КВАЗІТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНА НЕВПОРЯДКОВАНА МОДЕЛЬ КРОНІҐА–ПЕННІ

О. Возняк, В. М. Ткачук
Кафедра теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка, вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005
(Отримано 26 листопада 2002 р.; в остаточному вигляді — 15 липня 2003 р.)

Із використанням методу суперсиметрії побудовано одновимірні невпорядковані квазіточно розв'язувані потенціяли Кроніґа–Пенні з одним та двома відомими станами. Отримані власні хвильові функції належать до протяжних станів частинки в цих потенціялах.

Ключові слова: суперсиметрія, невпорядковані квазіточно розв'язувані потенціяли, модель Кроніґа–Пенні.

PACS number(s): 03.65.Ge

I. ВСТУП

Опис руху електрона на кристалічній ґратці є однією з центральних задач теорії твердого тіла. Така квантова задача зводиться до знаходження розв'язків рівняння Шредингера з деяким модельним, часто періодичним, потенціялом. Загальні властивості розв'язків рівняння Шредингера з періодичним потенціялом описують осциляційною теоремою [1], згідно з якою енерґетичний спектр періодичного потенціялу з періодом L має зонну структуру, тобто власні значення належать дозволеним інтервалам (енерґетичним зонам) $[E_0, E_1]$, $[E_{1'}, E_2], \ldots$. Хвильові функції, які є розв'язками рівняння Шредингера, задовольняють умову

$$\psi(x+L) = e^{ikL}\psi(x), \tag{1}$$

де k є квазіімпульсом. Границі енерґетичних зон задаються умовою $kL = \{0, \pi\}$, а хвильові функції, які відповідають граничним значенням енергії, мають властивість $\psi(x+L) = \pm\psi(x)$. Значення енергії на границях зон та відповідні їм хвильові функції часто називають власними значеннями та власними функціями.

Осциляційна теорема стверджує, що для періодичного потенціялу власні функції, які відповідають границям енерґетичних зон і впорядковані за зростанням енерґії, $E_0 \leq E_1 \leq E_{1'} \leq E_2 \leq E_{2'} \leq E_3 \ldots$, є періодичними функціями з періодом $L, 2L, 2L, L, L, 2L, 2L, \ldots$. При цьому на інтервалі L такі хвильові функції мають $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$ вузлів відповідно.

На жаль, на сьогодні відомо тільки декілька точно розв'язуваних періодичних потенціялів, тобто потенціялів, для яких можна знайти розв'язки рівняння Шредингера для всіх енерґетичних рівнів в аналітичному вигляді. Класичним прикладом періодичного потенціялу, для якого відомі енерґетичний спектр та хвильові функції електрона, є потенціял моделі Кроніґа–Пенні або його граничний випадок — "гребінець Дірака" [2, 3].

Модель Кроніґа–Пенні (МКП) цікава ще й тим, що, незважаючи на простоту, в її межах можна досліджувати одновимірний невпорядкований ланцюжок як з топологічним безладом, так і з безладом заміщення [4]. Тому вивчення МКП, яка з'явилась ще в 1931 році [5], триває і дотепер [6–12]. Зокрема досліджували енерґетичні спектри та динаміку електронів у впорядкованих та невпорядкованих системах [6], явища локалізації [7], властивості надпровідників [8] та явища тунелювання кварків в одновимірних ядерних моделях [9]. Розглядали поведінку релятивістських електронів [10], узагальнену модель Дірака–Кроніґа–Пенні [11] та нелінійну модель Кроніґа–Пенні [12].

Надалі ми будемо цікавитись розв'язками одновимірного рівняння Шредингера з випадковим потенціялом. Для означення такого потенціялу розіб'ємо дійсну вісь $(-\infty, \infty)$ на інтервали,

$$l_i < x \leq l_{i+1}, \tag{2}$$

і задамо потенціял на кожному з таких інтервалів,

$$V(x) = V^i(x) = V(\alpha_i, x), \tag{3}$$

як функцію випадкової величини α_i, відомої для кожного інтервалу (2). Набір параметрів $\{\alpha_i\}$ є випадковим і відповідає певній конкретній реалізації невпорядкованого потеціялу.

Внесення випадковости в потенціял значно ускладнює знаходження розв'язків задачі про рух електрона в ньому. На жаль, не існує теореми, подібної до осциляційної, яка описує загальні властивості розв'язків рівняння Шредингера з випадковим потенціялом. Можна розрахувати деякі статистичні характеристики випадкових потенціялів [7] та відповідних їм розв'язків рівняння Шредингера, але випадкові потенціяли, розв'язки рівняння на власні значення яких можуть бути знайдені в аналітичному вигляді, досі взагалі не відомі.

Незважаючи на неможливість знайти всі розв'язки задачі на власні функції та власні значення, для багатьох потенціялів можна відшукати точний вираз для енерґії та хвильових функцій декількох станів.

Така задача відома як квазіточно розв’язувана задача з кількома відомими власними станами. Вона називається квазіточно розв’язуваною (КТР), якщо в аналітичному вигляді можна знайти не всі розв’язки, а лише обмежену кількість енерґетичних рівнів та відповідних їм хвильових функцій. Ураховуючи обмежену кількість точно розв’язуваних потенціялів, останнім часом дедалі більшу увагу приділяють квазіточно розв’язуваним потенціялам [13–23].

Потужним засобом вивчення проблеми точної розв’язуваности рівняння Шрединґера є суперсиметрична квантова механіка, яку започаткував Віттен [24] (див. огляд суперсиметричної квантової механіки та задач, які можуть бути розв’язані в межах цього формалізму [25]). Зокрема в [18–20] отримано багато КТР потенціялів з використанням методів суперсиметрії.

У статтях [26, 27] запропоновано новий суперсиметричний метод побудови КТР потенціялів з двома відомими розв’язками, які відповідають основному та першому збудженому станам системи. В наступних статтях [28] цей метод узагальнено для отримання КТР потенціялів із довільними двома станами. Далі його розвинули для побудови періодичних [29] та випадкових [30] КТР потенціялів.

У цій праці, яка є продовженням [30], розглянуто особливості побудови одновимірного КТР несинґулярного потенціялу Кроніґа–Пенні з використанням методу суперсиметрії.

II. СУПЕРСИМЕТРИЧНА КВАНТОВА МЕХАНІКА

Гамільтоніян суперсиметричної квантової механіки Віттена має вигляд

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де гамільтоніяни

$$H_\pm = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_\pm(x) = B^\mp B^\pm \tag{5}$$

є так званими суперсиметричними партнерами, і

$$B_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\mp\frac{d}{dx} + W(x)\Big). \tag{6}$$

Тут використано систему одиниць $\hbar = m = 1$. Функція $W(x)$ отримала назву суперпотенціялу. Суперпотенціял $W(x)$ пов’язаний з потенціялом $V_-(x)$ системи співвідношенням

$$2V_\pm(x) = W^2(x) \pm W'(x). \tag{7}$$

Енерґетичний спектр суперсиметричних партнерів H_+ та H_- є ідентичним, за винятком основного стану

$$E^-_{n+1} = E^+_n, \qquad E^-_0 = 0, \tag{8}$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$. Хвильові функції пов’язані суперсиметричним перетворенням

$$\psi^-_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{E^+_n}}\, B^+\psi^+_n(x), \qquad \psi^+_n(x) = \frac{1}{\sqrt{E^-_{n+1}}}\, B^-\psi^-_{n+1}(x). \tag{9}$$

Легко бачити, що, внаслідок факторизації (5), можна легко знайти розв’язок для стану з нульовою енерґією гамільтоніяна H_-

$$E^-_0 = 0, \qquad \psi^-_0(x) = C^-_0 \exp\Big(-\int W(x)\,dx\Big), \tag{10}$$

де C^-_0 — константа нормування.

Існує інша лінійно незалежна хвильова функція $\tilde{\psi}(x)$, яка також є розв’язком рівняння Шрединґера для цієї енерґії:

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x)\Big(\int \frac{1}{\psi^2(x)}\,dx + C\Big), \tag{11}$$

де C — константа інтеґрування. Справді, якщо $\psi(x)$ є розв’язком рівняння Шрединґера, то прямою підстановкою (11) в рівняння Шрединґера бачимо, що і $\tilde{\psi}(x)$ є його розв’язком.

У цій статті розглянуто задачу про рух електрона у випадковому потенціялі, заданому співвідношеннями (2) та (3). Розв’язками такої задачі, згідно з осциляційною теоремою, є функції, обмежені на всій дійсній осі $(-\infty, \infty)$. Існують різні способи забезпечення обмежености розв’язків рівняння Шрединґера, в цій статті ми обмежимося найпростішою достатньою вимогою

$$\int_{l_i}^{l_{i+1}} W(x)\,dx = 0. \tag{12}$$

Подібні умови для періодичних потенціялів запропоновано в [16, 17].

III. МОДЕЛЬ З ОДНИМ ВІДОМИМ РОЗВ’ЯЗКОМ

Як було показано в попередній частині, вибираючи різні суперпотенціяли $W(x)$, можна отримати розв’язок для основного стану рівняння Шрединґера з потенціялом $V_-(x)$, заданим співвідношенням (7). Найпростіше отримати несинґулярний потенціял $V_-(x)$ можна, вибираючи суперпотенціял $W(x)$ реґулярною функцією, однак у цьому випадку можна одержати тільки розв'язки для основного стану. Є інший спосіб забезпечити несинґулярність потенціялу $V_-(x)$ з використанням синґулярного суперпотенціялу з певною заданою поведінкою в околі точок синґулярности [28–30].

Нехай суперпотенціял $W(x)$ має такі прості полюси в точках x_k:

$$W(x) = \frac{-1}{x - x_k} + A(x - x_k) + O\Big((x - x_k)^2\Big), \qquad (13)$$

де A — деяка константа. Враховуючи зв'язок між суперпотенціялом та потенціялом (7), $V_-(x)$ буде реґулярною функцією з такою поведінкою в околі x_k:

$$2V(x) = -3A + O(x - x_k). \qquad (14)$$

Хвильова функція (10) в околі точок x_k матиме вигляд

$$\psi_0^-(x) \sim |x - x_k| \left(1 - A(x - x_k)^2/2\right). \qquad (15)$$

Звернімо увагу на розриви функції $d\psi_0^-(x)/dx$ у точках x_k. Для того, щоб забезпечити неперервність похідної хвильової функції, можна використати той простий факт, що розв'язок рівняння Шредінґера визначений з точністю до сталого множника. Тому, вибираючи відповідно знак хвильової функції на кожному з інтервалів (2), можна домогтися неперервности і хвильової функції, і її похідної

$$\psi_0^-(x) \sim (x - x_k) \left(1 - A(x - x_k)^2/2\right). \qquad (16)$$

Для отримання випадкового потенціялу використаємо ґенеруючу функцію, означену так:

$$W(x) = W^i(x), \qquad (17)$$

де для кожного значення i змінна x належить відповідному інтервалові (2).

Розгляньмо наступний суперпотенціял

$$W(x) = \alpha_i \mathrm{tg}\left(\alpha_i(x - l_i)\right), \alpha_i > 0, \qquad (18)$$

для кожного значення i змінна x належить відповідному інтервалові (2), де

$$l_{i+1} = l_i + \frac{\pi}{\alpha_i}, l_0 = 0, \qquad (19)$$

а α_i — випадкові параметри. Такий суперпотенціял задовольняє умову (12) для кожного з інтервалів (2), а отже, отримані хвильові функції будуть обмеженими на всій дійсній осі. У точках синґулярности $l_i + \pi/2\alpha_i$ суперпотенціял $W(x)$ має характер (13), причому $A = \alpha_i^2/3$. Тоді

$$V_-(x) = -\frac{\alpha_i^2}{2}. \qquad (20)$$

Потенціял $V_-(x)$ відповідає потенціялові невпорядкованої моделі Кроніґа–Пенні. Можна знайти розв'язок рівняння Шредінґера з потенціялом (20) для стану з нульовою енерґією

$$\psi_0^-(x) = C_0^-(-1)^i \cos\left(\alpha_i(x - l_i)\right). \qquad (21)$$

Тут множник $(-1)^i$ забезпечує неперервність хвильової функції та її похідної (див. аналіз (15)–(16)). Після нескладних розрахунків можна отримати інший лінійно незалежний розв'язок (11) рівняння Шредінґера

$$\tilde{\psi}_0^-(x) = \tilde{C}_0^-(-1)^i \frac{1}{\alpha_i} \sin(\alpha_i(x - l_i)), \qquad (22)$$

де C_0^- та $\tilde{C}_0^-$ — довільні константи, однакові для всіх інтервалів. Тут вибрано $C = 0$.

Потенціял $V_-(x)$ та хвильові функції $\psi_0^-(x)$ і $\tilde{\psi}_0^-(x)$ зображено на рис.1.

Зауважимо, що при зміні випадкової величини α_i змінюється як глибина потенціяльної ями $V_-^i = -\alpha_i^2/2$, так і її ширина $\Delta l_i = \pi/\alpha_i$, при цьому добуток

$$V_-^i \Delta l_i^2 = \mathrm{const} \qquad (23)$$

залишається сталим. Це є наслідком умови (12), яка забезпечує існування протяжних станів.

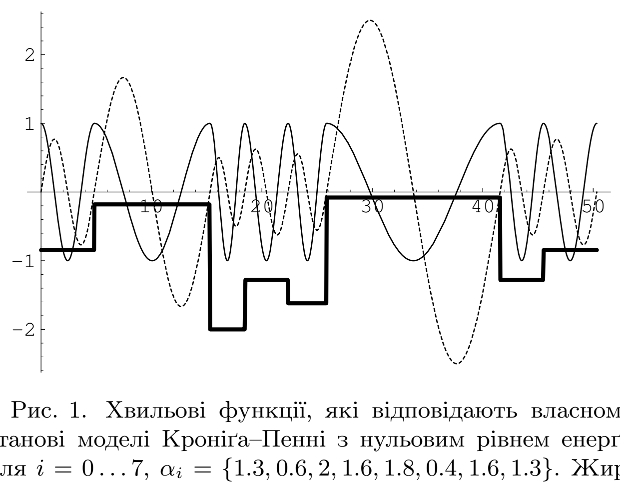

Рис. 1. Хвильові функції, які відповідають власному станові моделі Кроніґа–Пенні з нульовим рівнем енерґії для $i = 0 \dots 7$, $\alpha_i = \{1.3, 0.6, 2, 1.6, 1.8, 0.4, 1.6, 1.3\}$. Жирною лінією позначено випадковий потенціял $V_-(x)$, суцільна лінія відповідає $\psi_0^-(x)$, пунктирна — $\tilde{\psi}_0^-(x)$. Константи нормування C_0^- та $\tilde{C}_0^-$ вибрані рівними одиниці.

IV. МОДЕЛЬ З ДВОМА ВІДОМИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

Для отримання ще одного власного стану H_- використаймо відому процедуру знаходження спектра суперсиметричних партнерів H_+ та H_- (5). Якщо ми знаємо певний стан H_+, то можемо одразу знайти новий стан H_-, використовуючи суперсиметричні перетворення (9). Перепишімо гамільтоніан H_+ у такій формі:

$$H_+ = H_-^{(1)} + \epsilon = B_1^+ B_1^- + \epsilon, \quad \epsilon > 0, \tag{24}$$

де $B_1^{\pm}$ задані співвідношеннями (6) з новим суперпотенціялом $W_1(x)$. Тоді

$$W^2(x) + W'(x) = W_1^2(x) - W_1'(x) + 2\epsilon. \tag{25}$$

Із (24) виходить, що хвильова функція H_+ з енерґією $E = \epsilon$ є також хвильовою функцією, яка відповідає станові з нульовою енерґією гамільтоніяна $H_-^{(1)}$ і задовольняє рівняння $B_1^-(x)\psi_\epsilon^+(x) = 0$,

$$\psi_\epsilon^+(x) = C_\epsilon^+ \exp\left(-\int W_1(x)\, dx\right). \tag{26}$$

Застосовуючи суперсиметричні перетворення (9) до $\psi_\epsilon^+(x)$, ми отримаємо хвильову функцію збудженого стану з енерґією $E = \epsilon$ для гамільтоніяна H_-

$$\psi_\epsilon^-(x) = C_\epsilon^- W_+(x) \exp\left(-\int W_1(x)\, dx\right), \tag{27}$$

де введено позначення $W_+(x) = W_1(x) + W(x)$.

Умова (25) є рівнянням Рікатті, яке не може бути розв'язане стосовно до $W(x)$ для заданого $W_1(x)$ і навпаки.

Незважаючи на це, можна знайти таку пару функцій $W(x)$ та $W_1(x)$, яка задовольняє рівняння (25). Для цього перепишемо його в такому вигляді:

$$W_+'(x) = W_-(x)W_+(x) + 2\epsilon, \tag{28}$$

де

$$\begin{aligned} W_+(x) &= W_1(x) + W(x), \\ W_-(x) &= W_1(x) - W(x). \end{aligned} \tag{29}$$

Таке нове рівняння можна розв'язати щодо $W_-(x)$ для заданого $W_+(x)$ і навпаки. Надалі ми будемо використовувати розв'язок, виражений через $W_+(x)$

$$W(x) = \frac{1}{2}\Big(W_+(x) - \frac{W_+'(x) - 2\epsilon}{W_+(x)}\Big),$$

$$W_1(x) = \frac{1}{2}\Big(W_+(x) + \frac{W_+'(x) - 2\epsilon}{W_+(x)}\Big). \tag{30}$$

Вимога несинґулярности потенціялу $V_-(x)$ накладає обмеження на ґенеруючу функцію $W_+(x)$. Детальний аналіз цього питання проведено в [28].

Розгляньмо спочатку $W_+(x)$, яка має прості нулі в точках x_k. Умова несинґулярности $V_-(x)$ в цьому випадку приводить до умови $|W_+'(x)| = 2\epsilon$. Зручно розбити множину x_k на два набори x_k^+ та x_k^-, для яких $W_+'(x_k^+) = 2\epsilon > 0$ та $W_+'(x_k^-) = -2\epsilon < 0$. Тоді суперпотенціяли будуть мати прості полюси в точках x_k^-

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{-1}{x - x_k^-} + O(x - x_k^-), \\ W_1(x) &= \frac{1}{x - x_k^-} + O(x - x_k^-). \end{aligned} \tag{31}$$

Розгляньмо тепер функцію $W_+(x)$, яка має синґулярности в точках a_k та b_k із такою поведінкою:

- нехай функція $W_+(x)$ має такі прості полюси в точках a_k:

$$W_+(x) = \frac{-1}{x - a_k} + \text{const.} \tag{32}$$

  У цьому випадку суперпотенціял $W(x)$ не буде мати полюсів у точках a_k, а суперпотенціял $W_1(x)$ матиме полюси з поведінкою

$$W_1(x) = \frac{-1}{x - a_k} + O(x - a_k). \tag{33}$$

- нехай функція $W_+(x)$ має такі прості полюси в точках b_k:

$$W_+(x) = \frac{-3}{x - b_k} + O(x - b_k). \tag{34}$$

  Тоді суперпотенціяли матимуть полюси в околі b_k з поведінкою

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{-1}{x - b_k} + O(x - b_k), \\ W_1(x) &= \frac{-2}{x - b_k} + O(x - b_k). \end{aligned} \tag{35}$$

Зауважимо, що існування у функції $W_+(x)$ синґулярностей із іншою поведінкою приведе до синґулярного потенціялу $V_-(x)$.

Отже, функція $W_+(x)$, яка має перелічені вище властивості, ґенерує несинґулярний квазіточно розв'язуваний потенціял $V_-(x)$, як показано в (7), де суперпотенціял $W(x)$ виражений через функцію $W_+(x)$, пов'язану із суперпотенціялом співвідношенням (30).

Хвильова функція для стану з нульовою енерґією $\psi_0^-(x)$ та хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ для стану з енерґією ϵ задані виразами (10) та (26) відповідно, причому хвильова функція $\psi_0^-(x)$ матиме вузли в точках x_k^- та b_k, а хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ — вузли в точках x_k^+ та b_k.

Для отримання випадкового потенціялу використаємо ґенеруючу функцію, означену так:

$$W_+(x) = W_+^i(x), \tag{36}$$

де для кожного значення i змінна x належить інтервалові (2).

Розгляньмо наступну ґенеруючу функцію

$$W_+^i(x) = \frac{1}{\beta_i}\tan\Big(\beta_i(x-l_i)\Big), \tag{37}$$

де границі інтервалів (2) задані співвідношенням

$$l_{i+1} = l_i + \frac{\pi}{\beta_i}, \quad l_0 = 0, \tag{38}$$

а β_i — випадкові параметри.

Така ґенеруюча функція задовольняє умову (12), а значить, отримані хвильові функції будуть обмеженими на всій дійсній осі. Функція (37) задовольняє також умову $|W_+'(x)| = |W'(x_k^+ = l_k)| = 1 = 2\epsilon$, тому енерґія збудженого стану $\epsilon = 1/2$.

Щоб задовольнити умови (32) та (34), параметри β_i мають приймати значення 1 або $1/\sqrt{3}$ відповідно, тому можна виразити величини β_i через нові параметри n_i, які випадково приймають значення 0 або 1

$$\beta_i = 1 - n_i + n_i\frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{39}$$

Тоді

$$W_+(x) = (1-n_i)\mathrm{tg}(x-l_i) + n_i\sqrt{3}\mathrm{tg}\left(\frac{x-l_i}{\sqrt{3}}\right). \tag{40}$$

Така функція ґенерує суперпотенціяли

$$W(x) = n_i\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x-l_i}{\sqrt{3}}\right), \tag{41}$$

$$W_1(x) = (1-n_i)\mathrm{tg}(x-l_i) + n_i\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\left(\frac{x-l_i}{\sqrt{3}}\right),$$

і потенціяльну енерґію

$$V_-(x) = -\frac{n_i}{6}, \tag{42}$$

де для кожного значення i змінна x відповідає інтервалові (2).

Потенціял $V_-(x)$ відповідає потенціялові невпорядкованої моделі Kроніґа–Пенні. Для цього КТР потенціялу можна знайти в аналітичному вигляді хвильові функції, які відповідають рівням енерґії 0 та ϵ відповідно

$$\psi_0^-(x) = C_0^-(-1)^{\sum_{j=0}^{i-1} n_j}\left((1-n_i) + n_i\cos\left(\frac{x-l_i}{\sqrt{3}}\right)\right), \tag{43}$$

$$\psi_\epsilon^-(x) = C_\epsilon^-(-1)^{\sum_{j=0}^{i-1}(1-n_j)}\Big((1-n_i)\sin(x-l_i) + n_i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2(x-l_i)}{\sqrt{3}}\right)\Big), \tag{44}$$

тут множники виду $(-1)^{f(\{n_i\})}$ забезпечують неперервність хвильових функцій та їх похідних.

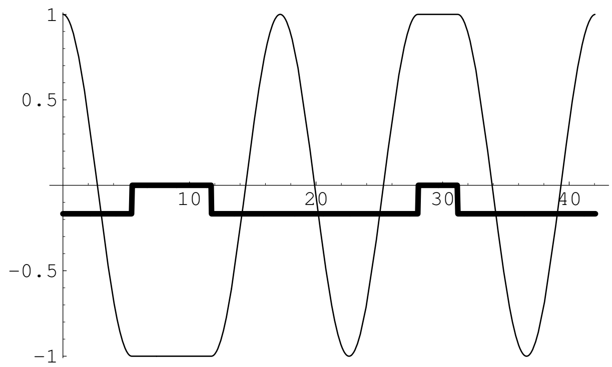

Рис. 2. Хвильова функція $\psi_0^-(x)$, яка відповідає власному стану моделі Kроніґа–Пенні з нульовим рівнем енерґії для $i = 0\ldots 8$, $n_i = \{1,0,0,1,1,1,0,1,1\}$. Жирною лінією наведено потенціял $V_-(x)$. Константа нормування C_0^- вибрана рівною одиниці.

Тут C_0^- та $\tilde{C}_\epsilon^-$ — довільні константи, однакові для всіх інтервалів.

Використовуючи формулу (11), можна знайти іншу пару лінійно незалежних розв'язків $\tilde{\psi}_0^-(x)$ та $\tilde{\psi}_\epsilon^-(x)$ для заданих $\tilde{\psi}_0^-(x)$ та $\tilde{\psi}_\epsilon^-(x)$:

$$\tilde{\psi}_0^-(x) = \tilde{C}_i\Big((1-n_i)(x+C_i) + n_i\Big[C_i\cos\left(\frac{x-l_i}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{x-l_i}{\sqrt{3}}\right)\Big]\Big), \tag{45}$$

$$\tilde{\psi}_\epsilon^-(x) = \tilde{C}_i\Big(-(1-n_i)\cos(x-l_i) - n_i\cos\Big(\frac{2(x-l_i)}{\sqrt{3}}\Big)\Big), \tag{46}$$

де константи $\tilde{C}_i$ та C_i підбираються так, щоби забезпечити неперервність хвильової функції та її похідної в точках зшивання. Однак розв'язок $\tilde{\psi}_0^-(x)$, будучи розв'язком рівняння Шредингера, не має фізичного змісту, оскільки хвильова функція (45) є лінійною функцією x для інтервалів з $n_i = 0$, що веде до розбігання її при x, що прямує до ∞ або $-\infty$. Отже, власний стан з нульовою енерґією є невиродженим, а стан з енерґією ϵ двократно вироджений із хвильовими функціями (44) та (46).

Потенціял $V_-(x)$, хвильова функція $\psi_0^-(x)$ власного стану з нульовим рівнем енерґії і хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ та $\tilde{\psi}_\epsilon^-(x)$ власного стану з енерґією ϵ зображені на рис. 2 та рис. 3 відповідно.

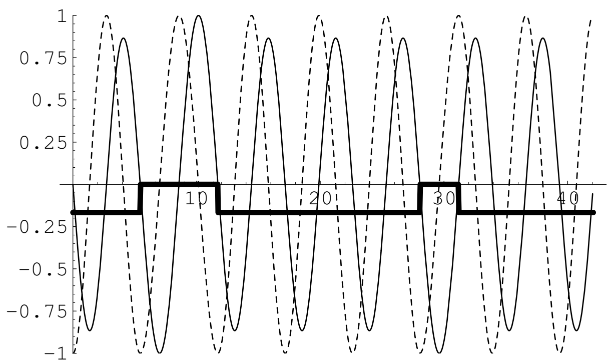

Рис. 3. Хвильові функції, які відповідають власному станові моделі Кроніґа–Пенні з рівнем енерґії ϵ для $i = 0\ldots 8$, $n_i = \{1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1\}$. Жирною лінією позначено потенціял $V_-(x)$, суцільна лінія відповідає $\psi_\epsilon^-(x)$, пунктирна — $\tilde{\psi}_\epsilon^-(x)$. Константи нормування C_ϵ^- та $\tilde{C}_\epsilon^-$ вибрані рівними одиниці.

Зауважимо, що при зміні випадкового параметра n_i змінюється тільки величина $\Delta l_i = \sqrt{3}\pi/(n_i + \sqrt{3}(1 - n_i))$, яка може набувати значень

$$\Delta l_a = \pi, \qquad \Delta l_b = \sqrt{3}\pi. \tag{47}$$

Тоді ширина ями повинна бути кратною $\sqrt{3}\pi$, а відстань між ямами — кратною π. Ці співвідношення, які забезпечують існування протяжних станів, як і в попередньому розділі, є наслідком умови (12).

V. ВИСНОВКИ

У цій статті отримано розв'язки рівняння Шредингера з випадковими потенціялами Кроніґа–Пенні (20) та (42).

Для потенціялу (20) в явному вигляді знайдено дві власні функції з нульовою енерґією. Отже, цей енерґетичний рівень є двократно виродженим. Для потенціялу (42) в явному вигляді знайдено власні функції для двох енерґій $E = 0$ та $E = \epsilon$. Стан з нульовою енерґією є невиродженим, а стан з енерґією ϵ двократно вироджений. Зауважимо, що стан з енерґією $E = 0$ в потенціялах (20) та (42) не є основним станом цих потенціялів, про що свідчить наявність вузлів у відповідних хвильових функціях.

У випадку, коли $\alpha_i = \{\alpha_a, \alpha_b, \alpha_a, \alpha_b, \ldots\}$ та $n_i = \{0, 1, 0, 1, \ldots\}$, потенціяли (20) та (42) відповідно переходять у потенціял періодичної моделі Кроніґа–Пенні. Для аналізу отриманих розв'язків рівняння Шредингера з періодичним потенціялом можна застосувати осциляційну теорему, згідно з якою у випадку КТР потенціялу з одним відомим розв'язком (20) отриманий розв'язок відповідає верхньому краю четвертої зони або нижньому краю п'ятої, якщо нумерація енерґетичних зон починається з одиниці. Для КТР потенціялу з двома відомими розв'язками (42) отриманий розв'язок $E = 0$ відповідає верхньому краю першої зони або нижньому краю другої, а розв'язок $E = \epsilon$ — верхньому краю третьої зони або нижньому краю четвертої.

У праці [31] суперсиметричний метод узагальнено для отримання КТР потенціялів з трьома відомими власними станами. За допомогою цього методу можна одержати й періодичні КТР потенціяли. Однак на сьогодні невідомо, чи можна використати його для невпорядкованої моделі Кроніґа–Пенні.

Зазначимо також, що ґенеруючі функції $W(x)$ (18) та $W_+(x)$ (37) з умовою (12) забезпечують знаходження тільки протяжних розв'язків для отриманих потенціялів. Цікавим результатом є умови (23) та (47) на параметри випадкового потенціялу, при яких у системі наявні протяжні стани. Добре відомо, що в одновимірних випадкових потенціялах можуть існувати локалізовані розв'язки. Можливість одержання таких розв'язків за допомогою наведеної вище техніки буде докладно проаналізовано в наступних роботах.

[1] W. Magnus, S. Winkler, *Hill's equation* (Winkley, New York, 1966).
[2] З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике* (Мир, Москва, 1974).
[3] В. Ульянов, *Задачи по квантовой механике и квантовой статистике* (Вища школа, Харків, 1980).
[4] Дж. Займан, *Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем* (Мир, Москва, 1982).
[5] R. de L. Kronig, W. G. Penney, Proc. Roy. Soc. **130**, 499 (1931).
[6] E. Lieb, D. C. Mattis, *Mathematical physics in one dimension* (Academic Press, New York, 1966).
[7] A. D. Mirlin, Phys. Rep. **326**, 259 (2000).
[8] Y. Tanaka, M. Tsukada, Phys. Rev. B **40**, 4482 (1989).
[9] G. J. Clerk, B. H. J. McKellar, Phys. Rev. C **41**, 1198 (1990).
[10] F. Dominguez-Adame, E. Macia, Arif Khan, C. L. Roy,

Physica B **212**, 67 (1995).
[11] F. Dominguez-Adame, J. Phys.: Condens. Matter **1**, 109 (1989).
[12] S. Theodorakis, E. Leontidis, e-print cond-mat/9708035 (1997).
[13] A .V. Turbiner, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **94**, 33 (1988).
[14] A. V. Turbiner, J. Phys. A **22**, L1 (1989).
[15] Y. Brihaye, M. Godart, J. Math. Phys. **34**, 5283 (1993).
[16] G. Dunne, J. Feinberg, Phys. Rev. D **57**, 1271 (1998).
[17] G. Dunne, J. Mannix, Phys. Lett. B **428**, 115 (1998).
[18] A. Khare, U. Sukhatme, J. Math. Phys. **40**, 5473 (1999).
[19] U. Sukhatme, A. Khare, e-print quant-ph/9902072 (1999).
[20] A. Khare, U. Sukhatme, J. Math. Phys. **42**, 5652 (2001); e-print quant-ph/0105044 (2001).
[21] D. J. Fernandez C., J. Negro, L. M. Nieto, Phys. Lett. A **275**, 338 (2000).
[22] A. Khare, Phys. Lett. A **69**, 2888 (2001), quant-ph/0105030 (2001).
[23] A. Ganguly, Mod. Phys. Lett. A **15**, 1932 (2000).
[24] Witten. E, Nucl. Phys. B **185**, 513 (1981).
[25] F. Cooper *et al.*, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).
[26] V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **245**, 177 (1998).
[27] V. M. Tkachuk, J. Phys. A **32**, 1291 (1999).
[28] V. M. Tkachuk, J. Phys. A **34**, 6339 (2001).
[29] V. M. Tkachuk, O. Voznyak, J. Phys. Stud. **6**, 40 (2002).
[30] V. M. Tkachuk, O. Voznyak, Phys. Lett. A **301**, 177 (2002).
[31] T. V. Kuliy, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **32**, 2157 (1999).

QUASI-EXACTLY SOLVABLE DISORDERED KRONIG–PENNEY MODEL

O. Voznyak, V. M. Tkachuk
Ivan Franko National University of Lviv, Department for Theoretical Physics,
12 Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine

Using the supersymmetric quantum mechanics the quasy-exactly solvable random Kronig–Penney potentials with one and two known eigenstates are constructed. The obtained eigenfunctions belong to extended states of the particle moving in these potentials.