові перемішування: основний час дисипація протидіє спонтанному накопиченню енерґії, і система перебуває в передкритичному стані; спонтанно може виникнути некомпенсоване накачування енерґії, яке приводить до самоорганізації; після цього протягом часу s відбувається розрядка накопиченої енерґії, про яку говорять як про лавину розміром s. Така поведінка системи, що самоорганізовується, визначається функцією розподілу типу (282)

$$\begin{aligned} P(s) &= s^{-\tau}\mathcal{P}(x), \\ x &\equiv s/s_c. \end{aligned} \tag{283}$$

Тут критичний розмір s_c пов'язаний із розміром системи L та характерним часом $t_c \sim L^z$ співвідношенням $s_c \sim L^D \sim t_c^{D/z}$, D — фрактальна вимірність, z — динамічний показник. Згідно з [17], типові значення зазначених показників становлять $\tau = 3/2$, $D = 4$, $z = 2$. З іншого боку, скейлінґові співвідношення, доповнені рівнянням сприйнятливости та середнього розміру лавини, дають вирази [17]

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + \frac{z}{D}, \\ \tau &= 2\left(1 - \frac{1}{D}\right). \end{aligned} \tag{284}$$

Одним з найбільш розвинутих методів, які дозволяють подати основні особливості СОК, є польова схема [17,18], у межах якої роль параметра порядку відіграє густина активних вузлів ρ_a, а керувальний параметр зводиться до поля густини енерґії ζ, яке зберігається. Режим СОК подається як результат конкуренції між інтенсивностями накачування енерґії h та дисипації ϵ. На поведінці системи критично зумовлюється наявність закону збереження: енерґія не зникає, коли $h = \epsilon = 0$, а в моделі sandpile накачується в систему, забезпечуючи стаціонарний режим при $\epsilon > h$, $h \to +0$, $\epsilon \to +0$. Перший випадок характеризує критичний стан [17,18], у якому неоднорідність початкового розподілу енерґії приводить до немарковської складової та просторової залежности параметрів задачі. При вимірності, що перевищує критичне значення $d_c = 4$, цей випадок зводиться до картини фазового переходу Ландау, у межах якої $\rho_a \sim (\zeta - \zeta_c)$ для активного стану ($\zeta > \zeta_c$) та $\rho_a = 0$ — для поглинаючого ($\zeta < \zeta_c$). Принципово іншу картину спостерігаємо в системах, що відповідають моделі sandpile, яка припускає таке накачування енерґії $h \to +0$, що її густина досягає критичного значення ζ_c. У цьому разі середня густина активних вузлів набирає вигляду $\langle\rho_a\rangle = h/\epsilon$, так що сприйнятливість $\chi_0 \equiv \partial\langle\rho_a\rangle/\partial h$ дорівнює $\chi_0 = \epsilon^{-1}$. У результаті функція відгуку на великих відстанях r є такою: $\chi(r) \sim r^{2-d}\mathrm{e}^{-r/\xi}$, де d — вимірність простору, $\xi \sim \epsilon^{-1/2}$ — кореляційна довжина, яка не зводиться до характерного розміру $L \sim \epsilon^{-1/\mu}$. Поведінка системи, що визначається умовами стаціонарности і трансляційної інваріянтности [18], характеризується набором критичних показників $\beta = \gamma = \delta = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 1/2$, $\eta = 0$, властивих теорії середнього поля [17].

Торкаючись інших підходів, зазначимо, що більшість із них була застосована до найпопулярнішої та простої моделі sandpile, яку досліджено як аналітично [19,20], так і чисельно [21–23]. Аналітичне зображення зводиться, як правило, до польових методів, перший з яких [24] ґрунтується на нелінійному рівнянні дифузії. Однак використання однопараметричного підходу не дозволяє врахувати основну особливість систем, які самоорганізовуються, — самоузгоджений характер динаміки лавин, зумовлений зворотним зв'язком між відкритою системою та навколишнім середовищем. Змістовнішу картину дає використання двопараметричних схем [12,13,25]. Це досягається за допомогою калібрувальних полів (типу швидкости руху піску та висоти його поверхні) або матеріяльних полів, що зводяться до кількости піщинок, що рухаються (розміру лавини) і т. ін. Використання теорії середнього поля показує, що самоподібний режим динаміки сипкого середовища відповідає адіябатичній поведінці, при якій характерний час зміни параметра порядку значно перевищує відповідний масштаб керувального параметра. Повна картина самоорганізації потребує використання трипараметричного підходу.

Цю частину присвячено польовому зображенню СОК у межах стандартного підходу [26], який використовує як калібрувальні, так і матеріяльні компоненти.

Показано, що, досліджуючи формування одиночної лавини, слід використовувати перші з цих компонент, роль яких відіграють складові швидкості та нахил сипкої поверхні (див. розділи II.A — II.C). Якщо нас цікавить повна картина СОК, що зводиться до розподілу за розміром лавин, то потрібно розглядати матеріяльне поле, яке являє собою кількість рухомих піщинок (розділи II.D та II.E). На основі наочних зображень у розділі II.A розвинуто самоузгоджену теорію стаціонарного потокового стану, яка зводить задачу формування одиночної лавини до енерґії, яка зберігається в підході [18]. Розділ II.B присвячено врахуванню адитивних шумів для компонент швидкости та нахилу піску. Показано, що зростання інтенсивности флюктуацій приводить до появи лавини навіть при відсутності накачування енерґії, причому шум керувального параметра відіграє критичну роль. Такий флюктуаційний режим характеризує випадок $h \to +0$ [18], при якому розподіл параметра порядку набирає степеневого вигляду з цілочисловим показником. Оскільки насправді цей показник дробовий, то в розділі II.C проведено узагальнення системи Лоренца, яке дає змогу природним шляхом описати реальну картину створення лавини. Згідно з розділом II.D, таке узагальнення дозволяє зобразити поведінку ансамблю лавин. Це досягається на основі підходу Едвардса [27,28], який, за аналогією із звичайною термодинамікою, описує розподіл піщинок за енерґіями неадитивної системи [29]. Таке подання стає можливим при використанні дробової системи Лоренца, де роль параметра порядку відіграє розмір лавини, спряжене поле зводиться до неадитивної складности (complexity), а енерґія, яка не зберігається, є керувальним параметром. Знайдено фазову діяграму, що визначає різні ділянки поведінки системи залежно від інтенсивности шумів зазначених величин. У результаті з'ясовується, що розподіл (283), властивий СОК, забезпечується флюктуаціями енерґії рухомих піщинок. Використання стохастичної системи в розділі II.E показує, що цей розподіл є, з одного боку, розв'язком нелінійного рівняння Фоккера–Планка, який описує поведінку неадитивної системи [29], а з другого — відповідає дробовому рівнянню Фоккера–Планка для процесів Леві, які характеризуються динамічним показником $z \neq 2$ [30]. Зіставлення розв'язків зазначених рівнянь приводить до нетривіяльних зв'язків між показником τ у розподілі (283), фрактальною вимірністю D фазового простору, характеристичним показником мультиплікативного шуму, кількістю рівнянь, необхідних для зображення самопогодженої поведінки системи в режимі СОК, динамічним показником z та параметром неадитивности Цалліса.

A. Формування стаціонарної лавини

Нехай у довільний момент часу t поверхня нахилу піску задається залежністю $y = y_t(x)$. Тоді потік піску описується горизонтальною та вертикальною компонентами швидкости $\dot{x} \equiv \partial x/\partial t$, $\dot{y} \equiv \partial y/\partial t$ та нахилом поверхні $y' \equiv \partial y/\partial x$. У припущенні дисипативного характеру еволюція зазначених степенів вільности описується дебаївськими рівняннями

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\dot{x}}{\tau_x}, \tag{285}$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\dot{y}}{\tau_y^{(0)}}, \tag{286}$$

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = \frac{y'_e - y'}{\tau_S}, \tag{287}$$

де τ_x, $\tau_y^{(0)}$ і τ_S — часи релаксації компонент швидкости та нахилу відповідно. Згідно з (285)—(287), у стані спокою складові швидкости є $\dot{x} = \dot{y} = 0$, а рівноважний нахил $y' = y'_e \neq 0$ відіграє роль керувального параметра, значення якого задається зовнішніми умовами.

Оскільки рух піщинок уздовж різних напрямків не є незалежним, рівняння (285) слід доповнити величиною $f = \dot{y}/\gamma$, що становить силу рідкого тертя вздовж осі y (γ — кінетичний коефіцієнт). У результаті одержуємо

$$\tau_x \ddot{x} = -\dot{x} + a^{-1}\dot{y}, \tag{288}$$

де $a \equiv \gamma/\tau_x$. Згідно з рівнянням дифузії $\dot{y} = Dy''$, що характеризується коефіцієнтом D, сила тертя визначається кривизною сипкої поверхні:

$$f = (D/\gamma)y''. \tag{289}$$

У стаціонарному потоковому стані $\ddot{x} = 0$ розв'язок рівняння (288) визначає дотичну $y = ax + \mathrm{const}$, так що сила тертя $f = \tau_x^{-1}\dot{x}$ пропорційна горизонтальній компоненті швидкости піску. Враховуючи залежність (289) та використовуючи правило диференціювання $\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t = \dot{y}' + y''\dot{x}$, з (287) отримуємо рівняння для зміни нахилу:

$$\tau_S \dot{y}' = (y'_e - y') - (\tau_S/D)\,\dot{x}\dot{y}. \tag{290}$$

Подібно можна знайти рівняння для вертикальної компоненти швидкости:

$$\tau_y \ddot{y} = -\dot{y} + \frac{\tau_y}{\tau_x} y' \dot{x},$$

$$\frac{1}{\tau_y} \equiv \frac{1}{\tau_y^{(0)}} \left(1 + \frac{y'_e}{a} \frac{\tau_y^{(0)}}{\tau_x} \right). \tag{291}$$

Тут ми знехтували внесками вищих порядків просторово-часових похідних та ввели перенормований час релаксації τ_y, залежний від нахилу y'_e, який задається зовнішніми умовами.

Рівняння (288), (290), (291) становлять основу для самоузгодженого опису потоку піску. Їхня відмінна особливість полягає в тому, що перед нелінійними членами в (290), (291) стоять різні знаки, тоді як (288) лінійне. Останнє означає, що на початковій стадії лавина починає поширюватись уздовж дотичної $y = ax + \mathrm{const}$. знак "-" перед останнім членом у рівнянні (290) можна розглядати як вияв принципу Ле-Шательє — оскільки зростання нахилу сприяє формуванню лавини, то компоненти швидкости $\dot{x}$ та $\dot{y}$ протидіють його збільшенню. Позитивний зв'язок $\dot{x}$ та y' з $\dot{y}$ у рівнянні (291) є причиною самоорганізації, що приводить до виникнення лавин.

У безрозмірному вигляді рівняння (288), (290), (291) зводяться до системи Лоренца

$$\dot{u} = -u + v, \tag{292}$$

$$\epsilon \dot{v} = -v + uS, \tag{293}$$

$$\delta \dot{S} = (S_e - S) - uv, \tag{294}$$

де введено параметри $\epsilon \equiv \tau_y/\tau_x, \delta \equiv \tau_S/\tau_x$, масштабовані величини $u \equiv (\tau_y/\tau_x)^{1/2}(\tau_S/D)^{1/2}\dot{x}$, $v \equiv (\tau_y/\tau_x)^{1/2}(\tau_S/D)^{1/2}\dot{y}/a$ та $S \equiv (\tau_y/\tau_x) y'/a$ є компонентами швидкости та нахилом, точка означає похідну за безрозмірним часом t/τ_x. У загальному вигляді система (292)—(294) не має аналітичного розв'язку, але при $\epsilon \ll 1$, $\delta \ll 1$ можна використати адіабатичне наближення, у межах якого ліві частини рівнянь (293), (294) покладаються рівними нулеві. У результаті приходимо до залежности S та v від горизонтальної швидкости u:

$$S = \frac{S_e}{1+u^2}, \qquad v = \frac{S_e u}{1+u^2}. \tag{295}$$

Зі зростанням u в інтервалі від 0 до 1 нахил S монотонно спадає, а швидкість v збільшується (при $u > 1$ маємо $\mathrm{d}v/\mathrm{d}u < 0$, і потік піску стає турбулентним). Підстановка другого рівняння (295) в (292) дає рівняння Ландау–Халатникова

$$\dot{u} = -\frac{\partial E}{\partial u} \tag{296}$$

з кінетичною енерґією

$$E = \frac{u^2}{2} - \frac{S_e}{2} \ln \left(1 + u^2\right). \tag{297}$$

При $S_e < 1$ залежність $E(u)$ є монотонно зростаюча, так що стаціонарна швидкість $u_0 = 0$, і лавина не утворюється. Такий стан відповідає поглинальній структурі, дослідженій у [18]. Якщо нахил S_e перевищує критичне значення $S_c = 1$, кінетична енерґія має мінімум, що відповідає компонентам швидкости $u_0 = v_0 = (S_e - 1)^{1/2}$ та нахилу $S_0 = 1$.

Поданий сценарій задає надкритичний режим формування лавин, який відповідає фазовому переходу другого роду [25]. Це випливає з розвинення кінетичної енерґії (297) за степенями u^2, яке приводить до формули Ландау. В результаті для критичних показників одержуємо значення $\gamma = 1$, $\delta = 3$, $\nu = 1/2$, які збігаються з результатами теорії середнього поля [17]. Однак показник $\beta = 1/2$ у два рази менший, аніж у [17], оскільки використаний параметр порядку (швидкість) не зводиться до кількости активних вузлів.

Формування лавин становить субкритичний режим самоорганізації, якому відповідає фазовий перехід першого роду. Для врахування цієї обставини припустимо, що ефективний час релаксації $\tau_x(u)$ збільшується від значення $\tau_x(1+m)^{-1}$, $m > 0$ до τ_x згідно з рівнянням

$$\frac{\tau_x}{\tau_x(u)} = 1 + \frac{m}{1 + u^2/u_\tau^2}, \tag{298}$$

де $0 < u_\tau < 1$. Тоді кінетична енерґія (297) є складовою

$$\Delta E = \frac{m u_\tau^2}{2} \ln \left(1 + \frac{u^2}{u_\tau^2}\right), \tag{299}$$

а стаціонарні значення швидкости мають вигляд

$$u_0^m = u_{00} \left[1 \mp \sqrt{1 + u_\tau^2 u_{00}^{-4} (S_e - S_c)} \right]^{1/2}, \tag{300}$$

$$2u_{00}^2 \equiv (S_e - 1) - S_c u_\tau^2, \qquad S_c \equiv 1 + m,$$

де верхній знак відповідає нестійкому станові u^m, при якому кінетична енерґія $E + \Delta E$ має максимум, нижній — стійкому u_0. Відповідні значення стаціонарного нахилу дорівнюють

$$S_\pm = \frac{1 + u_{00}^2 \pm \sqrt{\left(1 + u_{00}^2\right)^2 - \left(1 - u_\tau^2\right) S_e}}{1 - u_\tau^2}. \tag{301}$$

Стійкому станові відповідає менше значення S_-, яке плавно спадає від величини

$$S_m^0 = 1 + u_\tau \sqrt{m/(1 - u_\tau^2)} \tag{302}$$

при

$$S_e = S_c^0, \quad S_c^0 \equiv \left(1 - u_\tau^2\right)\left(S_m^0\right)^2, \tag{303}$$

до граничного значення $S_- = 1$ при $S_e \to \infty$. Залежності u_0, u^m та S_0 від S_e подано на рис. 14.

Згідно з описаною картиною, формування лавин подає яскраво виражене гістерезисне явище: середовище, яке спочатку перебуває у стані спокою, починає рух тільки при нахилі, що перевищує критичне значення $S_c = 1+m$, тоді як нахил, що відповідає зупинці лавини, характеризується меншим значенням S_c^0 (див. (302), (303)). Максимально гістерезис проявляється в границі $\tau_S/\tau_x \to 0$, а зі збільшенням параметра адіябатичности $\delta \equiv \tau_S/\tau_x$ петля гістерезису звужується. Що стосується використаної вище умови малости відношення $\tau_y/\tau_x \equiv \epsilon$, то його зростання приводить до зміни фазового портрета лише на стадії швидкої зміни величин, тоді як універсальна ділянка не змінюється.

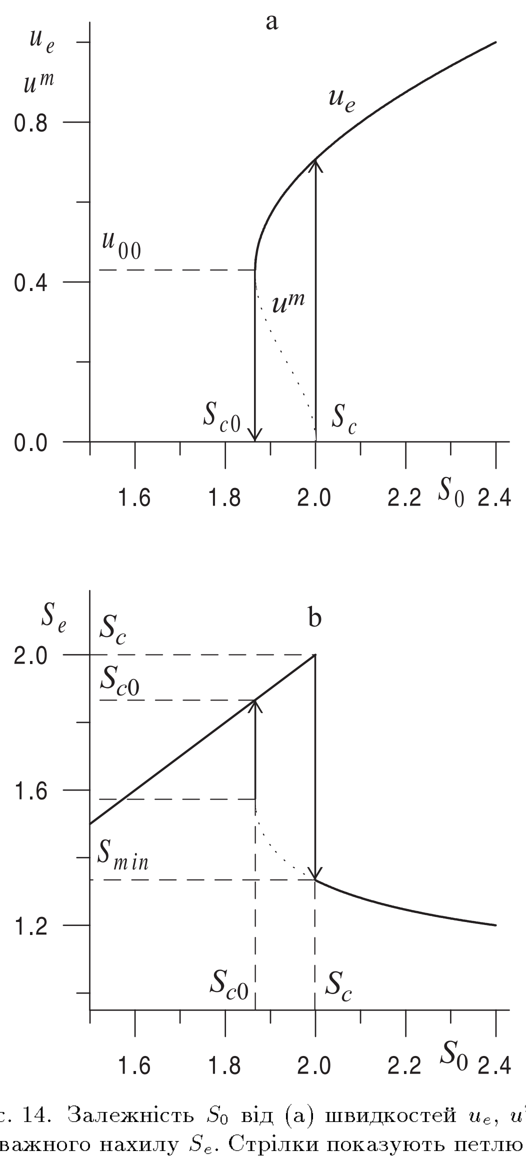

Рис. 14. Залежність S_0 від (a) швидкостей u_e, u^m, (b) рівноважного нахилу S_e. Стрілки показують петлю гістерезису.

B. Флюктуаційне формування лавини

Розгляньмо вплив адитивних шумів на складові швидкости u, v та нахил S. З цією метою введемо в праві частини рівнянь (292)—(294) стохастичні складові $I_u^{1/2}\xi$, $I_v^{1/2}\xi$, $I_S^{1/2}\xi$ (тут інтенсивності I_u, I_v, I_S вимірюються в одиницях $(\tau_x/\tau_y)(D/\tau_S)$, $a^2(\tau_x/\tau_y)(D/\tau_S)$, $a^2(\tau_x/\tau_y)$ відповідно, $\xi(t)$ — δ-корельована стохастична змінна) [31]. Тоді в межах адіябатичного наближення рівняння (293), (294) приводять до часових залежностей

$$\begin{aligned} &v(t) = \bar{v} + \tilde{v}\xi(t), \quad S(t) = \bar{S} + \widetilde{S}\xi(t); \\ &\bar{v} \equiv S_e u d(u), \quad \tilde{v} \equiv \sqrt{I_v + I_S u^2}\; d(u), \\ &\bar{S} \equiv S_e d(u), \quad \widetilde{S} \equiv \sqrt{I_S + I_v u^2}\; d(u), \\ &d(u) \equiv (1+u^2)^{-1}. \end{aligned} \tag{304}$$

Тут детерміністичні складові зводяться до рівнянь (295), а флюктуаційні випливають із відомої властивости адитивности дисперсій ґауссівських випадкових величин [31]. Таким чином, синерґетичний принцип підпорядкування перетворює адитивні шуми вертикальної складової швидкости v та нахилу S в мультиплікативні. В результаті вирази (292), (304), (304) дають рівняння Ланжевена

$$\dot{u} = f(u) + \sqrt{I(u)}\;\xi(t), \quad f \equiv -\frac{\partial E}{\partial u}, \tag{305}$$

де сила f задається енерґією E, що визначається формулою (297), а ефективна інтенсивність шуму задається рівнянням

$$I(u) \equiv I_u + \left(I_v + I_S\ u^2\right) d^2(u), \tag{306}$$

яке випливає із зазначеної властивости адитивности інтенсивностей шумів. Щоб уникнути непорозуміння, слід відзначити, що підстановка (304), (304) у (292) приводить до стохастичної добавки

$$\left[I_u^{1/2} + \left(I_v^{1/2} + I_S^{1/2}u\right) d(u)\right]\xi(t), \tag{307}$$

квадрат амплітуди якої відрізняється від ефективної інтенсивности шуму (306). Щобільше, безпосереднє використання адіябатичного наближення в рівнняннях (293), (294) дає флюктуаційні добавки залежностей (304) у вигляді $\tilde{v} \equiv (I_v^{1/2} + I_S^{1/2}u)d(u)$, $\widetilde{S} \equiv (I_S^{1/2} - I_v^{1/2}u)d(u)$, що відрізняються від (304). Остання з цих добавок явно нефізична, оскільки викликає повну компенсацію флюктуацій нахилу $\widetilde{S}$ при горизонтальній складовій швидкости $u = \sqrt{I_S/I_v}$. Формальною причиною зазначеної суперечности є неможливість застосувати звичайні методи аналізу до рівнянь Ланжевена (див. [31]).

Рівняння Ланжевена (305) має набір розв'язків, розподіл яких задається відповідним рівнянням Фоккера–Планка

$$\frac{\partial P(u,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{-f(u)P(u,t) + \frac{\partial}{\partial u}\left[I(u)P(u,t)\right]\right\}. \tag{308}$$

У стаціонарному стані ймовірність розподілу $P(u,t)$ не залежить від часу, і вираз, що стоїть у фігурних дужках правої частини (308), зводиться до нуля. В результаті приходимо до стаціонарного розподілу

$$P(u) = Z^{-1}\exp\{-U(u)\}, \tag{309}$$

де Z — нормувальна стала. Ефективна енерґія

$$\begin{aligned} U(u) &= \ln I(u) - \int\limits_0^u \frac{f(u')}{I(u')}\mathrm{d}u', \\ f &\equiv -\frac{\partial E}{\partial u}, \end{aligned} \tag{310}$$

визначається початковим значенням (297) та інтенсивністю шуму (306). Комбінуючи ці вирази, можна знайти явний вигляд залежности $U(u)$, однак вона надто велика, щоб її наводити тут. Рівняння, що визначає положення екстремумів цієї залежности та розподілу $P(u)$, має вигляд

$$\begin{aligned} &x^3 - S_e x^2 - 2I_S x + 4(I_S - I_v) = 0, \\ &x \equiv 1 + u^2. \end{aligned} \tag{311}$$

Таким чином, вигляд розподілу $P(u)$ не залежить від інтенсивности шуму I_u горизонтальної складової швидкости u і визначається величиною нахилу S_e та інтенсивностями шумів I_v, I_S вертикальної складової v та нахилу S. Тому без утрати загальности можна покласти $I_u = 0$, і рівняння (297), (310), (306) приводять до виразу для ефективної енерґії

$$\begin{aligned} U(u) &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{2} + (2 - S_e - i)u^2 \right. \\ &\left. + (1-i)(1 - S_e - i)\ln(i + u^2)\right] \\ &+ I_S \ln[g_S^2(u) + i g_v^2(u)], \\ i &\equiv I_v / I_S. \end{aligned} \tag{312}$$

Згідно з (311), ефективна енерґія (312) набуває мінімального значення в точці $u = 0$, якщо нахил S_e не перевищує критичного значення

$$S_c = 1 + 2I_S - 4I_v, \tag{313}$$

яке зростає зі збільшенням інтенсивности флюктуацій нахилу та зменшується зі зростанням інтенсивности флюктуацій вертикальної швидкости. При цьому пісок перебуває в спокої. Умови створення лавини легко знайти у простому випадку $I_v = 0$, коли горизонтальна швидкість є такою:

$$u_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\left[S_e - 3 + \sqrt{(3 - S_e)^2 + 4(2S_e - 3 + 2I_S)}\right], \tag{314}$$

який випливає з (311) після вилучення кореня $u^2 = 0$. Мінімальне значення цієї швидкости

$$u_c^2 = \frac{1}{2}\left[(S_e - 3) - \sqrt{(S_e + 7)(S_e - 1)}\right] \tag{315}$$

досягається на прямій (313), де $I_v = 0$. При $S_e < 4/3$ корені u_c стають комплексними, а при $S_e > 4/3$ — дійсними, причому $u_+ = -u_-$. Таким чином, у трикритичній точці

$$\begin{aligned} S_e &= 4/3, \\ I_S &= 1/6 \end{aligned} \tag{316}$$

відбувається створення лавини. При виконанні умови (313) корінь $u = 0$ відповідає мінімуму ефективної енерґії (312) для $S_e < 4/3$, тоді як при $S_e > 4/3$ він відповідає максимуму, а корені $u_\pm$ — симетричним мінімумам.

Знайдемо умови існування коренів $u_\pm$. Поклавши дискримінант рівняння (311) рівним нулеві, одержуємо вирази

$$\begin{aligned} &I_S = 0, \\ &I_S^2 - I_S\left[\frac{27}{2}\left(1 - \frac{S_e}{3}\right) - \frac{S_e^2}{8}\right] + \frac{S_e^3}{2} = 0, \end{aligned} \tag{317}$$

останній з яких дає залежність

$$\begin{aligned} 2I_S &= \left[\frac{27}{2}\left(1 - \frac{S_e}{3}\right) - \frac{S_e^2}{8}\right] \\ &\pm \left\{\left[\frac{27}{2}\left(1 - \frac{S_e}{3}\right) - \frac{S_e^2}{8}\right]^2 - 2S_e^3\right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{318}$$

Вона відповідає дзвоноподібній кривій $S_e(I_S)$, яка перетинає горизонтальну вісь у точках $I_S = 0$ та $I_S = 27/2$ і набуває максимального значення $S_e = 2$ при

$$I_S = 2. \tag{319}$$

При $I_v = 0$ ця крива торкається прямої (313) у точці (316).

Розгляньмо тепер загальний випадок, коли існують обидва мультиплікативні шуми $I_v, I_S \neq 0$. При цьому величини I_S, S_e, u^2, U замінюються перенормованими значеннями $\tilde{I} \equiv I_S/a^2$, $\tilde{S}_e \equiv S_e/a$, $\tilde{u}^2 = (1+u^2)/a - 1$, $\widetilde{U}/\tilde{I}$, де $a = 1 - i$, $i \equiv I_v/I_S < 1$. У результаті дія шуму вертикальної швидкости v зводиться до перенормування екстремального значення горизонтальної складової u величиною $(a^{-1}-1)^{1/2}$, так що ділянка розходження $\tilde{u} \approx 0$ стає недосяжною.

Із урахуванням зазначених замін умова екстремуму загальної енерґії (312) приводить до рівняння $u = 0$ та (311). Його аналіз показує, що умова існування нульового розв'язку визначається виразом (313), а трикритична точка має координати:

$$S_e = \frac{4}{3}(1 - I_v),$$
$$I_S = \frac{1}{6}\left(1 + 8I_v\right). \tag{320}$$

При фіксованих значеннях інтенсивности I_v фазова діяграма набирає вигляду (рис. 15), де лінії 1, 2 відповідають утраті стійкости системи (вище від прямої 1 є стійкий потоковий стан, нижче від кривої 2 — рівноважний, а між ними розміщується а двофазна ділянка). При $I_v < 1/4$ ситуація подібна випадку $I_v = 0$ — лавина виникає тільки при флюктуаціях нахилу I_S, які перевищують критичне значення (див. рис. 15a). Зі зростанням флюктуацій вертикальної швидкости до $I_v > 1/4$ ситуація змінюється докорінно — навіть при відсутності флюктуацій нахилу I_S стає можливим спонтанне виникнення лавини (див. рис. 15b). Згідно з (320), трикритична точка потрапляє на вісь I_S при интенсивності $I_v = 1$, а з перевищенням критичного значення $I_v = 2$ стаціонарний стан рівноваги взагалі зникає (рис. 15c).

Наведений розгляд показує, що дисипативна динаміка потоку піску на поверхні подається схемою Лоренца, в межах якої горизонтальна та вертикальна складові швидкости відіграють роль параметра порядку та спряженого поля, а нахил поверхні є керувальним параметром. Дослідження, проведене в розділі II.A, демонструє, що для формування лавини за відсутности шуму нахил y_e', що задається зовнішніми умовами, має перевищувати критичне значення

$$y_c' = (\tau_x \tau_y)^{-1/2}\gamma. \tag{321}$$

У результаті найбільш здатними до створення стаціонарної лавини є сипкі середовища з малими значеннями кінетичного коефіцієнта γ та великими часами релаксації τ_x, τ_y швидкости течії. При відсутності шуму формування лавини становить фазовий перехід, зумовлений зовнішнім впливом, який забезпечує нахил, що перевищує критичне значення (321).

При включенні адитивних шумів стохастичний вплив горизонтальної швидкости стає несуттєвим, а флюктуації вертикальної швидкости та нахилу набувають мультиплікативного характеру. Для безрозмірних інтенсивностей шумів межа ділянки створення лавин задається рівнянням

$$I_S = -\frac{1}{2} + 2I_v, \tag{322}$$

що випливає з (311) при $x = 1$ ($u = 0$) та $S_e = 0$. Таким чином, за відсутности флюктуацій нахилу лавина створюється, якщо інтенсивність шуму вертикальної швидкости перевищує значення

$$I_{v0} = \frac{1}{4}\,\frac{D\gamma^2}{\tau_x \tau_y \tau_S}, \tag{323}$$

яке відповідає точці O на рис. 16. Загалом формування лавини забезпечується флюктуаціями як вертикальної швидкости, так і нахилу поверхні піску, інтенсивності яких обмежено умовою (322). Змішаний стан виникає при досяганні значень

$$I_{v1} = \frac{D\gamma^2}{\tau_x \tau_y \tau_S},$$
$$I_{S1} = \frac{3}{2}\frac{\gamma^2}{\tau_x \tau_y}, \tag{324}$$

що відповідають трикритичній точці T на рис. 16. Якщо інтенсивність шуму вертикальної швидкости перевищує ще більше значення

$$I_{v2} = 2\,\frac{D\gamma^2}{\tau_x \tau_y \tau_S}, \tag{325}$$

яке відповідає флюктуаціям нахилу $I_{S2} = 6\gamma^2/\tau_x\tau_y$ (точка C на рис. 16), то стійкий стан рівноваги стає неможливим.

Зазначимо, що режим СОК визначається радше не потоковим станом лавини, а переривчастим режимом її формування, який відповідає ділянкам співіснування фаз A та N (лавиноутворення та відсутности лавини) на рис. 15, 16. Згідно з проведеним аналізом, зазначений переривчастий режим реалізується в ділянці, обмеженій прямою (322) та кубічною параболою

$$I_v = I_S\left[1 - \left(\frac{2}{27}\right)^{1/2}\sqrt{I_S}\right], \tag{326}$$

де використано безрозмірні величини I_v, I_S. Відповідна фазова діяграма, що показана на рис. 16, має нетривіяльний вигляд (особливо в ділянці $I_{v1} \leq I_v \leq I_{v2}$).

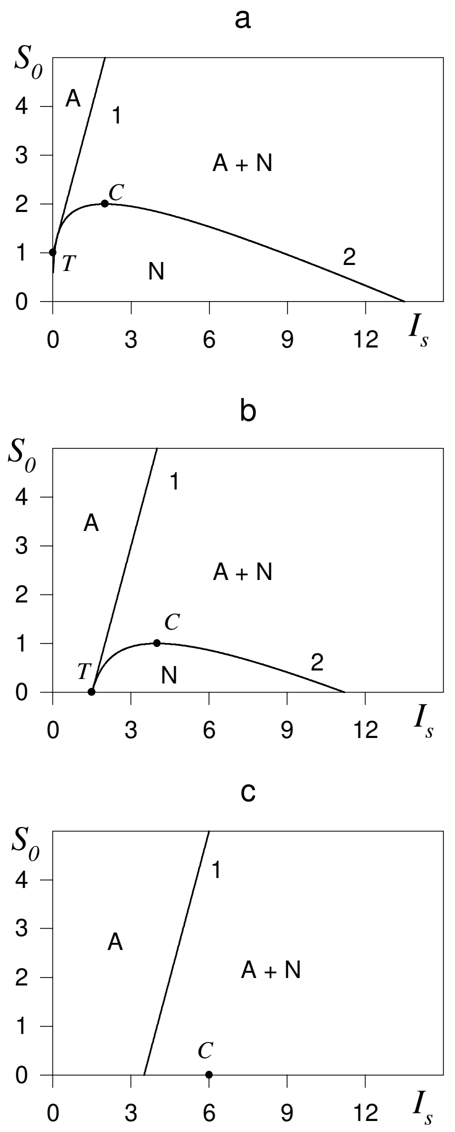

Рис. 15. Фазова діяграма при фіксованих значеннях I_v: a) $I_v = 0$; b) $I_v = 1$; c) $I_v = 2$. Криві 1 та 2 визначають межу фаз стабільної лавини (A) та її відсутности (N).

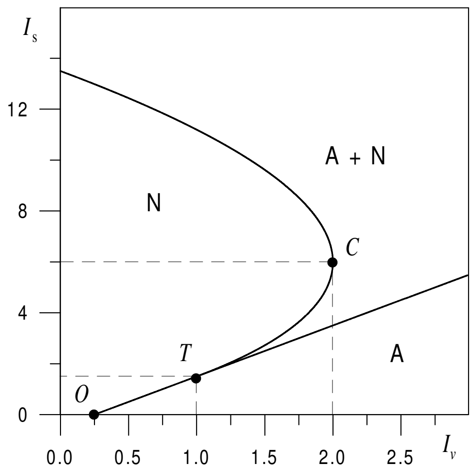

Рис. 16. Фазова діяграма системи при $S_0 = 0$ та I_s, $I_v \neq 0$ (T — трикритична точка; C — критична точка).

C. Дробова система Лоренца

Для подальшого дослідження системи, яка самоорганізовується, слід знайти розподіл імовірности (309), вигляд якого визначається ефективною енерґією (310). При $I_u, I_S \ll I_v$ одержуємо вираз

$$P(u) \approx I_v^{-1}(1+u^2)^2 \exp\left\{ I_v^{-1} \int f(u)(1+u^2)^2 \mathrm{d}u \right\},$$

$$f(u) \equiv -u + \frac{S_e u}{1+u^2}, \tag{327}$$

що суттєво відрізняється від однорідної функції (283) самоподібної системи. Флюктуації нахилу $I_S \gg I_u, I_v$ приводять до розподілу:

$$P(u) \approx I_S^{-1} \left(\frac{1+u^2}{u} \right)^2 \times \exp\left\{ I_S^{-1} \int \frac{f(u)(1+u^2)^2}{u^2} \mathrm{d}u \right\} \sim u^{-2}. \tag{328}$$

Таким чином, зростання інтенсивности флюктуацій нахилу зумовлює встановлення самоподібного режиму, якому відповідає однорідна функція з цілим показником 2.

Однак у загальному випадку цей показник повинен бути не цілим, а дробовим (так, у розподілі (283) маємо $\tau \approx 3/2$). Щоб вилучити таке обмеження, замінимо параметр порядку u в нелінійних складових рівнянь (292)–(294) степеневим множником u^a з показником $0 \leq a \leq 1$. Тоді з урахуванням стохастичних добавок основні рівняння набирають вигляду

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u + v + \sqrt{I_u}\, \xi(t), \\ \epsilon \dot{v} &= -v + u^a S + \sqrt{I_v}\, \xi(t), \\ \delta \dot{S} &= (S_e - S) - u^a v + \sqrt{I_S}\, \xi(t), \end{aligned} \tag{329}$$

де використано безрозмірні змінні. Фізичний сенс проведеної заміни полягає в тому, що вимога самоподібности досягається в межах припущення про дробовий характер позитивного та неґативного зворотних зв'язків. Тоді умова адіябатичности $\epsilon, \delta \ll 1$ приводить до рівняння Ланжевена (пор. з (305))

$$\dot{u} = f_a(u) + \sqrt{I_a(u)}\xi(t), \tag{330}$$

де сила $f_a(u)$ та інтенсивність шуму $I_a(u)$ визначаються як

$$f_a(u) \equiv -u + S_e u^a d_a(u),$$
$$I_a(u) \equiv I_u + \left(I_v + I_S u^{2a}\right) d_a^2(u),$$
$$d_a(u) \equiv \left(1 + u^{2a}\right)^{-1}. \qquad (331)$$

Відповідний розподіл (пор. з (309))

$$P_a(u) = \frac{Z^{-1}}{I_a(u)} \exp\left\{-E_a(u)\right\}, \qquad (332)$$

де Z — статистична сума, задається ефективним потенціялом

$$E_a(u) \equiv -\int_0^u \frac{f_a(u')}{I_a(u')} \mathrm{d}u'. \qquad (333)$$

Точки екстремуму цього розподілу визначаються рівнянням

$$2aI_S u^{2a} + \left(1 + u^{2a}\right)^2 u^{1-a} \left[S_e - u^{1-a}\left(1 + u^{2a}\right)\right]$$
$$= 2a(I_S - 2I_v), \qquad (334)$$

згідно з яким умова $u = 0$ відповідає межі ділянки створення лавин

$$I_S = 2I_v. \qquad (335)$$

Критичні значення параметрів стану визначаються умовою $\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}S_e}\right| = \infty$, що приводить до рівняння

$$u^{2(1-a)}\left(1 + u^{2a}\right)^2 \left[\left(2 + a^{-1}\right) + \left(a^{-1} - 1\right) u^{-2a}\right]$$
$$-\frac{1}{2} S_e u^{1-a}\left(1 + u^{2a}\right)\left[\left(3 + a^{-1}\right) + \left(a^{-1} - 1\right) u^{-2a}\right]$$
$$= 2aI_S. \qquad (336)$$

Вирази (334)–(336) узагальнюють рівняння (311), (322), (326), що відповідають випадку $a = 1$.

Аналіз наведених виразів показує, що результати розділу II.B мало змінюються при переході до загального випадку $0 \leq a \leq 1$. Найсуттєвіша зміна спостерігається для залежности стаціонарної швидкости u_0 від нахилу S_e — зі зменшенням показника $a < 1$ значення u_0 стає відмінним від нуля у всьому інтервалі зміни S_e (див. рис. 17). Збільшення інтенсивности шуму вертикальної швидкости I_v викликає монотонне зростання u_0, тоді як зі збільшенням I_S створюється бар'єр поблизу точки $u = 0$. При цьому залежність $u_0(S_e)$ втрачає монотонний вигляд при значеннях I_S, що відповідають ділянці вище від прямої (335) (див. рис. 18). Як і за відсутности шуму (рис. 14), нижні гілки кривих відповідають нестійким значенням параметра порядку, а верхні — стійким. Згідно з рис. 19, ділянка відсутности лавин розміщується при проміжних значеннях параметрів стану S_e, I_v, I_S. Фазова діяграма, що визначає стани системи залежно від інтенсивностей шумів I_v, I_S, набуває вигляду, подібного до випадку $a = 1$, однак при $a \neq 1$ пряма (322) трансформується в (335) (пор. рис. 20 та 16). Згідно з рис. 21 зростання шуму вертикальної швидкости I_v збільшує ділянку створення лавин.

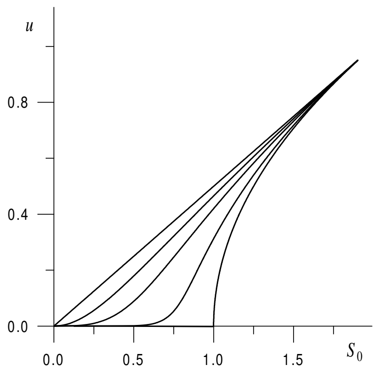

Рис. 17. Залежність стаціонарної швидкости u від нахилу S_0 при $a = 0,\ 0.5,\ 0.7,\ 0.9,\ 1.0$ зверху донизу.

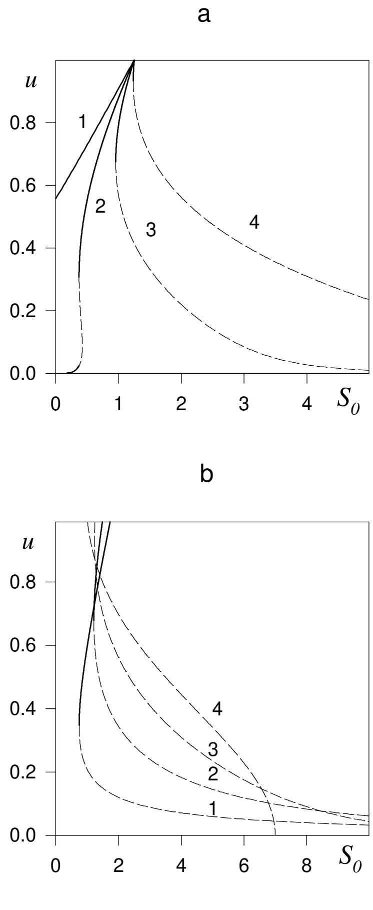

Рис. 18. Залежність стаціонарної швидкости u від нахилу S_0: a) при $a = 0.75$, $I_v = 1$ (криві 1 – 4 відповідають $I_S = 1,\ 2,\ 3,\ 5$); b) при $I_v = 1$, $I_S = 5$ (криві 1 – 4 відповідають $a = 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1.0$.

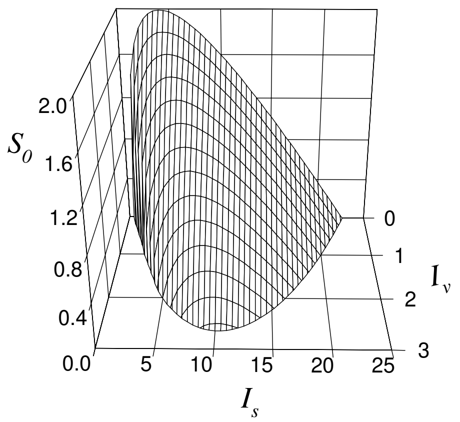

Рис. 19. Тривимірна фазова діяграма (домен відсутности лавини розташовується під поверхнею).

D. Самоподібний розподіл лавин

Вище ми дослідили процес формування одиночної лавини. Перейдімо тепер до розгляду самоподібного ансамблю лавин, що характеризується розподілом (283). Додержуючись методу, викладеного в розділі II.B, будемо враховувати шуми всіх степенів вільности, а також дробовий зворотний зв'язок, уведений у розділі II.C.Основою нашого аналізу є система Лоренца, однак тепер синерґетичні параметри характеризують не сипке середовище, а ансамбль лавин, який у межах підходу Едвардса [27,28], узагальненого на неадитивну систему, зображений за аналогією з термодинамічною системою. Це дозволяє описати зміну розміру лавини, неадитивної складности (complexity) та кінетичної енерґії сипкого середовища. У межах синерґетичного підходу зазначені степені вільности відіграють роль параметра порядку, спряженого поля та керувального параметра відповідно.

Попередній розгляд показує, що синерґетичний принцип підпорядкування та дробовий характер зворотного зв'язку зумовлює мультиплікативний характер шуму. Далі ми побачимо, що це є причиною неадитивности термодинамічної системи, так що, за Цаллісом [29], необхідно провести усереднення зі степенем $q \neq 1$. Так, кінетична енерґія руху середовища задається виразом

$$\zeta_q \equiv \sum_i \zeta_i \; p_i^q, \tag{337}$$

де p_i — імовірність руху i-ої частинки з енерґією ζ_i. Мірою безладу є складність (complexity) системи, яка, за аналогією з ентропією Цалліса [29], задається рівнянням

$$\Sigma_q \equiv -\frac{\sum_i p_i^q - 1}{q-1}. \tag{338}$$

Останнім параметром повного набору степенів вільности синерґетичної системи є розмір лавини s.

Ідучи за неодноразово використаною схемою Лоренца, зобразимо самоузгоджену поведінку системи набором рівнянь (пор. з (329)):

$$\begin{aligned} \tau_s \dot{s} &= -s + a_s \Sigma_q + \sqrt{I_s}\, \xi(t), \\ \tau_\Sigma \dot{\Sigma_q} &= -\Sigma_q + a_\Sigma s^{\tau/2} \zeta_q + \sqrt{I_\Sigma}\, \xi(t), \\ \tau_\zeta \dot{\zeta_q} &= (\zeta^e - \zeta_q) - a_\zeta s^{\tau/2} \Sigma_q + \sqrt{I_\zeta}\, \xi(t). \end{aligned} \tag{339}$$

Тут τ_s, τ_Σ, τ_ζ — часи релаксації відповідних величин, a_s, a_Σ, a_ζ — позитивні параметри зворотного зв'язку, I_s, I_Σ, I_ζ — відповідні інтенсивності шуму, τ — позитивний показник, ζ^e — кінетична енерґія, яка задається зовнішнім впливом. Характерна особливість першого з цих рівнянь полягає в тому, що воно приводить до лінійного зв'язку між розміром лавини s та складністю Σ_q при відсутності шуму. З іншого боку, два останні рівняння (339) містять нелінійні зв'язки між термодинамічними величинами ζ_q, Σ_q та розміром лавини s. З віддаленням від стаціонарного стану неґативний зворотний зв'язок розміру лавини та складности з енерґією приводить, відповідно до принципу Ле-Шательє, до зменшення енерґії. З іншого боку, позитивний зворотний зв'язок розміру лавини та енерґії зі складністю зумовлює зростання останньої, що, своєю чергою, є причиною самоорганізації ансамблю лавин.

Переходячи до аналізу системи (339), зручно ввести безрозмірні величини, відносячи час t до масштабу τ_s, а змінні s, Σ_q, ζ_q, I_s, I_Σ, I_ζ — до значень

$$\begin{aligned} & s^{sc} \equiv (a_\Sigma a_\zeta)^{-\frac{1}{\tau}},\ \Sigma_q^{sc} \equiv a_s^{-1} (a_\Sigma a_\zeta)^{-\frac{1}{\tau}}, \\ & \zeta_q^{sc} \equiv a_s^{-1} a_\Sigma^{-\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{2}\right)} a_\zeta^{-\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{2}\right)}; \\ & I_s^{sc} \equiv (a_\Sigma a_\zeta)^{-\frac{2}{\tau}},\ I_\Sigma^{sc} \equiv a_s^{-2} (a_\Sigma a_\zeta)^{-\frac{2}{\tau}}, \\ & I_\zeta^{sc} \equiv a_s^{-2} a_\Sigma^{-\left(\frac{2}{\tau}+1\right)} a_\zeta^{-\left(\frac{2}{\tau}-1\right)} \end{aligned} \tag{340}$$

відповідно. У результаті система (339) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -s + \Sigma_q + \sqrt{I_s}\, \xi(t), \\ \vartheta \dot{\Sigma_q} &= -\Sigma_q + s^{\tau/2} \zeta_q + \sqrt{I_\Sigma}\, \xi(t), \\ \theta \dot{\zeta_q} &= (\zeta^e - \zeta_q) - s^{\tau/2} \Sigma_q + \sqrt{I_\zeta}\, \xi(t), \end{aligned} \tag{341}$$

де введено відношення часів релаксації

$$\vartheta \equiv \tau_\Sigma / \tau_s, \quad \theta \equiv \tau_\zeta / \tau_s. \tag{342}$$

Рівняння (341) мають вигляд (329) при заміні величин s, Σ_q, ζ_q, $\tau/2$, ϑ, θ на u, v, S, a, ϵ, δ відповідно.

Як відомо [17], системи, що проявляють режим СОК, поділяють на два класи: детерміністичні, які підвладні впливу зовнішнього середовища (до нього належать моделі руху міжфазної межі у випадковому середовищі, модель еволюції Бека-Снеппена та ін.); системи зі стохастичною динамікою (землетруси, лісові пожежі та ін.) Використання рівнянь (341) дозволяє природним шляхом зобразити обидва зазначені класи. Перший з них реалізується при відсутності флюктуацій ($I_s, I_\Sigma, I_\zeta = 0$) за умови, що час релаксації керувального параметра (енерґії) перевищує відповідні часи інших степенів вільности (складности та розміру лавини): $\tau_\zeta \geq \tau_\Sigma, \tau_s$; окрім того, параметр зовнішнього впливу ζ^e повинен перевищувати критичне значення $\zeta_c = 1$. Тоді система (341) подає дивний атрактор, що відповідає режимові СОК першого класу. Включення флюктуацій з інтенсивностями $I_s, I_\Sigma, I_\zeta \neq 0$ забезпечує стохастичну поведінку, яка навіть за відсутности зовнішнього впливу ($\zeta^e = 0$) може викликати самоорганізацію. Таким чином, цей випадок відповідає режимові СОК другого класу.

Ураховуючи, що проблему дивного атрактора Лоренца добре досліджено [32], обмежимося розглядом стохастичної системи, для якої справедливими є адіябатичні умови $\vartheta, \theta \ll 1$. Тоді два останні рівняння (341) приводять до залежностей (пор. з (304))

$$\Sigma_q(t) = \overline{\Sigma}_q + \widetilde{\Sigma}_q\ \xi(t), \quad \zeta_q(t) = \bar{\zeta}_q + \tilde{\zeta}_q\ \xi(t), \qquad (343)$$

де детерміністичні та флюктуаційні складові визначаються рівняннями типу (304):

$$\overline{\Sigma}_q \equiv \zeta^e s^{\tau/2} d_\tau(s), \quad \widetilde{\Sigma}_q \equiv \sqrt{I_\Sigma + I_\zeta s^\tau}\ d_\tau(s);$$
$$\bar{\zeta}_q \equiv \zeta^e\ d_\tau(s), \quad \tilde{\zeta}_q \equiv \sqrt{I_\zeta + I_\Sigma s^\tau}\ d_\tau(s), \qquad (344)$$
$$d_\tau(s) \equiv (1 + s^\tau)^{-1}.$$

Завдяки дії синерґетичного принципу підпорядкування, флюктуації складности та енерґії, які спочатку наділені адитивним характером, стають мультиплікативними. Використовуючи детерміністичні складові складности та енерґії, легко бачити, що ефективна температура Едвардса $T \equiv \partial\bar{\zeta}_q/\partial\overline{\Sigma}_q$ набуває неґативних значень.

Поданий режим самоорганізації відповідає звичайному фазовому переходу системи, підвладній зовнішньому впливу $\zeta^e > \zeta_c$. Для подання режиму СОК підставмо вирази (343), (344) у перше рівняння (341), що приводить до рівняння Ланжевена типу (305). Тоді, за повною аналогією з розглядом у розділі II.C, приходимо до стохастичного рівняння (330), де ефективна сила та інтенсивність шуму задаються рівняннями (331) з точністю до заміни, описаної після співвідношень (342), тобто величини s, Σ_q, ζ_q, $\tau/2$ слід замінити на u, v, S, a відповідно. Як результат, відповідно до розділу II.C, вплив випадкового розкиду розмірів лавини не є суттєвим, тоді як шум енерґії та складности спричиняє критичний ефект. Наведену картину зображено на рис. 20 у площині, яка створена відповідними інтенсивностями шуму I_ζ, I_Σ ансамблю лавин. Змішану ділянку A+N, яка пов'язується з перервним режимом, обмежено прямою (335) та дзвоноподібною кривою, що описується рівнянням типу (326). Згідно з рис. 21, де показник a має бути замінений на $\tau/2$, зростання випадкового розкиду значень складности розширює ділянку СОК уздовж осі показника τ.

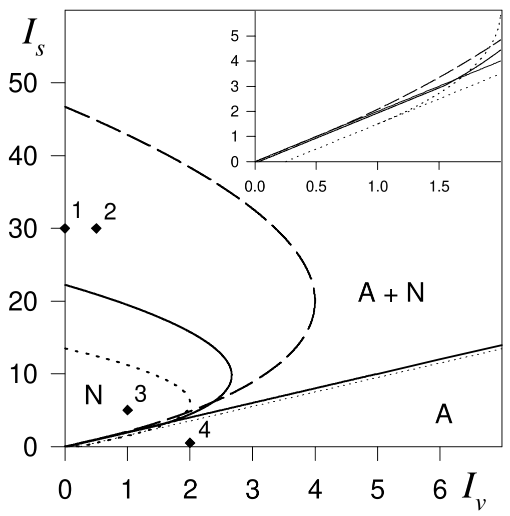

Рис. 20. Фазова діяграма для системи з $S_0 = 0$ та I_s, $I_v \neq 0$ при $a = 0.5$, 0.75, 1.0 (пунктирні, суцільні та штрихові лінії відповідно). Значки відповідають кривим 1–4 на рис. 22.

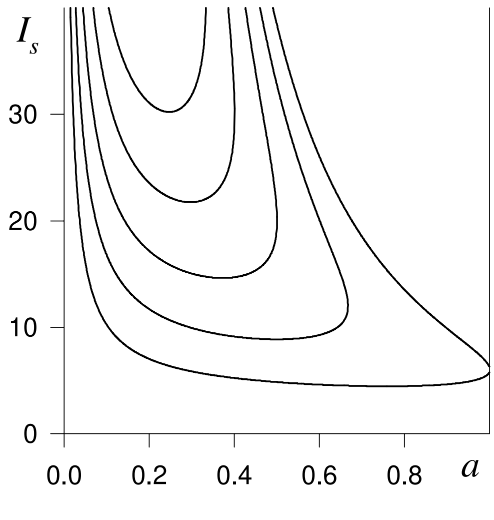

Рис. 21. Фазова діяграма у площині $I_S - a$ при $I_v = 2, 3, 4, 5, 6$ знизу доверху (ділянку відсутности лавини розташовано всередині кривих).

Розгляньмо тепер розподіл розмірів лавини, що випливає з рівнянь (331)–(333):

$$P(s) = \frac{Z^{-1}}{I(s)} \exp\left\{ \int\limits_{e}^{S} \frac{f(s')}{I(s')} \mathrm{d}s' \right\};$$

$$f(s) \equiv -s + \zeta^e s^{\tau/2} d_\tau(s), \tag{345}$$

$$I(s) \equiv I_s + (I_\Sigma + I_\zeta s^\tau)\, d_\tau^2(s), \quad d_\tau(s) \equiv (1+s^\tau)^{-1}.$$

У режимі СОК характерна енерґія набуває нульового значення $\zeta^e = 0$, і розподіл (345) поводиться, як показано на рис. 22 для різних інтенсивностей шуму енерґії та складности. Видно, що степенева залежність, яка властива режиму СОК, спостерігається в межах $s \ll 1$ та $I_s, I_\Sigma \ll I_\zeta$. Тут розподіл (345) зводиться до канонічного вигляду (283), де другий множник є таким:

$$\mathcal{P}(s) = \frac{d_\tau^{-2}(s)}{Z} \exp\left\{ -I_\zeta^{-1} \int\limits_{e}^{S} \frac{d_\tau^{-2}(s')}{(s')^{\tau-1}} \mathrm{d}s' \right\},$$

$$d_\tau(s) \equiv (1+s^\tau)^{-1}. \tag{346}$$

Легко бачити, що відхилення цього множника від сталої оцінюється членом $\sim s^{2-\tau}$, який збільшується зі зменшенням τ та зростанням розміру лавини до граничних значень $s \sim 1$, тобто з відхиленням від ділянки СОК. Це підтверджується рис. 23, де відхилення $\delta\tau$ нахилу залежности $P(s)$, що визначається (345) в лінійній ділянці, від заданого значення τ подано залежно від самого параметра τ. Відповідно до наведеної оцінки, відхилення $\delta\tau$ набуває максимального значення $\delta\tau < 10^{-1}\tau$ при невеликих значеннях $\tau < 1$ або при великих інтенсивностях шуму $I_S \sim 10^3$.

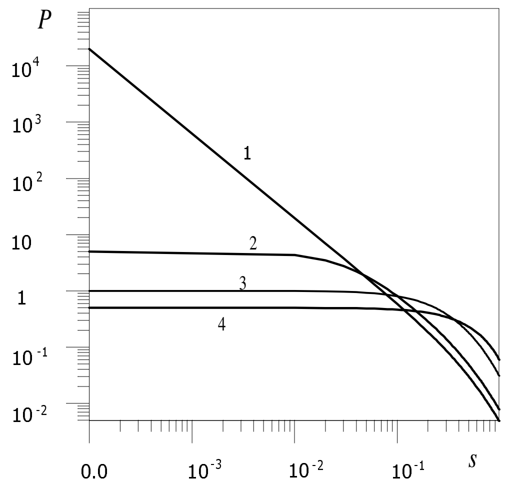

Рис. 22. Функція розподілу (345) при $\tau = 1.5$ та режимах, указаних точками на рис. 20: 1) $I_v = 0$, $I_S = 50$ (СОК); 2) $I_v = 0.5$, $I_S = 30$ (A+N); 3) $I_v = 1$, $I_S = 5$ (N); 4) $I_v = 2$, $I_S = 0.5$ (A).

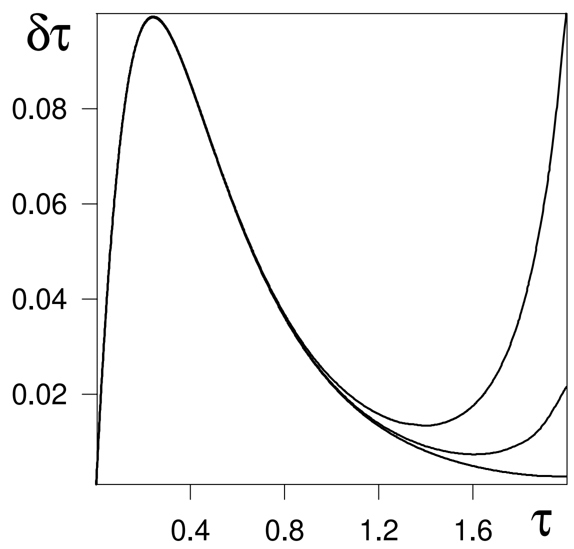

Рис. 23. Відхилення $\delta\tau$ лінійного нахилу кривої 1 з рис. 22 від параметра τ залежно від показника τ ($I_S = 10, 50, 10^3$ зверху донизу).

E. Неадитивный ансамбль лавин

Відмінною особливістю виразу (346) є та обставина, що в межах $s \ll 1$, $I_s, I_\Sigma \ll I_\zeta$, які відповідають режимові СОК, воно виражається через стандартну гамма–функцію $\Gamma(x)$ та дробовий інтеґрал $\mathcal{I}_{-s}^{2-\tau}$ порядку $2-\tau$ (див. додаток B в [1]):

$$\mathcal{P}(s) = \frac{d_\tau^{-2}(s)}{Z} \exp\left\{ -\,\frac{\Gamma(2-\tau)}{I_\zeta}\, \mathcal{I}_{-s}^{2-\tau} d_\tau^{-2}(s) \right\}. \tag{347}$$

З іншого боку, відомо [30], що вирази такого типу одержують як розв'язки дробового рівняння Фоккера–Планка

$$\mathcal{D}_t^\beta \mathcal{P}(s,t) = \mathcal{D}_{-s}^{\alpha/2} \left\{ s\mathcal{P}(s,t) + \frac{I_\zeta}{\Gamma(\alpha/2)} \mathcal{D}_{-s}^{\alpha/2} \left[d_\tau^2\ \mathcal{P}(s,t) \right] \right\}, \tag{348}$$

де дробова похідна $\mathcal{D}_x^\alpha$ задається виразом (B.4). Якщо помножити рівняння (348) на s^ϖ та усереднити за s, відповідно до визначень

$$|s| \equiv \langle s^\varpi \rangle^{\frac{1}{\varpi}}, \quad \langle s^\varpi \rangle \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} s^\varpi \mathcal{P}(s,t) \mathrm{d}s, \quad \varpi > 0, \tag{349}$$

одержуємо

$$|s|^z \sim t, \quad z = \frac{\alpha}{\beta}, \tag{350}$$

де z — динамічний показник. Це співвідношення відповідає границі великого часу, де суттєвим є лише дифузійний внесок. Сумісний розв'язок рівнянь (347), (350) та (В.3) дає співвідношення $2-\tau=\alpha/2=z\beta/2$, з яких випливає

$$\tau = 2 - \frac{z\beta}{2}. \qquad (351)$$

Порівнюючи цей вираз з відомим співвідношенням (284), одержуємо

$$\beta z = \frac{4}{D}. \qquad (352)$$

Середньопольові величини $\beta = 1$ та $D = 4$ приводять до динамічного показника $z = 1$, який, відповідно до (350), належить до балістичної поведінки, що протилежна до режиму СОК. З іншого боку, дробове рівняння Фоккера–Планка (348) відповідає звичайному дифузійному режимові з $z = 2$ лише тоді, коли $\beta = 1/2$.

Очевидна причина такої невідповідности — в неузгодженому використанні звичайних рівнянь (284) для системи Лоренца (341). У цій системі стохастичні степені вільности s, Σ_q та ζ_q числом $n = 3$ служать як різні просторові напрямки. Однак стохастичний процес реалізується для кожної з цих змінних у площині, що задається самою змінною та її спряженим моментом. Щобільше, мультиплікативний характер шуму, який визначається показником a у виразах (331), приводить фрактальну вимірність кожної площини до значення $2(1-a)$ [5]. Таким чином, фрактальна вимірність фазового простору, у якому відбувається еволюція стохастичної системи, дорівнює:

$$D = 2n(1-a), \qquad (353)$$

де $n = 3$ для використаної системи Лоренца. Підстановка цієї вимірности у вираз (352) приводить до зв'язку $\beta z = 2$, який, на відміну від одержаного вище співвідношення $\beta z = 1$, справедливий у найпростішому випадку $\beta = 1$, $z = 2$, що має відношення до одного стохастичного степеня вільности ($n = 1$) з адитивним шумом ($a = 0$). У загальному випадку рівняння (351)–(353) дають

$$\tau = 2\left[1 - \frac{1}{2n(1-a)}\right]. \qquad (354)$$

Відповідні залежності зображено на рис. 24a,b, з яких видно, що показник τ монотонно збільшується від мінімального значення $\tau = 1$ при критичному числі $(1-a)^{-1}$ до максимального $\tau = 2$ у границі $n \to \infty$; при цьому збільшення a зміщує залежність $\tau(n)$ в ділянку великих n, тобто зменшує показник τ.

Легко бачити, що співвідношення (354) відтворює відомі результати різних підходів для визначення вимірности D (див. [33]). Теорія середнього поля дає $\tau = 3/2$ і (354) виражає число самоузгоджених стохастичних рівнянь, необхідних для опису СОК, залежно від показника мультиплікативного шуму:

$$n = \frac{2}{1-a}. \qquad (355)$$

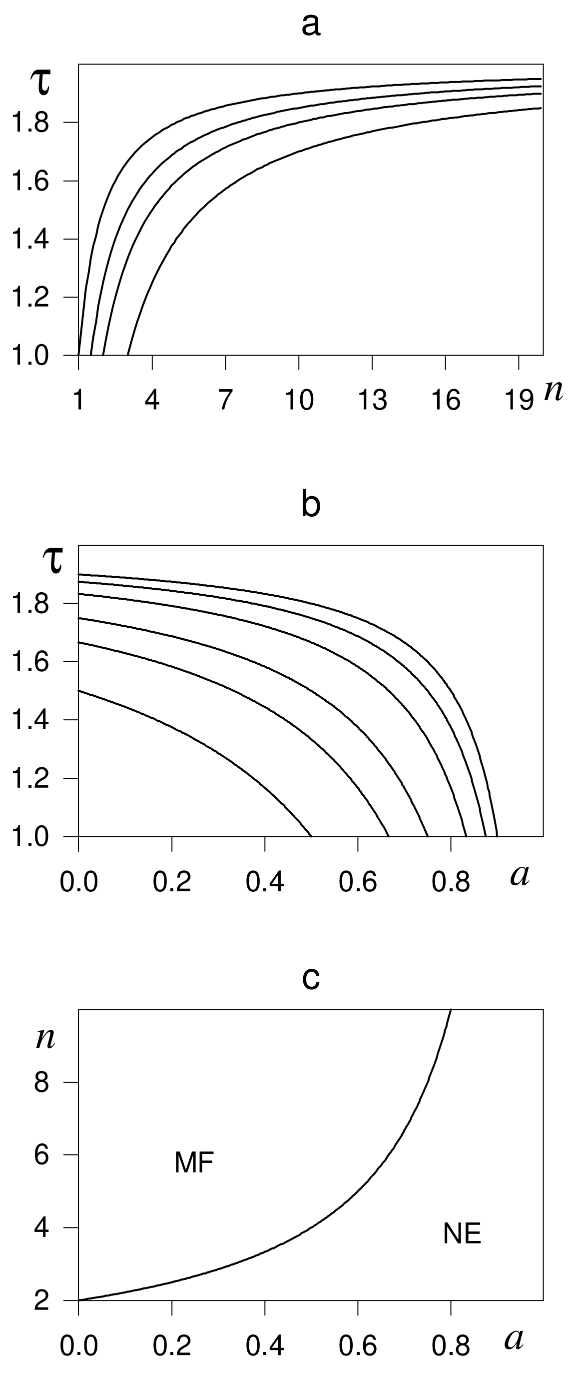

Рис. 24. Залежність показника τ: a) від кількости рівнянь n ($a = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ зверху донизу); b) від показника a ($n = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ зверху донизу); c) фазова діяграма для середнього поля та ділянки неадитивности.

Згідно з рис. 24c, розгляд у межах теорії самоузгодженого середнього поля можливий, якщо кількість необхідних рівнянь більша від мінімального $n_c = 2$. Такі приклади дають підходи, використані в працях [12–14,17,25], де шум припускається адитивним ($a = 0$). Наявність мультиплікативного шуму спричиняє зростання a, і несуперечлива подача картини СОК потребує збільшення кількости самоузгоджених рівнянь: наприклад, у межах польової схеми [18], що належить до направленої перколяції ($a = 1/2$), наближення середнього поля застосовується до вимірностей, більших за критичне значення $d_c = 4$; в цій праці та в [34,35] використано систему Лоренца ($n = 3$), яка потребує включення мультиплікативного шуму з показником $a = 1/3$ (див. нижче).

Розгляньмо тепер зв'язок наведених показників з параметром неадитивности q, який задає енерґію та складність (337), (338) відповідно до визначення Цалліса [29]. Еволюція неадитивної системи описується нелінійним рівнянням Фоккера–Планка

$$\mathcal{D}_t^{\beta} P(s,t) = \mathcal{D}_{-s}^{2} P^{q}(s,t), \tag{356}$$

де $\mathcal{D}_t^{\beta}$ — дробова похідна, одиниці виміру вибрано так, щоб був відсутнім ефективний коефіцієнт дифузії, показники $\beta > 0$, $q > 0$ [36], [3]. Припускаючи нормування функції розподілу, яка має самоподібний вигляд (пор. з (283))

$$P(s,t) = s_c^{-1}\mathcal{P}(x); \qquad s_c \equiv s_c(t), \quad x \equiv s/s_c, \tag{357}$$

одержуємо

$$s_c^{q+1} \sim t^{\beta}, \quad \mathcal{P}^{q-1} \sim x. \tag{358}$$

З іншого боку, можна використати дробове рівняння Фоккера–Планка (348):

$$\mathcal{D}_t^{\beta} P(s,t) = \mathcal{D}_{-s}^{\alpha} P(s,t). \tag{359}$$

Підставляючи сюди розв'язок (357), знаходимо залежності

$$s_c^{\alpha} \sim t^{\beta}, \quad \mathcal{P}^{\alpha-1} \sim x, \tag{360}$$

порівняння яких з (358) дає

$$q = \alpha - 1. \tag{361}$$

У випадку самоподібних систем середня величина $|s|$ в (349) зводиться до масштабу s_c, і залежності (350), (358) та (360) дають

$$q = z\beta - 1. \tag{362}$$

Сумісний розгляд цього рівняння з (352), (353) дає вираз для параметра неадитивности:

$$q = \frac{2}{n(1-a)} - 1. \tag{363}$$

Максимальна величина $q = 2/n - 1$ належить до систем з адитивним шумом ($a = 0$), що відповідає картині середнього поля з числом головних рівнянь $n < 2$ ($n = 1$). Наявність мультиплікативного шуму зі зростаючим показником $a > 0$ збільшує q, і система стає неадитивною ($q \geq 1$) в границі $q \leq 1/(1-a)$ сфери застосування теорії середнього поля. Відповідно до оцінки дробова система Лоренца неадитивна, якщо показник $a > 2/3$.

Як зазначалося в частині I, процес супердифузії пов'язаний з польотами Леві, які здійснюються в дискретні моменти часу з довільними зміщеннями, включаючи безмежно великі [37]. Згідно з рівнянням Фоккера–Планка (348), такий процес характеризується показниками $\beta = 1$ і $\alpha < 2$, перший з яких є константою, тоді як другий розкриває дробову часову послідовність польотів Леві та приводить до динамічного показника $z \equiv \alpha/\beta < 2$ (див. останнє з рівнянь (350)). Імовірнісний розподіл зміщення $\mathbf{x}$, що залежить від мікроскопічних умов, визначається асимптотикою

$$p(\mathbf{x}) \sim x^{-(D+\gamma)}, \tag{364}$$

що задається фрактальною вимірністю D та мікроскопічним показником γ. Очевидно, що для рідкісних подій, коли $\gamma < 2$, динамічний показник z зводиться до мікроскопічного ($z = \gamma < 2$), тоді як при $\gamma \geq 2$ маємо $z = 2$ [38].

У режимі субдифузії поведінка системи визначається випадковими блуканнями (random walk) за дискретними пастками, і показник $\beta < 1$ описує дробові властивості часу. При цьому звичайна статистика Больцмана–Ґіббса стає неадитивною [29], і субдифузійний процес подається розподілом Цалліса [39]

$$p(\mathbf{x}) \propto \left[1 + \beta(q-1)x^2\right]^{\frac{1}{q-1}}, \quad \beta = \mathrm{const} > 0, \tag{365}$$

де відхилення $(q-1)$ параметра неадитивности зумовлено фрактальною природою фазового простору системи, пов'язаної з показником γ так:

$$q = 1 + \frac{2}{D+\gamma}. \tag{366}$$

Формальна перевага розподілу (365) полягає в тому, що відповідне середнє

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle_q \equiv \int \mathbf{x}^2 p^q(\mathbf{x}) \mathrm{d}^D x, \tag{367}$$

де підінтеґральна функція змінюється за законом

$x^{-(1+\gamma)}$, збігається при довільних показниках $\gamma > 0$. У результаті рівняння руху набирає вигляду

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle_q \sim t^{\beta},$$

$$\beta = \begin{cases} q-1 & \text{при} \quad \gamma, q < 2, \\ 1-(q-1)\frac{D}{2} & \text{при} \quad \gamma \geq 2,\ q > 1. \end{cases} \tag{368}$$

На відміну від (360), де показники $\alpha < 2$, $\beta = 1$ відповідають супердифузії, тут маємо $\alpha = 2$, $\beta < 1$, і відповідно до субдифузійних властивостей останнє рівняння (350) дає динамічний показник $z > 2$.

У загальному випадку $\alpha \neq 2$, $\beta \neq 1$, підстановка (368) у співвідношення (362) дає результат

$$z = \begin{cases} \frac{q+1}{1-\frac{D}{2}(q-1)} & \text{при} \quad 1 < q \leq q_D, \\ \frac{q+1}{q-1} & \text{при} \quad q_D \leq q \leq 2, \end{cases} \tag{369}$$

де введено граничне значення параметра неадитивності

$$q_D \equiv \frac{4+D}{2+D}. \tag{370}$$

Щоб уникнути недорозумінь, звернемо увагу на те, що, на відміну від рівнянь (284), (351), (352), які можуть належати як до реального фазового простору, так і до конфігураційного [40], одержані вище співвідношення (368)–(370) належать лише до реального фазового простору. За аналогією з ренормгрупою, це відображається в тому, що ефективне значення (353) подає властивості конфігураційного простору, а не реальний дифузійний процес.

Нарешті відповімо на питання: чому використовується система Лоренца, а не модель Рьослера або будь-яка інша? Покажемо, що рівняння Лоренца відповідають найпростішій мікроскопічній моделі дворівневої бозонно-ферміонної системи [41]. Будемо описувати бозони операторами породження та знищення b_l^+, b_l, що відповідають звичайному комутаційному співвідношенню $[b_l, b_m^+] = \delta_{lm}$, де l, m — ґраткові числа. Дворівнева ферміонна підсистема описується операторами $a_{l\alpha}^+, a_{l\alpha}$, $\alpha = 1,\ 2$, які підпорядковуються антикомутаційним співвідношенням $\{a_{l\alpha}, a_{m\beta}^+\} = \delta_{lm}\delta_{\alpha\beta}$. Числа заповнення $b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}$ визначають розподіл бозонів у $\mathbf{k}$-зображенні, що відповідає перетворенню Фур'є за ґратковими положеннями l. Підсистема ферміонів подається числами заповнення $n_{l\alpha} \equiv a_{l\alpha}^+ a_{l\alpha}$ та оператором $d_l \equiv a_{l1}^+ a_{l2}$, що визначає поляризацію щодо насичення рівнів $\alpha = 1,\ 2$. Поведінка системи визначається гамільтоніяном Діке ($\hbar = 1$)

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ (E_1 n_{\mathbf{k}1} + E_2 n_{\mathbf{k}2}) + \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + \frac{\mathrm{i}}{2} w (b_{\mathbf{k}}^+ d_{\mathbf{k}} - d_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}) \right\}, \tag{371}$$

де $E_{1,2}$ — рівні енерґії, $\omega_{\mathbf{k}}$ визначає закон дисперсії бозонів, уявна одиниця перед параметром взаємодії w відображає властивість ермітовости.

Рівняння руху Гайзенберґа мають вигляд

$$\dot{b}_{\mathbf{k}} = -\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + \frac{w}{2} d_{\mathbf{k}}; \tag{372}$$

$$\dot{d}_{\mathbf{k}} = -\mathrm{i}\Delta d_{\mathbf{k}} + \frac{w}{2} b_{\mathbf{k}} (n_{\mathbf{k}2} - n_{\mathbf{k}1}),$$

$$\Delta \equiv E_2 - E_1; \tag{373}$$

$$\dot{n}_{\mathbf{k}1} = \frac{w}{2}(b_{\mathbf{k}}^+ d_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}),$$

$$\dot{n}_{\mathbf{k}2} = -\frac{w}{2}(b_{\mathbf{k}}^+ d_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}). \tag{374}$$

У резонансі перші складові у правих частинах рівнянь (372), (373), які містять частоти $\omega_{\mathbf{k}}$ та Δ, можуть бути вилучені введенням множників $\exp(-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}} t)$, $\exp(-\mathrm{i}\Delta t)$ для залежностей $b_{\mathbf{k}}(t)$, $d_{\mathbf{k}}(t)$ відповідно. Завдяки дисипації такі частоти набувають додаткових уявних складових $-\mathrm{i}/\tau_x$, $-\mathrm{i}/\tau_y$, які характеризуються часами релаксації τ_x, τ_y (тут умови $\Im\ \omega_{\mathbf{k}} < 0$, $\Im\ \Delta < 0$ відображають принцип причинности). У результаті рівняння (372), (373) отримують дисипативні члени $-b_{\mathbf{k}}/\tau_x$, $-d_{\mathbf{k}}/\tau_y$. Для визначення відповідного внеску в рівняння для розподілу ферміонів слід урахувати, що стаціонарні величини чисел заповнення рівнів відрізняються від нуля ($n_{\mathbf{k}\alpha}^0 \neq 0$), завдяки чому релаксаційні складові в рівнянні (374) стають складнішими $-(n_{\mathbf{k}\alpha} - n_{\mathbf{k}\alpha}^0)/\tau_S$, де τ_S — час релаксації ферміонного розподілу за рівнями $\alpha = 1,\ 2$.

Уведемо, нарешті, макроскопічні величини

$$\dot{x}_{\mathbf{k}} \equiv \langle b_{\mathbf{k}}^+ \rangle = \langle b_{\mathbf{k}} \rangle, \qquad \dot{y}_{\mathbf{k}} \equiv \langle d_{\mathbf{k}} \rangle = \langle d_{\mathbf{k}}^+ \rangle,$$

$$y'_{\mathbf{k}} \equiv \langle n_{\mathbf{k}2} - n_{\mathbf{k}1} \rangle, \qquad y'_{e\mathbf{k}} \equiv \langle n_{\mathbf{k}2}^e - n_{\mathbf{k}1}^e \rangle, \tag{375}$$

де кутові дужки задають усереднення. Тоді, нехтуючи кореляціями в розподілі частинок за квантовими станами, рівняння Гайзенберґа (372)–(374), доповнені дисипативними складовими, приводять до системи Лоренца (288), (290), (291). При цьому слід використати одномодове наближення, яке дозволяє опустити залежність від хвильового вектора $\mathbf{k}$ та ввести константи $\tau_x = 2/w$, $a = 1$, $D = (2w)^{-1}$.

ВИСНОВКИ

Тривалий час вважалося, що такі складні явища, як землетруси [16], рух транспортних потоків та сипких середовищ [42–44], еволюція суспільства та виникнення війн [45], економічні процеси [46–48], практично не піддаються кількісному опису. Кардинально змінилась ситуація останніми роками, коли закони статистичної фізики були застосовані до пояснення поведінки цих складних систем (complex systems) [49,50]. Основна особливість таких систем полягає в тому, що вони являють собою самоподібні стохастичні об'єкти, які характеризуються фрактальними властивостями, мультиплікативним характером шуму, аномальними явищами переносу, уповільненою релаксацією, неадитивністю, критичністю, яка самоорганізовується, та іншим [29,51].

У своєму викладі ми спробували охопити єдиним поглядом зазначене розмаїття складних систем, спираючись на масштабну інваріянтність фазового простору. Зрозуміло, що наведена в огляді картина не може бути повною — обсяг публікацій з дослідження складних систем настільки великий, що їм цілком присвячено такі журнали, як Physical Review E, Physica A, D, Chaos та інші (див. також xxx.lanl.gov/arXiv:cond-mat). Тому ми ставили скромніше завдання — подати такий вступ у теорію складних систем, який дозволив би, не звертаючись до інших джерел, зрозуміти основні особливості самоподібних стохастичних об'єктів. Чи впоралися ми з цим завданням — судити читачеві, скоріше молодому, оскільки не в усіх інших вистачить сил дочитати до цього місця.

ПОДЯКИ

Уважаємо за приємний обов'язок подякувати професорові І. Вакарчукові за люб'язну пропозицію написати цей огляд. Спілкування з професором Ю. Головачем не тільки допомагало з'ясувати властивості фрактальних об'єктів, але також слугувало джерелом натхнення. Праці з дробових похідних, які люб'язно надіслав професор Р. Гільфер (R. Hilfer), сприяли нашому розумінню їхньої природи при описі аномальної дифузії.

[1] О. І. Олємской, Д. О. Харченко, Журн. фіз. досл. **6**, 253 (2002).
[2] A. I. Olemskoi, D. O. Kharchenko, Met. Phys. Adv. Tech. **16**, 841 (1996).
[3] A. I. Olemskoi, D. O. Kharchenko, Physica A **293**, 178 (2001).
[4] D. O. Kharchenko, S. V. Kokhan, Eur. Phys. J. B **29** 97 (2002).
[5] А. И. Олемской, Усп. физ. наук **168**, 287 (1998).
[6] C. Tsallis, in *Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications*, *Lecture Notes in Physics*, eds. by S. Abe and Y. Okamoto, (Springer-Verlag, Berlin, 2000).
[7] C. Van der Broeck, J. M. R. Parrondo, R. Toral, Phys. Rev. Lett. **73**, 3395 (1994).
[8] C. Van der Broeck, J. M. R. Parrondo, R. Toral, R. Kawai, Phys. Rev. E **55**, 4084 (1997).
[9] S. E. Mangioni, R. R. Deza, R. Toral, H. S. Wio, Phys. Rev. E **61**, 223 (2000).
[10] D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* (McGraw–Hill International Book Company, New York, 1978).
[11] S. F. Edwards, D. R. Wilkinson, Proc. R. Soc. A **381**, 17 (1982).
[12] A. Mehta, G. C. Barker, Rep. Prog. Phys. **57**, 383 (1994).
[13] J.-P. Bouchaud, M. E. Cates, J. R. Prakash, S. F. Edwards J. Phys. I (France) **4**, 1383 (1994).
[14] K. P. Hadeler, C. Kuttler, Granular Matter **2**, 9 (1999).
[15] P. Bak, K. Sneppen, Phys. Rev. Lett. **71**, 4083 (1993).
[16] T. Halpin-Healy, Y.-C. Zhang, Phys. Rep. **254**, 215 (1995).
[17] A. Vespignani, S. Zapperi, Phys. Rev. Lett. **78**, (1997) 4793; Phys. Rev. E **57**, 6345 (1998).
[18] A. Vespignani, R. Dickman, M. A. Muñoz, S. Zapperi, Phys. Rev. Lett. **81**, 5676 (1998); Phys. Rev. E **62**, 4564 (2000).
[19] D. Dhar, R. Ramaswamy, Phys. Rev. Let. **63**, 1659 (1989); D. Dhar, *ibid.* **64**, 1613 (1991).
[20] L. Pietronero, A. Vespignani, S. Zapperi, Phys. Rev. Lett. **72**, 1690 (1994); Phys. Rev. E **51**, 1711 (1995) .
[21] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
[22] L. P. Kadanoff, S. R. Nagel, L. Wu, S. Zhu, Phys. Rev. A **39**, 6524 (1989).
[23] P. Grassberger, S. S. Manna, J. Phys. (France) **51**, 1077 (1990).
[24] T. Hwa, M. Kadar, Phys. Rev. A **45**, 7002 (1992).
[25] L. Gil, D. Sornette, Phys. Rev. Lett. **76**, 3991 (1996).
[26] J. Zinn–Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1994).
[27] S. F. Edwards, R. B. S. Oakeshott, Physica A **157**, 1080 (1989).
[28] S. F. Edwards, in *Granular Matter: An Interdisciplinary Approach*, A. Metha, Ed. (Springer-Verlag, New-York, 1994).
[29] C. Tsallis, in *Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications, Lecture Notes in Physics*, Abe S and Okamoto Y (Eds.) (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001).
[30] G. M. Zaslavsky, Chaos **4**, 25 (1994); Physica D **76**, 110 (1994); A. I. Saichev, G. M. Zaslavsky, Chaos **7**, 753 (1997).
[31] H. Risken, *The Fokker–Plank equation* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989).
[32] G. Haken, *Synergetics, an Introduction* (Springer, Berlin, 1983).
[33] A. Chessa, E. Marinari, A. Vespignani, S. Zapperi, Phys. Rev. E **57**, R6241 (1998).
[34] A. I. Olemskoi, A. V. Khomenko, JETP, **83**, 1180 (1996).
[35] A. I. Olemskoi, A. V. Khomenko, Phys. Rev. E **63**, 036116 (2001).
[36] A. I. Olemskoi, JETP Lett. **71**, 285 (2000).
[37] J. -P. Bouchaud, A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1991).
[38] H. C. Fogedby, Phys. Rev. E **58**, 1690 (1998).
[39] D. H. Zanette, P. A. Alemany, Phys. Rev. Lett. **75**, 366 (1995).
[40] Останній створюється змінними головних рівнянь.
[41] A. I. Olemskoi, *Theory of Structure Transformations in Non-Equilibrium Condensed Matter* (NOVA Science, New-York, 1999).

[42] D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider, Phys. Rep. **329**, 199 (2000).

[43] *Traffic and Granular Flow*, edited by D. E. Wolf, M. Schreckenberg, A. Bachem (World Scientific, Singapore, 1996).

[44] *Traffic and Granular Flow '97* edited by M. Schreckenberg, D. E. Wolf (Springer, Singapore, 1998).

[45] S. M. de Oliveira, P. M. C. de Oliveira, D. Stauffer, *Evolution, Maney, War and Computers* (Teubner, Stuttgard, 1999).

[46] J. Voit, *The Statistical Mechanics of Financial Markets* (Berlin Heidelberg, Springrt, 2001).

[47] J. -P. Bouchaud, M. Potters, *Theory of Financial Risks. From Statistical Physics to Risk Management* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

[48] J. Kertész, I. Kondor, *Econophysics: an Amerging Science* (Kluwer, Dordrecht, 1998).

[49] G. Weisbuch, *Complex System Dynamics* (MA: Addison-Wesley, Reading, 1990).

[50] F. Schweitzer, *Self-organization of Complex Systems: from Individual to Collective Dynamics* (Gordon and Breach, London, 1997).

[51] T. Halpin-Healy, Y.-C. Zhang, Phys. Rep. **254**, 215 (1995).

THEORY OF SELF–SIMILAR STOCHASTIC SYSTEMS. PART II

A. I. Olemskoi, D. O. Kharchenko
Sumy State University
2, Rimskiy-Korsakov Str., Sumy, UA–40007, Ukraine

We show that the description of the evolution of statistical moments, which are reduced to the order parameter, autocorrelator and response function yield to calculation of the average of the power-law function with a fractional exponent. Such a kind of calculation can be performed due to using of the self-similar properties of the system. In such a case the reversible transition "disorder–order–disorder" is observed when temperature is changed. Using the fractional Lorenz system with additive noises above mentioned scheme is applied to the problem of self–organized criticality. Conditions of the avalanche formation show that its behaviour depends on intensities of control parameter fluctuations in a critical manner. According to the phase diagram, a discontinues regime of self-organized criticality is realized if intensities of fluctuations of energy of avalanches and complexity of their ensemble pass to the critical magnitudes. The power-law distribution over the avalanche size is reproduced. Relations between the exponent of the size distribution, fractal dimension of phase space, characteristic exponent of multiplicative noise, dynamical exponents, and nonextensivity parameter are found.