ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 7, № 1 (2003) с. 27–39

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 7, No. 1 (2003) p. 27–39

ВАРІЯЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ Й СИМЕТРІЇ РЕЛЯТИВІСТИЧНОГО НЕДИСИПАТИВНОГО СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

В. І. Третяк
Інститут фізики конденсованих систем НАН України
вул. Свєнціцького, 1, Львів, 79011, Україна
(Отримано 11 грудня 2001 р.; в остаточному вигляді — 26 березня 2003 р.)

Сформульовано та проаналізовано умови Пуанкаре-інваріянтности варіяційного опису недисипативного суцільного середовища. Вказано загальну структуру функції Лаґранжа, яка забезпечує таку інваріянтність і залежить від похідних не вище від першого порядку. За допомогою теореми Нетер отримано 10 законів збереження, вигляд яких, зокрема, встановлює структуру тензора енерґії-імпульсу системи. Обговорено перехід від лаґранжевих до ойлерових змінних. Показано, як постулювання додаткових симетрій дозволяє формулювати часткові моделі релятивістичного суцільного середовища, зокрема гідродинаміку та модель ізотропного тіла.

Ключові слова: релятивістичне суцільне середовище, Пуанкаре-інваріянтність, варіяційні принципи.

PACS number(s): 03.30.+p, 46.05.+b, 47.10.+g

I. ВСТУП

Спроби релятивістичного узагальнення механіки суцільного середовища розпочалися майже відразу після створення спеціяльної теорії відносности [1]. Переважно вони стосувалися проблем гідродинаміки й базувалися як на феноменологічних засадах [2], так і на методах нерівноважної статистичної механіки [3]. Сьогодні релятивістична гідродинаміка є повноправним і глибоким розділом теоретичної фізики. Натомість релятивістичні узагальнення механіки деформівного твердого тіла [4–6] відомі набагато менше. Певна феноменологічна модель релятивістичного дисипативного континууму, що не обмежується випадком рідини, запропонована у праці [7] на базі загального формалізму Сурйо [8,9].

У цій статті, яка не виходить за межі недисипативного випадку, розглянуто варіяційний принцип для релятивістичного суцільного середовища, що приводить до структури тензора енерґії-імпульсу, узгодженої з результатом [7]. Пропонований тут феноменологічний підхід близький до методів лаґранжевого формулювання релятивістичної теорії прямих міжчастинкових взаємодій [10,11]. Вихідним пунктом служить вимога Пуанкаре-інваріянтности, яка формулюється за допомогою реалізації групи Пуанкаре перетвореннями струменевого (jet-) продовження конфіґураційного простору системи. Вказана вимога виражається системою лінійних диференційних рівнянь першого порядку для функції Лаґранжа L; і її виконання приводить, згідно з теоремою Нетер, до існування 10 законів збереження, дозволяючи, зокрема, *вивести* форму тензора енерґії-імпульсу. Далі продемонстровано застосування симетрійного підходу до формулювання конкретних моделей релятивістичного суцільного середовища — гідродинаміки та ізотропного тіла. На відміну від більшости праць у цьому напрямку, тут на самому початку використано тривимірний підхід у межах миттєвої форми динаміки. Варіяційні принципи та закони збереження сформульовано спершу в лаґранжевих змінних, а лише потім здійснено перехід до змінних Ойлера, що є популярнішими, особливо в гідродинаміці.

II. ФУНКЦІЯ ЛАҐРАНЖА

Приймаємо, що в початковий момент часу суцільне середовище (тіло) займає певну область $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ з координатами ξ^i, $i = 1, 2, 3$ (змінні Лаґранжа), які служитимуть для ідентифікації матеріяльних елементів суцільного середовища. Його еволюція з часом t описується світовою трубкою — конґруенцією світових ліній у просторі Мінковського $\mathbb{M}_4$ з координатами x^ν, $\nu = 0, 1, 2, 3$ [4]. Метрику в $\mathbb{M}_4$ вибираємо у вигляді $\|\eta_{\mu\nu}\| = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

У межах миттєвої форми динаміки [10] параметричне рівняння цієї трубки має вигляд

$$\begin{cases} x^i = x^i(t, \boldsymbol{\xi}),\ i = 1, 2, 3, \\ x^0 = ct, \end{cases} \tag{2.1}$$

де $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3)$, причому

$$x^i(0, \boldsymbol{\xi}) = \xi^i. \tag{2.2}$$

Зручно вважати, що шукані функції $x^i(t, \boldsymbol{\xi})$ визначаються перерізами $\mathbb{F} \to \mathbb{E}$ деякої локально тривіяльної в'язки (bundle) π: $\mathbb{E} \to \mathbb{F}$, яка в локальних координатах виглядає так:

$$\pi : (t, \xi^i, x^i) \mapsto (t, \xi^i). \tag{2.3}$$

Приймаємо, що множина $\mathfrak{M}$ перерізів в'язки π, які описують рух нашої системи на часовому інтервалі $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, може бути визначена з умови стаціонарности функціонала

$$I = \int_{\mathcal{I}} dt \int_{\mathcal{O}} d^3\xi \, L, \tag{2.4}$$

де функція Лаґранжа $L : J^1\pi \to \mathbb{R}$ задана на многовиді $J^1\pi$ 1-струменів в'язки π. Координатами цього многовиду служать величини

$$(t, \xi^i, x^i, v^i, x^i{}_j), \tag{2.5}$$

означені так, що на перерізі, який відповідає функції $x^i(t, \boldsymbol{\xi})$, значення v^i та $x^i{}_j$ є її першими похідними за t і ξ^j, відповідно:

$$v^i = \frac{\partial x^i(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial t}, \qquad x^i{}_j = \frac{\partial x^i(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi^j} \tag{2.6}$$

(більше технічних деталей можна знайти в [12,13]). Зауважимо відразу, що в релятивістичній механіці системи частинок припущення, що лаґранжіян L задано на $J^1\pi$, приводить до тривіяльного результату [10,11,14], і необхідно розглядати лаґранжіяни на $J^\infty\pi$, залежні від похідних безмежно високого порядку. У механіці суцільного середовища, як буде видно далі, ситуація значно ліпша.

Множина $\mathfrak{M}$ стаціонарних перерізів для функціонала (2.4) визначається рівняннями Ойлера–Лаґранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - D_t \frac{\partial L}{\partial v^i} - D_j \frac{\partial L}{\partial x^i{}_j} = 0, \tag{2.7}$$

де векторні поля D_t і D_j — оператори "повних похідних" за t та ξ^j, відповідно:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + v^i_t \frac{\partial}{\partial v^i} + x^i{}_{jt} \frac{\partial}{\partial x^i{}_j} + \ldots,$$

$$D_j = \frac{\partial}{\partial \xi^j} + x^i{}_j \frac{\partial}{\partial x^i} + v^i{}_j \frac{\partial}{\partial v^i} + x^i{}_{kj} \frac{\partial}{\partial x^i{}_k} + \ldots, \tag{2.8}$$

$$v^i_t = \frac{\partial v^i}{\partial t}, \quad v^i{}_j = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^j},$$

$$x^i{}_{jt} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial \xi^j}, \quad x^i{}_{kj} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^k \partial \xi^j}. \tag{2.9}$$

Формулювання умов релятивістичної інваріянтности вимагає означення дії групи Пуанкаре — групи симетрії замкнених релятивістичних систем — у просторі $J^1\pi$, у якому задана функція Лаґранжа. Для цього, як і в механіці системи частинок [10,11,14], побудуємо спочатку реалізацію алгебри Лі групи Пуанкаре дотичними векторними полями. Цілком аналогічно до дискретного випадку означимо поля, що відповідають часовим ($\mathcal{H}$) і просторовим ($\mathcal{P}_i$) трансляціям, просторовим поворотам ($\mathcal{J}_i$) та перетворенням Лоренца ($\mathcal{K}_i$), формулами:

$$\mathcal{H} = D_t - \frac{\partial}{\partial t}, \tag{2.10}$$

$$\mathcal{P}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.11}$$

$$\mathcal{J}_i = \epsilon_{ijk} \left(x^j \frac{\partial}{\partial x_k} + v^j \frac{\partial}{\partial v_k} + x^j{}_l \frac{\partial}{\partial x_{kl}} + \cdots \right), \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i = {} & \left(-t\delta^j_i + \frac{1}{c^2} x_i v^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \\ & + \left[D_t \left(-t\delta^j_i + \frac{1}{c^2} x_i v^j \right) \right] \frac{\partial}{\partial v^j} \\ & + \left[D_k \left(-t\delta^j_i + \frac{1}{c^2} x_i v^j \right) \right] \frac{\partial}{\partial x^j{}_k} + \cdots . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Тривимірні індекси $i, j, k \ldots$ піднімаються та опускаються декартовою метрикою $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, так що, наприклад,

$$x_{kl} = \delta_{ki} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^l} = \delta_{ki} x^i{}_l; \tag{2.14}$$

ϵ_{ijk} — антисиметричний тензор Леві–Чівіта.

Легко переконатися, що векторні поля (2.10)–(2.13) дійсно задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лі групи Пуанкаре. Вони не діють на базі $\mathbb{F}$ в'язки π (тобто на змінні $t, \boldsymbol{\xi}$), задаючи т. зв. вертикальну реалізацію алгебри Пуанкаре.

Незначна модифікація операторів $\mathcal{H}$ і $\mathcal{K}_i$,

$$\mathcal{H} \to \hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - D_t = -\frac{\partial}{\partial t}, \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_i \to \hat{\mathcal{K}}_i = \mathcal{K}_i - \frac{1}{c^2} x_i D_t = \\ & = -t\mathcal{P}_i - \frac{x_i}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \left(-\delta^j_i + \frac{v_i v^j}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial v^j} \\ & + \frac{1}{c^2} x_{ik} v^j \frac{\partial}{\partial x^j{}_k} + \cdots , \end{aligned} \tag{2.16}$$

яка не впливає на їхні комутаційні співвідношення, приводить до 10 операторів (2.11), (2.12), (2.15), (2.16), що ґенерують струменеве продовження перетворень тотального простору $\mathbb{E}$ в'язки π. Ці перетворення отримуються простим інтеґруванням відповідних рівнянь Лі та мають вигляд:
– для часових трансляцій

$$e^{\tau\hat{\mathcal{H}}}\ :\ (t,x^i)\mapsto(t-\tau,x^i); \tag{2.17}$$

– для просторових трансляцій

$$e^{\alpha^i\mathcal{P}_i}\ :\ (t,x^i)\mapsto(t,x^i+\alpha^i); \tag{2.18}$$

– для просторових поворотів

$$e^{\theta^i\mathcal{J}_i}\ :\ (t,x^i)\mapsto(t,R^i{}_j(\theta)x^j), \tag{2.19}$$

де $R^i{}_j(\theta)$ — ортоґональна матриця;

$$\delta_{kl}R^k{}_iR^l{}_j=\delta_{ij}; \tag{2.20}$$

– для перетворень Лоренца

$$e^{\lambda^i\mathcal{K}_i}\ :\ (t,x^i)\mapsto(t',x^{i'}), \tag{2.21}$$

де

$$t'=\Gamma\left(t-\frac{V_i}{c^2}x^i\right),$$

$$x^{i'}=x^i+\frac{\Gamma^2}{1+\Gamma}\frac{V^iV_k}{c^2}x^k-tV^i\Gamma\equiv A^i{}_k(V)x^k-tV^i\Gamma,$$

$$\Gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{2.22}$$

і замість канонічного параметра $\boldsymbol{\lambda}$ використано величину $\mathbf{V}$ — швидкість системи відліку, що пов'язана з $\boldsymbol{\lambda}$ співвідношенням

$$\frac{\mathbf{V}}{c}=\frac{\boldsymbol{\lambda}}{|\boldsymbol{\lambda}|}\mathrm{th}|\boldsymbol{\lambda}|. \tag{2.23}$$

Відзначимо, що всі векторні поля (2.10)–(2.16) не діють на координату $\boldsymbol{\xi}$. Легко переконатися за допомогою (2.1), що перетворення (2.17)–(2.22) приводять до звичайних перетворень групи Пуанкаре у просторі Мінковського. Навпаки, виходячи з останніх, можна прийти до ґенераторів (2.10)–(2.13) звичними для релятивістичної механіки міркуваннями [10,11].

Достатньою умовою інваріянтности множини $\mathfrak{M}$ розв'язків рівнянь Ойлера–Лаґранжа (2.7) є інваріянтність функціонала дії (2.4) або "інваріянтність з точністю до повної похідної" відповідної функції Лаґранжа [15–17]. Тож умови Пуанкаре-інваріянтности варіяційного опису релятивістичного суцільного середовища формулюємо за допомогою ґенераторів (2.10)–(2.13) у вигляді системи лінійних диференційних рівнянь першого порядку для функції Лаґранжа L:

$$\mathcal{H}L=D_\mu\Omega^\mu_0,\quad \mathcal{P}_iL=D_\mu\Omega^{\mu T}_i,\quad \mathcal{J}_iL=D_\mu\Omega^{\mu R}_i, \tag{2.24}$$

$$\mathcal{K}_iL=D_\mu\Omega^{\mu L}_i,\qquad D_0\equiv D_t, \tag{2.25}$$

де Ω — деякі функції, які, аналогічно до дискретного випадку [10,11,14], можна вибрати у вигляді

$$\Omega^{\mu T}_i=0,\quad \Omega^{\mu R}_i=0,\quad \Omega^i_0=0,\quad \Omega^{jL}_i=0, \tag{2.26}$$

$$\Omega^0_0=L,\qquad \Omega^{0L}_i=c^{-2}x_iL. \tag{2.27}$$

Тоді рівняння (2.24), (2.25) набирають форми

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial x^i}=0, \tag{2.28}$$

$$\epsilon_{ijk}\left(v^j\frac{\partial L}{\partial v_k}+x^j{}_l\frac{\partial L}{\partial x_{kl}}\right)=0, \tag{2.29}$$

$$\hat{\mathcal{K}}_iL=c^{-2}v_iL. \tag{2.30}$$

Знайдемо їх загальний розв'язок. З (2.28) випливає, що L не містить t і функцій x^i. Умову (2.30) з урахуванням (2.28) записуємо так:

$$\left(-\delta^j_i+\frac{v_iv^j}{c^2}\right)\frac{\partial L}{\partial v^j}+\frac{1}{c^2}x_{ik}v^j\frac{\partial L}{\partial x^j{}_k}-\frac{v_i}{c^2}L=0. \tag{2.31}$$

Підставляння

$$L=-F\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{2.32}$$

знищує у (2.31) член, пропорційний до L, приводячи до рівнянь, однорідних за похідними від нової невідомої функції F:

$$\hat{\mathcal{K}}_iF\equiv\left(-\delta^j_i+\frac{v_iv^j}{c^2}\right)\frac{\partial F}{\partial v^j}+\frac{1}{c^2}x_{ik}v^j\frac{\partial F}{\partial x^j{}_k}=0. \tag{2.33}$$

Умовами їх сумісности служить вимога обертової інваріянтности (2.29). Віднотуємо, що стосовно поворотів, ґенерованих векторним полем (2.12), величини v^i та $x^i{}_k$ перетворюються однаково — як компоненти 3-векторів за індексом i. Однорідність оператора $\hat{\mathcal{K}}_i$ за $x^i{}_k$ дозволяє шукати часткові розв'язки рівняння (2.33) у вигляді обертово-інваріянтних виразів

$$g_{kl}=x^i{}_kx^j{}_lB_{ij}(v) \tag{2.34}$$

з деякою матрицею $B_{ij}(v)$, залежною від швидкости v^i. Єдиною сенсовною структурою симетричної матриці B_{ij}, яку можна побудувати з v^i, є

$$B_{ij}=b_1\delta_{ij}+b_2v_iv_j, \tag{2.35}$$

де b_1, b_2 — функції від $\mathbf{v}^2$. Маємо

$$\hat{\mathcal{K}}_i g_{kl} = x^m{}_k x^n{}_l \left(-\delta_i^j + \frac{v_i v^j}{c^2}\right) \frac{\partial B_{mn}}{\partial v^j} + \frac{v^j}{c^2}\left(x_{ik} x^m{}_l B_{jm} + x_{il} x^m{}_k B_{mj}\right) \tag{2.36}$$

$$= x^m{}_k x^n{}_l \left\{ \left(-\delta_i^j + \frac{v_i v^j}{c^2}\right) \frac{\partial B_{mn}}{\partial v^j} + \frac{v^j}{c^2}\left(\delta_{im} B_{jn} + \delta_{in} B_{jm}\right) \right\}.$$

Умова обертання в нуль фігурної дужки дозволяє визначити функції b_1, b_2 з (2.35), а отже, і матрицю B_{ij}:

$$B_{ij} = \delta_{ij} + \frac{v_i v_j}{c^2 - v^2} = \delta_{ij} + \gamma^2 \frac{v_i v_j}{c^2},$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.37}$$

Таким чином, згідно з загальним правилом розв'язування рівнянь у часткових похідних першого порядку (див. [15,18]), загальним розв'язком рівняння (2.33) буде довільна функція 9-ти величин g_{kl}, ξ^i:

$$F = F(g_{kl}, \xi^i). \tag{2.38}$$

У нерелятивістичному наближенні функція Лаґранжа деформівного твердого тіла в лаґранжевих координатах є такою: [19,20]

$$L^{(0)} = \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \left[\frac{1}{2} v^2 - u^{(0)}\left(g_{kl}^{(0)}, \xi^i\right)\right], \tag{2.39}$$

де $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$ — розподіл густини в початковий момент часу і $u^{(0)}$ — нерелятивістична густина внутрішньої енерґії тіла, виражена в термінах тензора деформації $g_{kl}^{(0)} = \delta_{ij} x^i{}_k x^j{}_l$. Умова узгоджености з нерелятивістичним наближенням підказує такий вибір загальної структури лаґранжіяна релятивістичного суцільного середовища:

$$L = -\rho_0(\boldsymbol{\xi})(c^2 + u)\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{2.40}$$

де u — густина внутрішньої енерґії тіла,

$$u = u(g_{kl}, \xi^i), \tag{2.41}$$

яка є лоренцовим скаляром:

$$\hat{\mathcal{K}}_i u = 0. \tag{2.42}$$

Величина g_{kl}, означена формулами (2.34), (2.37), у нерелятивістичному наближенні збігається з тензором деформації $g_{kl}^{(0)} = \delta_{ij} x^i{}_k x^j{}_l$ і може розглядатися як релятивістична міра деформації тіла. Тензор B_{ij}, який визначає фактично відхилення g_{kl} від $g_{kl}^{(0)}$, має низку цікавих властивостей:

$$\left(\delta_i^j - \frac{v_i v^j}{c^2}\right) B_{jk} = \delta_{ik}, \tag{2.43}$$

$$A^i{}_k(v) A^k{}_j(v) = B^i_j, \tag{2.44}$$

де $A^i{}_k(V)$ — тензор, що входить у перетворення Лоренца (2.22) (його властивості докладно обговорені, наприклад, у праці [21]). Друге із цих співвідношень показує, що g_{kl} можна подати так:

$$g_{kl} = \delta_{ij} y^i{}_k y^j{}_l, \tag{2.45}$$

де величини

$$y^i{}_k \equiv A^i{}_j(v) x^j{}_k \tag{2.46}$$

відрізняються від звичайних компонент тензора дисторсії $x^i{}_k$ (матричним) множником, що характеризує лоренцеве скорочення рухомих об'єктів. Формула (2.43) засвідчує, що g_{kl} збігається з релятивістичною мірою деформації, введеною у праці [7]. Там же обговорено її фізичний зміст: для світових ліній близьких матеріяльних елементів $\boldsymbol{\xi}$ та $\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}$ вона характеризує величину 4-інтервалу між точками цих ліній, що лежать на гіперплощині, ортоґональній (у сенсі простору Мінковського) до 4-вектора швидкости

$$\hat{u}^\mu = \gamma(c, \mathbf{v}); \qquad \hat{u}^\mu \hat{u}_\mu = -c^2. \tag{2.47}$$

Висловлюючись по-іншому, g_{kl} порівнює величину початкового інтервалу $\delta_{ij} d\xi^i d\xi^j$ з просторовим інтервалом між точками світових ліній елементів $\boldsymbol{\xi}$ та $\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}$, одночасними з погляду супутньої системи відліку, швидкість якої дорівнює швидкості елемента $\boldsymbol{\xi}$ у момент вимірювання.

Як і слід було сподіватися, залежність u від ентропії s можна ввести лише тоді, коли остання, виражена в лаґранжевих координатах, не залежить від t:

$$s = s(\boldsymbol{\xi}). \tag{2.48}$$

Тоді можна покласти

$$u = u(g_{kl}, s, \boldsymbol{\xi}). \tag{2.49}$$

При цьому, звичайно, як випливає з (2.16), ентропія буде скаляром щодо перетворень Лоренца:

$$\hat{\mathcal{K}}_i s = 0. \tag{2.50}$$

Це ж стосується й температури, означеної співвідношенням

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial s} \tag{2.51}$$

(див. (2.42)). Таким чином, θ — це температура, виміряна термометром, що рухається разом з тілом [2].

Укажемо ще вигляд функції Лаґранжа (2.40) в ойлерових змінних. Якщо в області $\mathcal{I} \times \mathcal{O}$ визначник

$$\Delta \equiv \det\|x^i{}_j\| \tag{2.52}$$

не дорівнює нулеві, то співвідношення $x^i = x^i(t, \boldsymbol{\xi})$ можна обернути, виражаючи $\boldsymbol{\xi}$ через $t, \mathbf{x}$. Використовуючи ці вирази, усі розглянуті величини v^i, $x^i{}_j$, ... можна вважати функціями змінних Ойлера $t, \mathbf{x}$. Тоді вектор швидкости $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ ґенеруватиме рух згідно з рівнянням Лі

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \tag{2.53}$$

яке слід інтеґрувати з початковою умовою (2.2). Відповідно до загальних правил зв'язку між функціями Лаґранжа в лаґранжевих та ойлерових змінних [19,20], маємо

$$L_{\mathrm{Euler}} = \Delta^{-1} L_{\mathrm{Lagrange}}, \tag{2.54}$$

де Δ — якобіян переходу, означений формулою (2.52). Позначаючи

$$\rho \equiv \rho_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}\, \Delta^{-1}, \tag{2.55}$$

отримуємо

$$L_{\mathrm{Euler}} = -\rho(c^2 + u), \tag{2.56}$$

де всі величини у ρ та u вважаються вираженими в термінах функцій $\xi^i(t, \mathbf{x})$, обернених до (2.1), та їх похідних за t і x^i.

III. ТЕНЗОР ЕНЕРҐІЇ-ІМПУЛЬСУ

Важливою рисою лаґранжевого формалізму є можливість отримувати закони збереження (рівняння неперервности) з умов інваріянтности за допомогою теореми Нетер. Так, у нашому випадку інваріянтності щодо 10-параметричної групи перетворень (2.17)–(2.22) відповідає 10 рівностей нулеві повних диверґенцій:

часовим трансляціям —

$$D_t E + D_i \Pi^i = 0; \tag{3.1}$$

$$E = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L, \quad \Pi^i = v^j \frac{\partial L}{\partial x^j{}_i}; \tag{3.2}$$

просторовим трансляціям —

$$D_t P_i + D_j P_i{}^j = 0, \tag{3.3}$$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}, \quad P_i{}^j = \frac{\partial L}{\partial x^i{}_j}; \tag{3.4}$$

просторовим поворотам —

$$D_t J_i + D_j J_i{}^j = 0, \tag{3.5}$$

$$J_i = \epsilon_{ijk} x^j P^k, \quad J_i{}^j = \epsilon_{ikl} x^k P^{lj}; \tag{3.6}$$

перетворенням Лоренца —

$$D_t K_i + D_j K_i{}^j = 0, \tag{3.7}$$

$$K_i = -t P_i + \frac{1}{c^2} x_i E, \quad K_i{}^j = -t P_i{}^j + \frac{1}{c^2} x_i \Pi^j. \tag{3.8}$$

Віднотуємо, що співвідношення (3.3) просто збігаються з рівняннями руху (2.7).

Закони збереження (3.1)–(3.8) варто теж подати в ойлерових змінних (t, x^i). Співвідношення

$$D_t f_t + D_j f^j = 0 \tag{3.9}$$

у термінах (t, x^i) набирає вигляду

$$\partial_t f_t + v^i \partial_i f_t + x^i{}_j \partial_i f^j = 0, \tag{3.10}$$

де через ∂_t, ∂_i позначено похідні за t, x^i від функцій, виражених в ойлерових змінних. Виділяючи повну диверґенцію, маємо

$$\partial_t f_t + \partial_i \left(v^i f_t + x^i{}_j f^j \right) - f_t \partial_i v^i - f^j \partial_i x^i{}_j = 0. \tag{3.11}$$

Ураховуючи тотожності

$$\partial_i v^i = \frac{1}{\Delta} D_t \Delta = -\Delta D_t \frac{1}{\Delta} = -\Delta(\partial_t + v^i \partial_i) \frac{1}{\Delta},$$

$$\partial_i x^i{}_j = \frac{1}{\Delta} D_j \Delta = -\Delta D_j \frac{1}{\Delta} = -\Delta x^i{}_j \partial_i \frac{1}{\Delta}, \tag{3.12}$$

можна переписати (3.11) як

$$\Delta\left\{\partial_t \frac{f_t}{\Delta} + \partial_i \frac{1}{\Delta}\left(v^i f_t + x^i{}_j f^j\right)\right\} = 0. \tag{3.13}$$

Таким чином, наслідком співвідношень (3.9) у лаґранжевих змінних $(t, \boldsymbol{\xi})$ за умови $\Delta \neq 0$ є рівності

$$\partial_\mu \tilde{f}^\mu = 0 \tag{3.14}$$

в ойлерових змінних $(t, \mathbf{x})$. Тут $\partial_0 = c^{-1}\partial_t$ і

$$\tilde{f}^0 = c\frac{f_t}{\Delta}, \quad \tilde{f}^i = \frac{1}{\Delta}\left(v^i f_t + x^i{}_j f^j\right). \tag{3.15}$$

При цьому функції f_t, f^i, v^i, $x^i{}_j$ припускаємо вираженими в термінах (t, x^i).

Одержаний результат дозволяє сформувати з величин (3.2), (3.4) симетричний тензор енерґії-імпульсу $T^{\mu\nu}$, що задовольняє рівняння неперервности

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{3.16}$$

Його компоненти є такими:

$$T^{00} = \frac{E}{\Delta}, \qquad T^{0i} = \frac{1}{\mathrm{c}\Delta}\left(v^i E + x^i{}_j \Pi^j\right), \tag{3.17}$$

$$T^{i0} = \frac{\mathrm{c}}{\Delta}P^i, \quad T^{ij} = \frac{1}{\Delta}\left(v^i P^j + x^i{}_k P^{jk}\right). \tag{3.18}$$

При цьому умови Пуанкаре-інваріянтности забезпечують його симетричність: легко переконатися, що умова обертової інваріянтности (2.29) приводить до

$$T^{ij} = T^{ji}, \tag{3.19}$$

а інваріянтність щодо перетворень Лоренца, згідно з (2.31), — до

$$T^{0i} = T^{i0}. \tag{3.20}$$

З формули (2.40) для функції Лаґранжа маємо:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = \rho_0 \frac{c^2 + u}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{v_i}{c^2} - \rho_0 \frac{\partial u}{\partial v^i}\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{3.21}$$

$$P_i{}^j = \frac{\partial L}{\partial x^i{}_j} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x^i{}_j}\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{3.22}$$

$$E = \rho_0 \frac{c^2 + u}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \rho_0 v^i \frac{\partial u}{\partial v^i}\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{3.23}$$

Використовуючи означення (2.55), компоненти (3.17), (3.18) тензора енерґії-імпульсу можна подати так:

$$T^{00} = \rho \frac{c^2 + u}{1 - v^2/c^2} - \rho v^i \frac{\partial u}{\partial v^i}, \tag{3.24}$$

$$T^{0i} = \rho \frac{c^2 + u}{1 - v^2/c^2}\frac{v^i}{c} - c\rho \frac{\partial u}{\partial v_i}, \tag{3.25}$$

$$T^{ij} = \rho \frac{c^2 + u}{1 - v^2/c^2}\frac{v^i v^j}{c^2} - \rho\left(x^i{}_k \frac{\partial u}{\partial x_{jk}} + v^i \frac{\partial u}{\partial v_j}\right). \tag{3.26}$$

Позначмо

$$\rho\left(x^i{}_k \frac{\partial u}{\partial x_{jk}} + v^i \frac{\partial u}{\partial v_j}\right) \equiv \sigma^{ij}. \tag{3.27}$$

З рівняння (2.33), яке задовольняє функція u, випливає, що

$$\rho \frac{\partial u}{\partial v_i} = \frac{1}{c^2} v_j \sigma^{ji}; \tag{3.28}$$

симетрія тензора σ^{ij} є прямим наслідком обертової інваріянтности функції u. Таким чином, компоненти тензора енерґії-імпульсу деформівного твердого тіла набувають стандартного вигляду [2,7]:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho \frac{c^2 + u}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{c^2} v_i v_j \sigma^{ij}, \\ T^{0i} &= \rho \frac{c^2 + u}{1 - v^2/c^2}\frac{v^i}{c} - \frac{1}{c} v_j \sigma^{ij}, \\ T^{ij} &= \rho \frac{c^2 + u}{1 - v^2/c^2}\frac{v^i v^j}{c^2} - \sigma^{ij}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Легко переконатися у виконанні співвідношень [2]

$$T^{\mu\nu}\hat{u}_\nu = -\rho(c^2 + u)\hat{u}^\mu,$$

$$T^{\mu\nu}\hat{u}_\mu\hat{u}_\nu = c^2\rho(c^2+u), \tag{3.30}$$

де 4-швидкість $\hat{u}^\mu$ означена формулою (2.47).

Закони збереження (3.5), (3.7) явно формуються в закон збереження моменту

$$M^{\sigma\mu\nu} = x^\sigma T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\sigma\nu}; \tag{3.31}$$

$$\partial_\nu M^{\sigma\mu\nu} = 0, \tag{3.32}$$

виконання якого є простим наслідком симетрії $T^{\mu\nu}$. Нарешті, очевидні рівності

$$D_t\rho_0(\boldsymbol{\xi}) = 0, \quad D_t s(\boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{3.33}$$

приводять до законів збереження числа частинок та ентропії в ойлерових змінних:

$$\partial_\mu n^\mu = 0, \qquad n^\mu = \rho\hat{u}^\mu; \tag{3.34}$$

$$\partial_\mu s^\mu = 0, \qquad s^\mu = \rho s\hat{u}^\mu; \tag{3.35}$$

де ρ означено формулою (2.55).

Підставивши компоненти (3.29) у рівняння (3.16), отримаємо (див. [7]):

$$\partial_t\left[\rho\gamma^2(c^2+u) - c^{-2}\sigma^{ij}v_iv_j\right]$$
$$+\partial_i\left[\rho\gamma^2(c^2+u)v^i - v_j\sigma^{ij}\right] = 0, \tag{3.36}$$

$$\partial_t\left[\rho\gamma^2(c^2+u)v^i - \sigma^{ij}v_j\right]$$
$$+\partial_j\left[\rho\gamma^2(c^2+u)v^iv^j - c^2\sigma^{ij}\right] = 0. \tag{3.37}$$

Члени цих рівнянь, що не містять σ^{ij}, можна перетворити за допомогою формули (3.34):

$$\partial_t\rho\gamma^2(c^2+u) + \partial_i\rho\gamma^2(c^2+u)v^i = \partial_\mu\gamma(c^2+u)n^\mu$$
$$= n^\mu\partial_\mu\gamma(c^2+u) = \rho\gamma D\gamma(c^2+u), \tag{3.38}$$

$$\partial_t\rho\gamma^2(c^2+u)v^i + \partial_j\rho\gamma^2(c^2+u)v^iv^j = \partial_\mu\gamma(c^2+u)v^in^\mu$$
$$= n^\mu\partial_\mu\gamma(c^2+u)v^i = \rho\gamma D\gamma(c^2+u)v^i, \tag{3.39}$$

де D — оператор D_t, виражений у термінах (t, x^i):

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v^i\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.40}$$

Тоді рівняння (3.36), (3.37) набирають вигляду [7]

$$\rho\gamma D\left[\gamma(c^2+u)\right] = \partial_i\sigma^{ij}v_j + \frac{1}{c^2}\partial_t\sigma^{ij}v_iv_j, \tag{3.41}$$

$$\rho\gamma D\left[\gamma\left(1+\frac{u}{c^2}\right)v^i\right] = \partial_j\sigma^{ij} + \frac{1}{c^2}\partial_t\sigma^{ij}v_j. \tag{3.42}$$

Домноживши рівняння (3.42) скалярно на v^i та врахувавши (3.41), одержуємо

$$\rho\gamma(c^2+u)D\gamma = \gamma^2\left\{v_i\left(\partial_j\sigma^{ij} + \frac{1}{c^2}\partial_t\sigma^{ij}v_j\right)\right.$$
$$\left.-\frac{v^2}{c^2}\left(\partial_i\sigma^{ij}v_j + \frac{1}{c^2}\partial_t\sigma^{ij}v_iv_j\right)\right\}. \tag{3.43}$$

За допомогою цього співвідношення подамо (3.41) як [7]

$$\rho Du = \sigma^{ij}\left(\partial_iv_j + \frac{1}{c^2}v_j\partial_tv_i\right). \tag{3.44}$$

Рівняння (3.42), (3.44), (3.34), (3.35) складають систему рівнянь руху недисипативного релятивістичного суцільного середовища. У нерелятивістичному наближенні рівняння (3.42), (3.44) зводяться до стандартної форми [19]

$$\rho Dv^i = \partial_j\sigma^{ij}, \qquad \rho Du = \sigma^{ij}\partial_iv_j. \tag{3.45}$$

Розгляньмо докладніше релятивістичний тензор напружень σ^{ij}, означений формулою (3.27). Функція u залежить від $x^i{}_k$, v^i лише через g_{kl}. Згідно з (2.34) маємо

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i{}_j} = \left(\delta_{jk}x^m{}_l + \delta_{jl}x^m{}_k\right)B_{mi}, \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial v^i} = x^m{}_kx^n{}_l\frac{\partial B_{mn}}{\partial v^i}. \tag{3.47}$$

Оскільки, як випливає з (2.37) і (2.43),

$$\frac{\partial B_{mn}}{\partial v^i} = \frac{1}{c^2}v^j\left(B_{mi}B_{jn} + B_{ni}B_{jm}\right), \tag{3.48}$$

формула (3.47) набирає вигляду

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial v^i} = \frac{1}{c^2}x^m{}_kx^n{}_lv^j\left(B_{mi}B_{jn} + B_{ni}B_{jm}\right), \tag{3.49}$$

і для виразу, що визначає σ_{ij}, згідно з (3.27), матимемо

$$x_{ik}\frac{\partial u}{\partial x^j{}_k} + v_i\frac{\partial u}{\partial v^j} = \left\{\left(x_{ik}x^m{}_l + x_{il}x^m{}_k\right)B_{mj}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c^2}x^m{}_kx^n{}_lv_iv^p(B_{mp}B_{jn} + B_{mj}B_{np})\right\}\frac{\partial u}{\partial g_{kl}}$$
$$= x^m{}_kx^n{}_l\left\{B_{mj}\left(\delta_{in} + \frac{1}{c^2}v_iv^pB_{np}\right)\right.$$

$$+B_{nj}\left(\delta_{im}+\frac{1}{c^2}v_iv^pB_{mp}\right)\Big\}\frac{\partial u}{\partial g_{kl}}. \qquad (3.50)$$

Ураховуючи, що, як випливає з (2.37) або (2.43),

$$\delta_{ij}+\frac{1}{c^2}v_jv^kB_{ik}=B_{ij}, \qquad (3.51)$$

можемо, використовуючи симетрію g_{kl}, записати

$$\sigma_{ij}=2\rho\frac{\partial u}{\partial g_{kl}}x^m{}_kx^n{}_lB_{mi}B_{nj}. \qquad (3.52)$$

Це дозволяє розглядати σ_{ij} як релятивістичне узагальнення тензора напружень Коші. Якщо означити

$$\bar\sigma^{kl}\equiv 2\rho\frac{\partial u}{\partial g_{kl}}, \qquad (3.53)$$

то одержимо

$$\sigma_{ij}=\bar\sigma^{kl}x^m{}_kx^n{}_lB_{mi}B_{nj}. \qquad (3.54)$$

За допомогою щойно введених величин (3.53) можна подати трохи по-іншому рівняння (3.44) для внутрішньої енерґії. Розрахуймо повну похідну за t від g_{kl}. У лаґранжевих координатах, використовуючи формулу (3.48), маємо:

$$D_tg_{kl}=\left(\frac{\partial^2x^m}{\partial t\partial\xi^k}x^n{}_l+\frac{\partial^2x^n}{\partial t\partial\xi^l}x^m{}_k\right)B_{mn}$$
$$+x^m{}_kx^n{}_l\frac{\partial B_{mn}}{\partial v^i}D_tv^i=\left(\frac{\partial v^m}{\partial\xi^k}x^n{}_l+\frac{\partial v^n}{\partial\xi^l}x^m{}_k\right)B_{mn}$$
$$+\frac{1}{c^2}x^m{}_kx^n{}_lv^j(B_{mi}B_{nj}+B_{mj}B_{ni})D_tv^i. \qquad (3.55)$$

Перехід до ойлерових координат дає

$$Dg_{kl}=\left(\frac{\partial v^m}{\partial x^j}x^j{}_kx^n{}_l+\frac{\partial v^n}{\partial x^j}x^j{}_lx^m{}_k\right)B_{mn}+\frac{1}{c^2}x^m{}_kx^n{}_lv^j(B_{mi}B_{nj}+B_{mj}B_{ni})\left(\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^q\frac{\partial v^i}{\partial x^q}\right)$$
$$=x^m{}_kx^n{}_l\left\{\frac{1}{c^2}(B_{mi}B_{nj}+B_{mj}B_{ni})v^j\frac{\partial v^i}{\partial t}+\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\left[\left(\delta_{mj}+\frac{1}{c^2}v_jv^qB_{qm}\right)B_{in}+\left(\delta_{nj}+\frac{1}{c^2}v_jv^qB_{qn}\right)B_{im}\right]\right\} \qquad (3.56)$$

або, враховуючи (3.51),

$$Dg_{kl}=x^m{}_kx^n{}_l(B_{mi}B_{nj}+B_{mj}B_{ni})$$
$$\times\left(\frac{\partial v^j}{\partial x_i}+\frac{1}{c^2}v^j\frac{\partial v^i}{\partial t}\right). \qquad (3.57)$$

Порівняння (3.54) і (3.57) показує, що рівняння (3.44) можна записати так:

$$\rho Du=\frac{1}{2}\bar\sigma^{kl}Dg_{kl}, \qquad (3.58)$$

що виражає перший закон термодинаміки для адіябатичного руху релятивістичного суцільного середовища.

Зауважимо, що лаґранжіяном (2.40) можна формально користуватися і в дисипативному випадку, вважаючи у формулі (2.49) густину ентропії s *заданою* функцією часу:

$$s=s(t,\boldsymbol{\xi}). \qquad (3.59)$$

Це порушить інваріянтність щодо часових трансляцій (2.17) і перетворень Лоренца (2.22), так що закони збереження (3.1), (3.7), які відповідають такій інваріянтності, перетворяться в балансові співвідношення: у їхніх правих частинах з'являються вирази $-\partial L/\partial t$ та $-c^{-2}x_i\partial L/\partial t$ відповідно. Оскільки, як випливає з (2.40) і (2.51),

$$-\frac{\partial L}{\partial t}=\rho_0\gamma^{-1}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t}=\rho_0\gamma^{-1}\theta\frac{\partial s}{\partial t}, \qquad (3.60)$$

то при переході до ойлерових змінних перший закон термодинаміки (3.58) набере правильного вигляду

$$\rho Du=\frac{1}{2}\bar\sigma^{kl}Dg_{kl}+\rho\theta Ds. \qquad (3.61)$$

Однак побудувати коректні рівняння руху для ентропії $s(t,\boldsymbol{\xi})$, виходячи з лаґранжіяна (2.40), неможливо — для цього потрібна суттєва зміна його структури, пов'язана з уведенням нових динамічних змінних, що становить проблему, не розв'язану ще й у межах нерелятивістичної теорії.

IV. СЛАБКОРЕЛЯТИВІСТИЧНІ ПОПРАВКИ

Розгляньмо розвинення лаґранжіяна (2.40) за степенями c^{-2} для встановлення вигляду першої слабкорелятивістичної поправки (порядку c^{-2}) до нерелятивістичного виразу (2.39). Приймаючи, що

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)} c^{-2n}, \tag{4.1}$$

і враховуючи розвинення

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{v^4}{8c^4} + O(c^{-6}), \tag{4.2}$$

$$g_{kl} = x^i{}_k x^j{}_l \left(\delta_{ij} + \frac{v_i v_j}{c^2}\right) + O(c^{-4}), \tag{4.3}$$

маємо

$$u(g_{kl}) = u^{(0)}\left(g_{kl}^{(0)}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial u^{(0)}\left(g_{kl}^{(0)}\right)}{\partial g_{kl}^{(0)}} x^i{}_k x^j{}_l v_i v_j + \frac{1}{c^2} u^{(1)}\left(g_{kl}^{(0)}\right) + O(c^{-4}), \tag{4.4}$$

або, враховуючи (3.52),

$$u(g_{kl}) = u^{(0)}\left(g_{kl}^{(0)}\right) + \frac{1}{2c^2\rho}\sigma^{(0)ij} v_i v_j + \frac{1}{c^2} u^{(1)}\left(g_{kl}^{(0)}\right) + O(c^{-4}). \tag{4.5}$$

Отже, перші члени розвинення лаґранжіяна (2.40) за степенями c^{-2} мають вигляд

$$\begin{aligned} L = &-\rho_0(\boldsymbol{\xi})c^2 + \rho_0(\boldsymbol{\xi})\left(\frac{v^2}{2} - u^{(0)}\left(g_{kl}^{(0)}\right)\right) + \rho_0(\boldsymbol{\xi})\frac{v^4}{8c^2} \\ &+ \frac{1}{2c^2}\rho_0(\boldsymbol{\xi})\left\{v^2 u^{(0)} - \frac{1}{\rho}\sigma^{(0)ij} v_i v_j\right\} + \frac{1}{c^2} u^{(1)}\left(g_{kl}^{(0)}\right) + O(c^{-4}). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Отримані вирази точно відтворюють загальну структуру слабкорелятивістичного лаґранжіяна системи N взаємодіючих частинок [10,11]:

$$\begin{aligned} L = &-\sum_a m_a c^2 + \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_{a<b} u_{ab}(r_{ab}) + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} \\ &+ \frac{1}{2c^2}\sum_{a<b}\left\{(\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b) u_{ab}(r_{ab}) - (\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_a)(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_b)\frac{1}{r_{ab}}\frac{du_{ab}}{dr_{ab}}\right\} + \psi(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Тут $u_{ab}(r_{ab})$ — нерелятивістичний статичний потенціял двочастинкової взаємодії, $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ — відносні координати частинок і $\psi(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b)$ — довільні ґалілей-інваріянтні функції, що виникають у процесі наближеного інтеґрування умов релятивістичної інваріянтности лаґранжевого опису системи точкових частинок. Зокрема для взаємодій, симетричних щодо переставляння частинок, $\psi(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{0}) = 0$. Порівнюючи вирази (4.6) і (4.7), слід урахувати, що в недисипативному випадку, для якого написані лаґранжіяни (2.40) і (4.6), нехтується різницями між середньою швидкістю частинки $\langle v_a^i \rangle$ та середньою швидкістю $v^i(t, \mathbf{x})$ елемента суцільного середовища, поблизу якого знаходиться частинка в момент t — саме до таких різниць пропорційні теплові потоки (див., наприклад, [22,23]).

V. ДОДАТКОВІ СИМЕТРІЇ

Лаґранжіян (2.40) виведений у припущенні Пуанкаре-інваріянтности опису суцільного середовища й охоплює, власне кажучи, усі можливі моделі релятивістичного недисипативного суцільного середовища за відсутности зовнішніх впливів. Подальша конкретизація моделей можлива в межах теоретико-групового підходу введенням додаткових симетрій, що характеризують певну модель. Приймемо, що відповідна група додаткових симетрій реалізується перетвореннями тотального простору $\mathbb{E}$ в'язки π. Їхня інфінітезимальна форма

$$\begin{aligned} t &\mapsto t + \epsilon^\alpha \eta^0_\alpha(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + o(\epsilon), \\ \xi^i &\mapsto \xi^i + \epsilon^\alpha \eta^i_\alpha(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + o(\epsilon), \\ x^i &\mapsto x^i + \epsilon^\alpha \zeta^i_\alpha(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + o(\epsilon), \end{aligned} \tag{5.1}$$

де ϵ^α, $\alpha = 1, \ldots, r$, — параметри перетворень, η^0_α, $\eta^i_\alpha, \zeta^i_\alpha$ — деякі функції. Умови симетрії лаґранжевого опису щодо перетворень (5.1) виражаються співвідношенням

$$X_\alpha L = D_\mu \Omega^\mu_\alpha, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{5.2}$$

де Ω^μ_α — довільні функції, X_α — ґенератори вертикальної реалізації перетворень (5.1):

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \left(\zeta^i_\alpha - v^i \eta^0_\alpha - x^i{}_j \eta^j_\alpha\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &+ \left[D_t\left(\zeta^i_\alpha - v^i \eta^0_\alpha - x^i{}_j \eta^j_\alpha\right)\right] \frac{\partial}{\partial v^i} + \\ &+ \left[D_j\left(\zeta^i_\alpha - v^i \eta^0_\alpha - x^i{}_k \eta^k_\alpha\right)\right] \frac{\partial}{\partial x^i{}_j} + \cdots . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Покладаючи

$$\Omega^\mu_\alpha = -\eta^\mu_\alpha L + F^\mu_\alpha \tag{5.4}$$

з довільними функціями F^μ_α та використовуючи явний вираз (2.40) для лаґранжіяна, приходимо до рівностей

$$\begin{aligned} &2\left\{x^n{}_l B_{in}\left(D_k \zeta^i_\alpha + c^{-2} x^j{}_k v_j \gamma^2 D_t \zeta^i_\alpha\right)\right. \\ &- x^j{}_k v_j \gamma^2 \left(D_l \eta^0_\alpha + c^{-2} x^n{}_l v_n \gamma^2 D_t \eta^0_\alpha + c^{-2} g_{ln} D_t \eta^n_\alpha\right) \\ &\left. - g_{jl} D_k \eta^j_\alpha\right\} \frac{\partial u}{\partial g_{kl}} + \eta^j_\alpha \frac{\partial u}{\partial \xi^j} + (c^2 + u)\left\{\frac{1}{\rho_0} D_j \rho_0 \eta^j_\alpha\right. \\ &\left. + \gamma^2\left(D_t \eta^0_\alpha - c^{-2} v_j D_t \zeta^j_\alpha + x^j{}_k v_j D_t \eta^k_\alpha\right)\right\} \\ &= -\rho_0^{-1} \gamma D_\mu F^\mu_\alpha . \end{aligned} \tag{5.5}$$

Виконання умов інваріянтности (5.5) імплікує існування законів збереження

$$D_\mu G^\mu_\alpha = 0 \tag{5.6}$$

для величин

$$G^0_\alpha = \left(\zeta^i_\alpha - v^i \eta^0_\alpha - x^i{}_j \eta^j_\alpha\right) \frac{\partial L}{\partial v^i} + \eta^0_\alpha L - F^0_\alpha, \tag{5.7}$$

$$G^j_\alpha = \left(\zeta^i_\alpha - v^i \eta^0_\alpha - x^i{}_k \eta^k_\alpha\right) \frac{\partial L}{\partial x^i{}_j} + \eta^j_\alpha L - F^j_\alpha. \tag{5.8}$$

Компоненти збережних величин (5.7), (5.8) зручно подати в термінах функцій, означених формулами (3.2), (3.4):

$$\begin{aligned} G^0_\alpha &= \zeta^i_\alpha P_i - \eta^0_\alpha E - \eta^j_\alpha x^i{}_j P_i - F^0_\alpha, \\ G^j_\alpha &= \zeta^i_\alpha P_i{}^j - \eta^0_\alpha \Pi^j - \eta^k_\alpha \left(x^i{}_k P_i{}^j - \delta^j_k L\right) - F^j_\alpha. \end{aligned} \tag{5.9}$$

В ойлерових змінних, згідно з (3.15), (3.16), закони збереження (5.6) записуємо як

$$\partial_\mu \tilde{G}^\mu_\alpha = 0, \tag{5.10}$$

де

$$\tilde{G}^0_\alpha = c \Delta^{-1} G^0_\alpha, \quad \tilde{G}^i_\alpha = \Delta^{-1}\left(v^i G^0_\alpha + x^i{}_j G^j_\alpha\right). \tag{5.11}$$

Згідно (5.9) і формул (3.17), (3.18), (2.54) вони перетворюються до форми

$$\tilde{G}_{\alpha 0} = \zeta_{\alpha i} T^{i0} - c \eta^0_\alpha T^{00} - \eta^j_\alpha x_{ij} T^{i0} - c \Delta^{-1} F^0_\alpha, \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}^i_\alpha &= \zeta_{\alpha j} T^{ij} - c \eta^0_\alpha T^{0i} - \eta^k_\alpha x_{jk}\left(T^{ij} - \delta^{ij} L_{\text{Euler}}\right) \\ &\quad - \Delta^{-1}\left(v^i F^0_\alpha + x^i{}_j F^j_\alpha\right). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Розгляньмо моделі, які характеризуються деякою групою перетворень змінних ξ^i (матеріяльного континууму) — групою рівноправности, за Труселлом [24]. У цьому випадку у формулах (5.1) слід покласти

$$\eta^i_\alpha = \eta^i_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \quad \eta^0_\alpha = 0, \quad \zeta^i_\alpha = 0. \tag{5.14}$$

Умова інваріянтности (5.5) набере при цьому вигляду

$$-2 g_{pl} \frac{\partial u}{\partial g_{kl}} \frac{\partial \eta^p_\alpha}{\partial \xi^k} + \frac{\partial u}{\partial \xi^k} \eta^k_\alpha + \frac{c^2 + u}{\rho_0} \frac{\partial(\rho_0 \eta^k_\alpha)}{\partial \xi^k} = 0 \tag{5.15}$$

(для простоти тут покладено $F^\mu_\alpha \equiv 0$). Відповідні збережні величини в ойлерових змінних визначатимуться формулами:

$$\tilde{G}_{\alpha 0} = -\eta^j_\alpha x_{ij} T^{i0}, \tag{5.16}$$

$$\tilde{G}_{\alpha j} = -\eta^k_\alpha x_{jk}\left(T^{ij} - \delta^{ij} L_{\text{Euler}}\right). \tag{5.17}$$

Моделі рідини та газу (гідродинаміка) характеризуються інваріянтністю щодо перетворень, які зберігають міру $\rho_0(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi$ в матеріяльному континуумі, так що функції η^k_α задовольняють умову

$$\frac{\partial(\rho_0\eta^k_\alpha)}{\partial\xi^k} = 0, \tag{5.18}$$

загальний розв'язок якої є такий:

$$\eta^j_\alpha = \frac{1}{\rho_0}\epsilon^{jkl}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi^l} \tag{5.19}$$

з довільними функціями $\varphi_k = \varphi_k(\boldsymbol{\xi})$. Отже, у цьому випадку група інваріянтности безмежновимірна.

Приймемо, що внутрішня енерґія тіла має вигляд

$$u = u(g_{kl}, \rho_0, \xi^i), \tag{5.20}$$

де

$$\eta^k_\alpha\frac{\partial u}{\partial\xi^k} = 0. \tag{5.21}$$

Тоді умови інваріянтности (5.15) виглядатимуть так:

$$-2g_{pl}\frac{\partial u}{\partial g_{kl}}\frac{\partial\eta^p_\alpha}{\partial\xi^k} + \frac{\partial u}{\partial\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial\xi^k}\eta^k_\alpha = 0. \tag{5.22}$$

Ураховуючи, що, внаслідок (5.18),

$$\eta^k_\alpha\frac{\partial\rho_0}{\partial\xi^k} + \rho_0\frac{\partial\eta^k_\alpha}{\partial\xi^k} = 0, \tag{5.23}$$

умову (5.22) можна перетворити до форми

$$\left(2g_{pl}\frac{\partial u}{\partial g_{kl}} + \delta_{kp}\rho_0\frac{\partial u}{\partial\rho_0}\right)\frac{\partial\eta^p_\alpha}{\partial\xi^k} = 0. \tag{5.24}$$

Звідси випливає, що u може залежати від g_{kl} лише через інваріянт $g_1 = \det||g_{kl}||$, причому

$$2g_1\frac{\partial u}{\partial g_1} + \rho_0\frac{\partial u}{\partial\rho_0} = 0. \tag{5.25}$$

Останнє рівняння показує, що функція u повинна бути такою:

$$u = u(\rho, \xi^i), \tag{5.26}$$

де $\rho = \rho_0/\sqrt{g_1}$. Оскільки

$$g_1 = \det||g_{kl}|| = \Delta^2\det||B_{ij}|| = \Delta^2\gamma^2, \tag{5.27}$$

величина ρ за умови $\Delta > 0$ збігається з величиною, введеною формулою (2.55) при дослідженні переходу від лаґранжевого до ойлерового опису.

Коли, як це звичайно робиться в гідродинаміці, покласти

$$u = u(\rho, s), \tag{5.28}$$

то ентропія $s(\boldsymbol{\xi})$ повинна, згідно з (5.21), задовольняти умову

$$\eta^k_\alpha\frac{\partial s}{\partial\xi^k} = 0. \tag{5.29}$$

Ураховуючи, що для функції виду (5.28)

$$\frac{\partial u}{\partial v^i} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v^i} = -\rho\gamma^2\frac{v_i}{c^2}\frac{\partial u}{\partial\rho}, \tag{5.30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^i{}_k} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x^i{}_k} = -\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\rho_0}{\gamma\Delta^2}\frac{\partial\Delta}{\partial x^i{}_k} = -\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\tilde{x}^k{}_i, \tag{5.31}$$

де

$$\tilde{x}^k{}_i = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial x^i{}_k} \tag{5.32}$$

— компоненти матриці, оберненої до $x^i{}_k$,

$$x_{ik}\tilde{x}^k{}_j = \delta_{ij}, \tag{5.33}$$

для релятивістичного тензора напружень рідини приходимо, згідно з (3.27), до відомої формули [2]

$$\sigma_{ij} = -PB_{ij}, \tag{5.34}$$

де тиск P означається як:

$$P \equiv \rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}. \tag{5.35}$$

Беручи до уваги вираз (2.37) для B_{ij}, тензор енерґії-імпульсу релятивістичної рідини за допомогою означеної формулою (2.47) 4-швидкости $\hat{u}^\mu$ можна записати компактно [2]

$$T^{\mu\nu} = (P/c^2 + \epsilon)\hat{u}^\mu\hat{u}^\nu + P\eta^{\mu\nu}, \tag{5.36}$$

де ϵc^2 — густина власної енерґії рідини:

$$\epsilon = \rho\left(1 + \frac{u}{c^2}\right). \tag{5.37}$$

За допомогою індексу рідини, який увів Ліхнерович,

$$f \equiv 1 + \frac{1}{c^2}\left(u + \frac{P}{\rho}\right) = 1 + \frac{i}{c^2}, \tag{5.38}$$

де $i \equiv u + P/\rho$ — питома ентальпія [25], вираз (5.36) можна записати так:

$$T^{\mu\nu} = \rho f \hat{u}^\mu \hat{u}^\nu + P\eta^{\mu\nu}. \tag{5.39}$$

Рівняння руху рідини $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ після врахування означення (2.47) та закону збереження числа частинок (3.34) набирають вигляду [25]

$$\rho f \hat{u}^\nu \partial_\nu \hat{u}^\mu + \left(\eta^{\mu\nu} + c^{-2}\hat{u}^\mu \hat{u}^\nu\right)\partial_\nu P = 0. \tag{5.40}$$

У нерелятивістичному наближенні вони зводяться до

$$\rho D v^i + \partial^i P = 0, \tag{5.41}$$

утворюючи разом із законами збереження числа частинок (3.34) та ентропії (3.35),

$$D\rho + \rho \partial_i v^i = 0, \qquad Ds = 0, \tag{5.42}$$

систему рівнянь Ойлера класичної гідродинаміки (див., наприклад, [26]).

Інваріянтності рівнянь гідродинаміки щодо перетворень, означених функціями (5.19), відповідає безмежний набір збережних величин, які знаходять за формулами (5.16), (5.17). Узявши до уваги (5.38), (5.39), їх можна подати так:

$$\tilde{G}^{\alpha 0} = -c\eta^j_\alpha x^i{}_j v_i \gamma^2 \rho f, \tag{5.43}$$

$$\tilde{G}^{\alpha i} = -\eta^k_\alpha x_{jk} B^{ij} \rho f. \tag{5.44}$$

Ізотропне тіло характеризується наявністю конфігурації, жоден поворот якої не можна визначити експериментально [24]. Якщо такою конфігурацією вважати початкову, то опис ізотропного тіла має бути інваріянтним щодо поворотів змінних ξ^i:

$$\eta^i_\alpha = \delta^{ij}\epsilon_{j\alpha k}\xi^k, \qquad \alpha = 1,2,3. \tag{5.45}$$

При цьому, як наслідок нашого вибору початкової конфігурації,

$$\rho_0 = \rho_0(\boldsymbol{\xi}^2), \qquad s = s(\boldsymbol{\xi}^2); \qquad \boldsymbol{\xi}^2 \equiv \delta_{ij}\xi^i\xi^j. \tag{5.46}$$

Тоді умови інваріянтности (5.15) набирають вигляду

$$\epsilon_{ijk}\delta^{jp} g_{pl} \frac{\partial u}{\partial g_{kl}} = 0 \tag{5.47}$$

і свідчать, що u залежить від компонент тензора g_{kl} лише через інваріянти [24]

$$g_1 = \det\|g_{kl}\|,$$

$$g_2 = \mathrm{tr}\|g_{kl}\|,$$

$$g_3 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\|g_{kl}\|^2\right). \tag{5.48}$$

Враховуючи формули

$$\frac{\partial g_1}{\partial g_{kl}} = g_1 \tilde{g}^{kl}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial g_{kl}} = \delta^{kl}, \quad \frac{\partial g_3}{\partial g_{kl}} = g^{kl}, \tag{5.49}$$

де $\tilde{g}^{kl}$ — матриця, обернена до g_{kl} ($\tilde{g}^{kl} g_{ln} = \delta^k_n$), неважко встановити структуру відповідного тензора енерґії-імпульсу та побудувати додаткові збережні величини.

VI. ПІДСУМКИ

Вихідним пунктом розвинутого в праці підходу є формулювання умов інваріянтности варіяційного опису суцільного середовища щодо різних груп симетрії. Ці умови виражаються системами диференційних рівнянь першого порядку на функцію Лаґранжа системи, і природним полем для їх формулювання служить простір лаґранжевих змінних ξ^i. Вимога інваріянтности стосовно групи Пуанкаре виділяє загальний клас лаґранжіянів, придатних для опису релятивістичного суцільного середовища. На відміну від випадку системи точкових частинок, тут умови інваріянтности не накладають обмеження на порядок похідних у лаґранжіяні. У цій статті виклад обмежено найпростішим випадком залежности лаґранжіяна від перших похідних. Загальніші випадки плануємо розглянути в іншій роботі.

Як і в частинковій механіці, виконання умов Пуанкаре-інваріянтности імплікує існування 10-ти законів збереження, дозволяючи, зокрема, вивести (а не постулювати окремо) структуру тензора енерґії-імпульсу системи, компоненти якого виражаються в термінах функції Лаґранжа. Якщо ввести в лаґранжіян залежність від ентропії системи, вважаючи останню заданою функцією часу, то закон збереження енерґії-імпульсу перетвориться в балансове співвідношення, відображаючи перший закон термодинаміки. Однак еволюційні рівняння для ентропії та відповідні потоки так отримати неможливо — це вимагає додаткових постулатів та методів нерівноважної термодинаміки (див., наприклад, [7,27,28]).

Постулювання додаткових симетрій дозволяє виділити конкретні моделі релятивістичного суцільного середовища. Вимога інваріянтности щодо безмежнопараметричної групи перетворень, що зберігають міру в матеріяльному континуумі, приводить до рівнянь гідродинаміки, а інваріянтність стосовно 3-параметричної групи евклідових поворотів у цьому ж континуумі — до моделі релятивістичного ізотропного тіла. Вимога параметричної інваріянтности з відповідною редукцією вимірности матеріяльного континууму приведе до релятивістичних лаґранжевих моделей поширених об'єктів — струн, мембран тощо.

Побудований у праці варіяційний опис релятивістичного суцільного середовища може служити основою для подальшого врахування взаємодії з електромагнетним та ґравітаційним полями.

---

[1] В. Паули, *Теория относительности* (Наука, Москва, 1983).
[2] К. Мёллер, *Теория относительности* (Атомиздат, Москва, 1975).
[3] Д. Н. Зубарев, А. В. Прозоркевич, С. А. Смолянский, Теор. мат. физ. **40**, 394 (1979).
[4] G. Lianis, R. S. Rivlin, Arch. Rat. Mech. Appl. **48**, 64 (1972).
[5] M. Kranyš, J. Phys. A **10**, 1847 (1977).
[6] Л. Т. Черный, *Релятивистские модели сплошных сред* (Наука, Москва, 1983).
[7] C. Vallee, Int. J. Eng. Sci. **19**, 589 (1981).
[8] J. M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques* (Dunod, Paris, 1970).
[9] J. M. Souriau, Lect. Notes in Math. **676**, 369 (1978).
[10] Р. П. Гайда, Ю. Б. Ключковский, В. И. Третяк. Теор. мат. физ. **44**, 194 (1980); **45**, 180 (1980); **55**, 88 (1983).
[11] Р. П. Гайда, Физ. элем. частиц ат. ядра **13**, 427 (1982).
[12] Ю. И. Манин, Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики **11**, 5 (1978).
[13] Ж. Поммаре, *Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли* (Мир, Москва, 1983). W. M. Tulczyjew, *Geometrical Formulation of Physical Theories* (Bibliopolis, Napoli, 1989).
[14] В. И. Третяк, препринт ИТФ–82–88Р, Киев, 1982.
[15] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений* (Наука, Москва, 1978).
[16] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике* (Наука, Москва, 1983).
[17] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям* (Мир, Москва, 1989).
[18] Е. Гурса, *Інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку* (Радянська школа, Київ, 1941).
[19] В. Л. Бердичевский, *Вариационные принципы механики сплошной среды* (Наука, Москва, 1983).
[20] F. Bampi, A. Morro. J. Math. Phys. **23**, 2312 (1982).
[21] R. N. Hill, J. Math. Phys. **8**, 201 (1967).
[22] С. де Гроот, Л. Г. Сатторп, *Электродинамика* (Наука, Москва, 1982).
[23] Ф. М. Куни, *Статистическая физика и термодинамика* (Наука, Москва, 1981).
[24] К. Трусделл, *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред* (Мир, Москва, 1975).
[25] А. Лихнерович. В кн.: *Астрофизика, кванты и теория относительности* (Мир, Москва, 1982), с. 129.
[26] Л. В. Овсянников, *Лекции по основам газовой динамики* (Наука, Москва, 1981).
[27] P. Havas, R. J. Swenson, Ann. Phys. **118**, 259 (1979).
[28] A. Palumbo, Lett. Nuovo Cimento **42**, 81 (1985).

VARIATIONAL FORMULATION AND SYMMETRIES OF THE RELATIVISTIC NONDISSIPATIVE CONTINUUM

V. I. Tretyak

Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., Lviv, UA–79011, Ukraine

The Poincaré-invariance conditions for the variational description of the nondissipative continuum are formulated and analyzed. A general structure of the Lagrangian function, which provides such invariance and depends on the derivatives not higher than the first order, is indicated. By means of the Noether theorem we got ten conservation laws, the appearance of which, specifically, sets a structure of the energy-momentum tensor of the system. A transition from Lagrangean to Eulerian variables is discussed. It is shown that postulating additional symmetries allows formulating particular models of the relativistic continuum, especially the hydrodynamics and isotropic body model.