ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 8, № 1 (2004) с. 23–34

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 8, No. 1 (2004) p. 23–34

МОДЕЛЬ ДЕЙТРОНА В ПІДХОДІ ДІРАКА–БРЕЙТА З ПРЯМОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

І. В. Сименог, О. І. Туровський
Інститут теоретичної фізики ім. М. М.Боголюбова НАН України
вул. Метрологічна, 14б, Київ, 03143, Україна
(Отримано 31 березня 2003 р.)

Для двох релятивістських нуклонів з прямою потенціяльною взаємодією отримано парціяльні радіяльні рівняння типу Шредингера–Брейта другого порядку для триплетного спінового стану. Для розривних потенціялів установлено нові співвідношення неперервности хвильових функцій. У досліджуваній релятивістській моделі з прямою взаємодією, крім центральної, наявні ще тензорна та спін-орбітальна взаємодії, які мають релятивістську природу. Знайдено точні розв'язки для триплетного стану двох нуклонів з потенціялами у вигляді прямокутних ям. На основі триплетних релятивістських рівнянь з потенціяльними функціями у формі прямокутних ям побудовано модель основного стану дейтрона й отримано узгоджене пояснення основних експериментальних параметрів дейтрона.

Ключові слова: рівняння Дірака–Брейта, тензорна та спін-орбітальна взаємодії, релятивістський дейтрон, точні розв'язки, квадрупольний момент, імовірність D-стану, структурна функція.

PACS number(s): 03.65.Ge, 03.65.Pm, 21.30.−x, 21.45.+v

I. ВСТУП

Дослідження двонуклонної задачі розсіяння в широкому енерґетичному інтервалі та зв'язаного стану дейтрона з урахуванням реалістичної взаємодії залишається актуальною й досить складною проблемою (див. побудову сучасних ядерних потенціялів [1–4]). Аналіз задачі двох нуклонів ускладнюється доконечністю виконувати громіздкі чисельні розрахунки для одночасного опису різноманітних характеристик дейтрона та багатьох фаз розсіяння як при малих, так і високих енерґіях. Щобільше, якщо розглядати ядерні системи не на феноменологічному рівні, то для середніх і високих енерґій можуть стати суттєвими релятивістські ефекти. Використання релятивістських підходів до ядерних систем (і багаточастинкових систем іншої природи) мають певні успіхи і надалі є актуальною проблемою в задачах ядерної фізики (див., наприклад, [5–9]). У підходах з послідовним урахуванням релятивістських ефектів у двонуклонних ядерних задачах є можливим описати з єдиного погляду систему двох нуклонів як для зв'язаного стану, так і для розсіяння в синґлетному та триплетних спінових станах.

У цій статті в підході Дірака–Брейта [10] релятивістської теорії прямих взаємодій розглянуто модель двох нуклонів у триплетному стані. Сформульовано рівняння типу Шредингера–Брейта у всіх спінових станах (для синґлету формулювання рівняння й дослідження його розв'язків зроблено в [11,12]). Рівняння в синґлеті та триплеті не є незалежними, а зв'язані між собою через "потенціяльні" функції. Хвильове рівняння для триплетного стану, крім центральної, містить ще й спін-орбітальну та тензорну взаємодії, які мають релятивістську природу. Для триплетного спінового стану $^3S_1+{}^3D_1$ знайдено систему двох зв'язаних радіяльних рівнянь, яка допускає для "потенціялів" у формі прямокутних ям аналітичний розв'язок. На основі сформульованої системи знайдено хвильові функції та побудовано модель основного стану дейтрона з "потенціялами" у вигляді прямокутних ям та описано основні спостережувані характеристики дейтрона.

II. ФОРМУЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ

Стаціонарне рівняння Дірака для двох нуклонів у системі центра мас з масами m_1 і m_2 та з "потенціялом" прямої взаємодії V має вигляд ($\hbar = c = 1$)

$$\left[\Big(\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{p}+\beta_1 m_1\Big)+\Big(-\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{p}+\beta_2 m_2\Big)+V\right]\Psi = E\Psi. \quad (1)$$

"Потенціял" V є скаляром за матрицями Дірака $\boldsymbol{\alpha}_j, \beta_j$ першої та другої частинок і містить чотири сферично-симетричні компоненти: векторну $V_V(r)$, скалярну $V_S(r)$, псевдоскалярну $V_P(r)$ та четверту компоненту $V_0(r)$

$$V = (1-\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2)V_V + \beta_1\beta_2 V_S + \boldsymbol{\alpha}_1\beta_1\boldsymbol{\alpha}_2\beta_2 V_P + V_0. \quad (2)$$

Повна хвильова функція Ψ залежить від відстані між нуклонами та спіну і може бути зображена у вигляді розкладу за станами частинка–античастинка

$$\Psi = \Psi_{+-}|+1\rangle|-1\rangle + \Psi_{-+}|-1\rangle|+1\rangle + \Psi_{++}|+1\rangle|+1\rangle + \Psi_{--}|-1\rangle|-1\rangle. \tag{3}$$

Рівняння Дірака (1) щодо таких станів утворює замкнуту систему диференціяльних рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{p})\Psi_{-+} - (\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{p})\Psi_{+-} + (m_1+m_2)\Psi_{++} + (V_0+V_V+V_S)\Psi_{++} - (V_V-V_P)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\Psi_{--} = E\Psi_{++}\,,\\
&(\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{p})\Psi_{+-} - (\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{p})\Psi_{-+} - (m_1+m_2)\Psi_{--} + (V_0+V_V+V_S)\Psi_{--} - (V_V-V_P)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\Psi_{++} = E\Psi_{--}\,,\\
&(\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{p})\Psi_{--} - (\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{p})\Psi_{++} + (m_1-m_2)\Psi_{+-} + (V_0+V_V-V_S)\Psi_{+-} - (V_V+V_P)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\Psi_{-+} = E\Psi_{+-}\,,\\
&(\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{p})\Psi_{++} - (\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{p})\Psi_{--} - (m_1-m_2)\Psi_{-+} + (V_0+V_V-V_S)\Psi_{-+} - (V_V+V_P)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\Psi_{+-} = E\Psi_{-+}.
\end{aligned} \tag{4}$$

У свою чергу цю систему можна звести до вигляду

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\Psi_{10} - (m_1+m_2)\chi = (E-\hat{V}_1(r))\varphi\,,\\
&(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\Psi_{00} - (m_1+m_2)\varphi = (E-\hat{V}_2(r))\chi\,,\\
&(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\varphi + (m_1-m_2)\Psi_{00} = (E-\hat{V}_3(r))\Psi_{10}\,,\\
&(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\chi + (m_1-m_2)\Psi_{10} = (E-\hat{V}_4(r))\Psi_{00},
\end{aligned} \tag{5}$$

де введено нові хвильові функції

$$\begin{aligned}
&\Psi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{+-}-\Psi_{-+}\right), \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{--}+\Psi_{++}\right),\\
&\Psi_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{+-}+\Psi_{-+}\right), \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{--}-\Psi_{++}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Функції Ψ_{00}, Ψ_{10}, φ, χ є функціями координат та спіну частинок, а нові потенціяли $\hat{V}_i(r)$ залежать від відносної відстані між нуклонами і враховують спін-спінову взаємодію

$$\begin{aligned}
\hat{V}_1(r) &= V_0(r) + 4V_V(r) + V_S(r) - 3V_P(r) - (\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2+3)(V_V(r)-V_P(r))\,,\\
\hat{V}_2(r) &= V_0(r) - 2V_V(r) + V_S(r) + 3V_P(r) + (\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2+3)(V_V(r)-V_P(r))\,,\\
\hat{V}_3(r) &= V_0(r) + 4V_V(r) - V_S(r) + 3V_P(r) - (\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2+3)(V_V(r)+V_P(r))\,,\\
\hat{V}_4(r) &= V_0(r) - 2V_V(r) - V_S(r) - 3V_P(r) + (\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2+3)(V_V(r)+V_P(r)).
\end{aligned} \tag{7}$$

Зауважимо, що систему (5) можна отримати одразу, якщо вибрати хвильову функцію Ψ у вигляді розкладу за синґлетним та триплетним станами частинка–античастинка

$$\Psi = \Psi_{00}|00\rangle + \Psi_{10}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi-\chi)|11\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi+\chi)|1-1\rangle. \tag{8}$$

Якщо для спрощення покласти маси нуклонів однакови ми $m_1 = m_2 = m$, тоді систему хвильових рівнянь (5) можна переписати так:

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\Psi_{10} - 2m\chi = (E-\hat{V}_1(r))\varphi\,,\\
&(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\Psi_{00} - 2m\varphi = (E-\hat{V}_2(r))\chi\,,\\
&(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\varphi = (E-\hat{V}_3(r))\Psi_{10}\,,\\
&(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\chi = (E-\hat{V}_4(r))\Psi_{00},
\end{aligned} \tag{9}$$

і після виключення функцій Ψ_{00} та Ψ_{10} отримаємо замкнуту систему двох рівнянь другого порядку щодо функцій φ та χ

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\frac{1}{E-\hat{V}_3(r)}\,(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\varphi-2m\chi &= (E-\hat{V}_1(r))\varphi\,,\\ (\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\frac{1}{E-\hat{V}_4(r)}\,(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\chi-2m\varphi &= (E-\hat{V}_2(r))\chi.\end{aligned} \tag{10}$$

Система (10) може бути зведена до одного рівняння другого порядку стосовно функції φ

$$\begin{aligned}&\frac{1}{E-\hat{V}_2(r)}(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\frac{1}{E-\hat{V}_4(r)}\,(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,(E-\hat{V}_1(r))\varphi\\ &+(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\frac{1}{E-\hat{V}_3(r)}\,(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\varphi+\frac{4m^2}{E-\hat{V}_2(r)}\,\varphi=(E-\hat{V}_1(r))\varphi\end{aligned} \tag{11}$$

чи щодо функції χ

$$\begin{aligned}&\frac{1}{E-\hat{V}_1(r)}(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\frac{1}{E-\hat{V}_3(r)}\,(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,(E-\hat{V}_2(r))\chi\\ &+(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\frac{1}{E-\hat{V}_4(r)}\,(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\chi+\frac{4m^2}{E-\hat{V}_1(r)}\,\chi=(E-\hat{V}_2(r))\chi.\end{aligned} \tag{12}$$

Кожне з цих рівнянь, як і система (10), описує релятивістську квантову систему двох нуклонів як у синґлетному, так і в триплетному спінових станах. Рівняння (10), (11) та (12) є інваріантними щодо одночасної заміни знака повної енерґії E та потенціялів $\hat{V}_i(r)$. Для заданого повного спіну рівняння (11) та (12) розщеплюються на одне скалярне рівняння другого порядку для синґлету та систему замкнутих диференційних рівнянь щодо триплетних спінових станів.

Із рівняння (11) для синґлетного стану ($S=0$) отримуємо одне рівняння другого порядку щодо функції φ (див. [11,12])

$$\mathbf{p}\,\frac{4}{E-V_3}\,\mathbf{p}\,\varphi+\frac{4m^2}{E-V_2}\,\varphi=(E-V_1)\varphi, \tag{13}$$

а з рівняння (12) — синґлетне рівняння для χ

$$\frac{1}{E-V_1}\mathbf{p}\frac{4}{E-V_3}\,\mathbf{p}\,(E-V_2)\,\chi+\frac{4m^2}{E-V_1}\,\chi=(E-V_2)\chi. \tag{14}$$

Рівняння (13) зводиться до рівняння (14) заміною

$$\varphi=-\frac{(E-V_2)}{2m}\chi. \tag{15}$$

У (13) та (14) введено нові позначення потенціялів для взаємодії в синґлетному стані

$$\begin{aligned}V_1(r)&=V_0(r)+4V_V(r)+V_S(r)-3V_P(r)\\ V_2(r)&=V_0(r)-2V_V(r)+V_S(r)+3V_P(r)\\ V_3(r)&=V_0(r)-V_S(r)-V_P(r).\end{aligned} \tag{16}$$

Для триплетного спінового стану ($S=1$) систему (10) зручно переписати так:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\frac{1}{E-W_3}\,(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\varphi-2m\chi &= (E-W_1)\varphi\\ (\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\frac{1}{E-W_4}\,(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\chi-2m\varphi &= (E-W_2)\chi.\end{aligned} \tag{17}$$

Відповідно рівняння (11) і (12) у триплетному стані мають вигляд

$$\frac{1}{E-W_2}\mathbf{Sp}\,\frac{4}{E-W_4}\,\mathbf{Sp}\,(E-W_1)\varphi+(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\frac{1}{E-W_3}\,(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\varphi+\frac{4m^2}{E-W_2}\,\varphi=(E-W_1)\varphi, \tag{18}$$

$$\frac{1}{E-W_1}(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\frac{1}{E-W_3}\,(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,(E-W_2)\chi+\mathbf{Sp}\,\frac{4}{E-W_4}\,\mathbf{Sp}\,\chi+\frac{4m^2}{E-W_1}\,\chi=(E-W_2)\chi. \tag{19}$$

Спін-спінова взаємодія в (7) породжує відмінність потенціяльних функцій у триплетному та синґлетному спінових станах. Якщо в триплетному стані потенціяльні функції

$$\begin{aligned} W_1(r)&=V_0(r)+V_S(r)+V_P(r),\\ W_2(r)&=V_0(r)+2V_V(r)+V_S(r)-V_P(r),\\ W_3(r)&=V_0(r)+2V_V(r)-V_S(r)+V_P(r),\\ W_4(r)&=V_0(r)+4V_V(r)-V_S(r)+3V_P(r), \end{aligned} \tag{20}$$

то “потенціяли” $V_0(r)$, $V_V(r)$, $V_S(r)$ та $V_P(r)$ пов’язують між собою “потенціяли” для синґлетного та триплетних станів

$$\begin{aligned} V_1(r)&=-W_1(r)+2W_2(r),\\ V_2(r)&=2W_1(r)-W_2(r),\\ V_3(r)&=2W_3(r)-W_4(r). \end{aligned} \tag{21}$$

Використовуючи вираз

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}f(r)(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\\ &=\mathbf{p}f(r)\mathbf{p}-\mathbf{Sp}f(r)\mathbf{Sp}+\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}f(r)\right)\mathbf{LS}, \end{aligned} \tag{22}$$

де $\mathbf{L}$ — оператор кутового моменту системи двох нуклонів, рівняння (18) та (19) можна переписати у зручнішій формі для подальшого застосування

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}\,\frac{4}{E-W_3}\,\mathbf{p}\,\varphi-\mathbf{Sp}\,\frac{4}{E-W_3}\,\mathbf{Sp}\,\varphi+\frac{1}{E-W_2}\mathbf{Sp}\,\frac{4}{E-W_4}\,\mathbf{Sp}\,(E-W_1)\varphi\\ &+\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{4}{E-W_3}\right)\mathbf{LS}\,\varphi+\frac{4m^2}{E-W_2}\,\varphi=(E-W_1)\varphi, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}\,\frac{4}{E-W_4}\,\mathbf{p}\,\chi-(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\frac{1}{E-W_4}(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\chi+\frac{1}{E-W_1}(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,\frac{1}{E-W_3}\,(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}\,(E-W_2)\chi\\ &+\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{4}{E-W_4}\right)\mathbf{LS}\,\chi+\frac{4m^2}{E-W_1}\,\chi=(E-W_2)\chi\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Релятивістські триплетні рівняння (23) та (24) мають форму рівнянь типу Шрединґера–Брейта. Зауважимо, що такі рівняння становлять собою нестандартну нелінійну спектральну задачу, де оператор кінетичної енерґії модифікується залежністю від координат та повної енерґії, а ефективна взаємодія також залежить від повної енерґії E, яка входить через дробово-раціональні функції. Отримані рівняння містять у собі центральну потенціяльну взаємодію, що корелює із взаємодією в синґлетному стані (13). Тензорна та спін-орбітальна взаємодії також визначаються тими ж потенціяльними функціями, причому тензорні оператори, які побудовано на операторах імпульсу та спіну нуклонів, можна поділити на два типи

$$\mathbf{Sp}f(r)\mathbf{Sp},\quad(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}f(r)(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}.$$

Звернемо увагу на те, що в цій релятивістській задачі неможливо говорити про тензорну та спін-орбітальну взаємодії як про незалежні. Дійсно, з виразу (22) видно, що тензорні та спін-орбітальні сили мають єдину природу. У хвильових рівняннях з такою структурою для заданої енерґії E зберігаються: повний спін $\mathbf{S}^2$, повний момент $\mathbf{J}^2$ та його проєкція J_Z.

Цікавою є нерелятивістська границя отриманих рівнянь. Так, рівняння для синґлетного стану (13) в нерелятивістській границі переходить до звичайного рівняння Шредингера з потенціялом

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2} = V_0 + V_S + V_V \,, \tag{25}$$

а поправка на релятивізм у "потенціяльній енерґії" залежить від швидкости і має вигляд

$$\delta V = -\frac{\mathbf{p}^4}{4m^3} + \frac{\mathbf{p}V_3\mathbf{p}}{4m^2} - \frac{\left[\mathbf{p}^2,\ V_2\right]_+}{4m^2} + \frac{(V_1 - V_2)^2}{16m}, \tag{26}$$

де $[a,b]_+ = ab + ba$ — антикомутатор двох операторів.

У нерелятивістській границі рівняння для триплету (23) та (24) переходять до рівняння Шредингера з центральним потенціялом W та релятивістською поправкою до нього δW, яка містить у собі центральну, спін-орбітальну та тензорну взаємодії

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m} + W\right)\psi + \delta W \psi = \varepsilon\psi \;, \tag{27}$$

де $\varepsilon \approx E - 2m$. Підкреслимо, що центральний потенціял W є півсумою потенціялів W_1 та W_2 і збігається з потенціялом для синґлетного стану,

$$W = \frac{W_1 + W_2}{2} = \frac{V_1 + V_2}{2} = V_0 + V_S + V_V, \tag{28}$$

та вказує на те, що поділ взаємодії на синґлетну і триплетну має релятивістське походження. Релятивістську поправку δW можна зобразити у двох варіантах. Перший — отримано з рівняння (23), а другий — з (24)

$$\begin{aligned} \delta W \;=\; & -\frac{\mathbf{p}^4}{4m^3} + \frac{\mathbf{p}W_3\mathbf{p}}{2m^2} - \frac{\left[\mathbf{p}^2, W_2\right]_+}{4m^2} + \frac{(W_1 - W_2)^2}{16m} + \frac{1}{2m^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}W_3\right)\mathbf{LS} \\ & -\frac{\mathbf{Sp}(W_3 - W_4)\mathbf{Sp}}{2m^2} - \frac{\left[(\mathbf{Sp})\,(\mathbf{Sp})\,, W_1 - W_2\right]_+}{4m^2}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \delta W = \; - \; & \frac{\mathbf{p}^4}{4m^3} + \frac{\mathbf{p}W_4\mathbf{p}}{2m^2} - \frac{\left[\mathbf{p}^2,\ W_1\right]_+}{4m^2} + \frac{(W_1 - W_2)^2}{16m} + \frac{1}{2m^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}W_4\right)\mathbf{LS} \\ + \; & \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}(W_3 - W_4)(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}}{8m^2} + \frac{\left[(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p}(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{p},\ W_1 - W_2\right]_+}{16m^2} \;. \end{aligned} \tag{30}$$

Ці поправки не є незалежними і за допомогою виразу (22) переходять одна в одну. Хоча рівняння (23) та (24) є різними і сформульовані щодо різних хвильових функцій, релятивістські поправки з точністю до членів $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ збігаються. Можна взяти напівсуму цих поправок і отримати ще одну форму запису δW, яка характерна тим, що всі потенціяльні функції W_i входять до неї симетрично

$$\begin{aligned} \delta W = \; - \; & \frac{\mathbf{p}^4}{4m^3} + \frac{\mathbf{p}\;(W_3 + W_4)\mathbf{p}}{4m^2} - \frac{\left[\mathbf{p}^2, W_1 + W_2\right]_+}{8m^2} + \frac{(W_1 - W_2)^2}{16m} \\ + \; & \frac{1}{4m^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(W_3 + W_4)\right)\mathbf{LS} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{p}(W_3 - W_4)\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{p}}{4m^2} - \frac{\left[(\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{p}), W_1 - W_2\right]_+}{8m^2} \;, \end{aligned} \tag{31}$$

де перший доданок є стандартною релятивістською поправкою до кінетичної енерґії, наступні — це поправки до центральних потенціялів, спін-орбітальної та тензорної взаємодій, які залежать від імпульсу.

III. ЗВ'ЯЗАНИЙ СТАН ДЕЙТРОНА

Розгляньмо зв'язаний стан двох нуклонів у триплетному стані (дейтрон) на основі отриманого релятивістського рівняння типу Шредингера–Брейта (23). Щоб не ускладнювати аналіз, у цій роботі будемо досліджувати триплетний стан двох нуклонів незалежно від синґлетного стану. Як і в нерелятивістському підході, хвильову функцію φ зобразимо як суперпозицію S- та D-хвиль

$$\varphi = \frac{u(r)}{r}\,\mathcal{Y}_{01}^{1M} + \frac{w(r)}{r}\,\mathcal{Y}_{21}^{1M}\,, \tag{32}$$

де $u(r)$ та $w(r)$ — радіяльні компоненти функції φ для S- та D-станів, $\mathcal{Y}_{01}^{1M}$, $\mathcal{Y}_{21}^{1M}$ — спін-тензори з моментом нуль та двійка. Після підстановки функції φ із (32) в рівняння (23) отримуємо систему двох зв'язаних радіяльних диференційних рівнянь щодо функцій $u(r)$ та $w(r)$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r^2\frac{4}{3(E-W_3)}\frac{d}{dr}\frac{u}{r} - \frac{1}{E-W_2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r^2\frac{8}{3(E-W_4)}\frac{d}{dr}\frac{E-W_1}{r}u + \frac{4m^2}{E-W_2}u - (E-W_1)u\\
&= -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{4\sqrt{2}}{3(E-W_3)}\frac{d}{dr}r^2 w + \frac{1}{E-W_2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{4\sqrt{2}}{3(E-W_4)}\frac{d}{dr}r^2(E-W_1)w,\\
&-r^2\frac{d}{dr}\frac{1}{r^4}\frac{8}{3(E-W_3)}\frac{d}{dr}r^2 w - \frac{r^2}{E-W_2}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^4}\frac{4}{3(E-W_4)}\frac{d}{dr}r^2(E-W_1)w + \frac{4m^2}{E-W_2}w - (E-W_1)w\\
&= -r^2\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{4\sqrt{2}}{3(E-W_3)}\frac{d}{dr}\frac{u}{r} + \frac{r^2}{E-W_2}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{4\sqrt{2}}{3(E-W_4)}\frac{d}{dr}\frac{E-W_1}{r}u.
\end{aligned} \tag{33}$$

Розгляньмо найпростішу модель з "потенціяльними функціями" у вигляді прямокутних ям:

$$W_2(r) = \begin{cases} W_{20} & r < r_2, \\ 0 & r > r_2, \end{cases} \quad W_3(r) = \begin{cases} W_{30} & r < r_T, \\ 0 & r > r_T, \end{cases}$$

$$W_4(r) = \begin{cases} W_{40} & r < r_T, \\ 0 & r > r_T, \end{cases} \tag{34}$$

де радіуси потенціялів підпорядковані умові $r_2 < r_T$. Для неперевности хвильових функцій "потенціял" $W_1(r)$ повинен бути також неперервним, і в цій праці ми не будемо його враховувати. Потенціял $W_2(r)$ умовно можно назвати центральним потенціялом, і його радіус — радіусом центральних сил, а потенціяли $W_3(r)$ та $W_4(r)$ — потенціялами тензорних сил з радіусом дії r_T — радіусом тензорних сил. Дійсно, з релятивістської поправки до рівняння Шредингера (31) виходить, що основний внесок до центральної взаємодії даватиме потенціял $W_2(r)$, а до тензорної взаємодії — потенціяли $W_3(r)$, $W_4(r)$. Загалом такого поділу потенціялів у (23) на центральні та тензорні нема. Звернемо увагу, що взагалі радіуси потенціялів $W_3(r)$ та $W_4(r)$ різні і може бути два радіуси тензорних сил.

Відзначимо, що, на відміну від феноменологічної нерелятивістської задачі з тензорним потенціялом у формі прямокутних ям, досліджувана тут релятивістська модель допускає аналітичний розв'язок. Поза межами дії ядерних сил рівняння для радіяльних функцій (33) розділяються і стають незалежними,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dr^2} - \gamma^2 u = 0\\
&\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{6}{r^2}w - \gamma^2 w = 0,
\end{aligned} \tag{35}$$

і їх розв'язок можна записати так:

$$\begin{aligned}
u(r) &= A_S \exp(-\gamma r),\\
w(r) &= A_D \exp(-\gamma r)\left[1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{(\gamma r)^2}\right],
\end{aligned} \tag{36}$$

де A_S та A_D — незалежні константи інтеґрування, $4\gamma^2 = \left(4m^2 - E^2\right)$, $E = 2m - B_d$ — повна енерґія двох нуклонів.

У сфері дії тензорних потенціялів $W_4(r)$, $W_3(r)$, де $r_2 < r < r_T$, система (33) може бути записана як

$$\left(\frac{E}{E-W_{30}}+\frac{2E}{E-W_{40}}\right)\frac{d^2u}{dr^2}-3\gamma^2u=\sqrt{2}\left(\frac{E}{E-W_{30}}-\frac{E}{E-W_{40}}\right)\left(\frac{d}{dr}+\frac{3}{r}\right)\frac{dw}{dr},$$

$$\left(\frac{2E}{E-W_{30}}+\frac{E}{E-W_{40}}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{6}{r^2}w\right)-3\gamma^2w=\sqrt{2}\left(\frac{E}{E-W_{40}}-\frac{E}{E-W_{30}}\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr}-\frac{3u}{r}\right). \tag{37}$$

Розв'язок такої системи шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} u(r) &= B_S\exp(-\beta r)+N_S\exp(\beta r),\\ w(r) &= B_D\exp(-\beta r)\left[1+\frac{3}{\beta r}+\frac{3}{(\beta r)^2}\right]+N_D\exp(\beta r)\left[1-\frac{3}{\beta r}+\frac{3}{(\beta r)^2}\right], \end{aligned} \tag{38}$$

де $B_S,\ B_D,\ N_S,\ N_D$ — постійні інтеґрування, β — функція від інтенсивностей потенціялів W_3, W_4 та повної енерґії E. Для знаходження коефіцієнтів β із (37) отримуємо однорідну систему з двох алґебраїчних рівнянь щодо $B_S,\ B_D$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{E-W_{30}}+\frac{2E}{E-W_{40}}\right)\beta^2B_S-3\gamma^2B_S &= \sqrt{2}\left(\frac{E}{E-W_{30}}-\frac{E}{E-W_{40}}\right)\beta^2B_D,\\ \left(\frac{2E}{E-W_{30}}+\frac{E}{E-W_{40}}\right)\beta^2B_D-3\gamma^2B_D &= \sqrt{2}\left(\frac{E}{E-W_{40}}-\frac{E}{E-W_{30}}\right)\beta^2B_S, \end{aligned} \tag{39}$$

та аналогічну систему щодо $N_S,\ N_D$. Із цих систем випливає, що з двох констант $B_S,\ B_D$ та $N_S,\ N_D$ незалежними є тільки по одній. Визначник системи (39) дає квадратне рівняння стосовно β^2

$$\frac{E^2}{(E-W_{30})(E-W_{40})}\beta^4-\gamma^2\left(\frac{E}{E-W_{30}}+\frac{E}{E-W_{40}}\right)\beta^2+\gamma^4=0, \tag{40}$$

розв'язок, якого легко знайти

$$\beta_{1,2}^2=\frac{\gamma^2}{2E}\left\{2E-W_{30}-W_{40}\pm(E-W_{30})(E-W_{40})\left|\frac{W_{30}-W_{40}}{(E-W_{30})(E-W_{40})}\right|\right\}. \tag{41}$$

З виразу (41) випливає, що є два різні коефіцієнти β^2 і, відповідно, розв'язок системи (37) містить вісім констант інтеґрування, причому незалежними з них є тільки чотири. Константи зв'язані між собою одним із рівнянь системи (39), наприклад, із першого рівняння отримуємо такий зв'язок:

$$B_D^{(j)}=\frac{\left(\dfrac{1}{E-W_{30}}+\dfrac{2}{E-W_{40}}\right)\beta_j^2-\dfrac{3\gamma^2}{E}}{\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{E-W_{30}}-\dfrac{1}{E-W_{40}}\right)\beta_j^2}B_S^{(j)}\equiv\eta_2^{(j)}B_S^{(j)}. \tag{42}$$

Ураховуючи сказане вище, повний розв'язок системи (37) перепишемо так:

$$\begin{aligned} u(r) &= \sum_{j=1}^{2}\Big\{B_S^{(j)}\exp(-\beta_jr)+N_S^{(j)}\exp(\beta_jr)\Big\},\\ w(r) &= \sum_{j=1}^{2}\eta_2^{(j)}\left\{B_S^{(j)}\exp(-\beta_jr)\left[1+\frac{3}{\beta_jr}+\frac{3}{(\beta_jr)^2}\right]+N_S^{(j)}\exp(\beta_jr)\left[1-\frac{3}{\beta_jr}+\frac{3}{(\beta_jr)^2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{43}$$

У ділянці $r<r_2$, де діють як центральні, так і тензорні сили, система радіяльних рівнянь (33) набирає вигляду

$$\left(\frac{E-W_{20}}{E-W_{30}}+\frac{2E}{E-W_{40}}\right)\frac{d^2u}{dr^2}-3\left(\gamma^2+\frac{EW_{20}}{4}\right)u=\sqrt{2}\left(\frac{E-W_{20}}{E-W_{30}}-\frac{E}{E-W_{40}}\right)\left(\frac{d}{dr}+\frac{3}{r}\right)\frac{dw}{dr}, \tag{44}$$

$$\left(2\frac{E-W_{20}}{E-W_{30}}+\frac{E}{E-W_{40}}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{6w}{r^2}\right)-3\left(\gamma^2+\frac{EW_{20}}{4}\right)w=\sqrt{2}\left(\frac{E-W_{20}}{E-W_{30}}-\frac{E}{E-W_{40}}\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr}-\frac{3u}{r}\right).$$

Обмежений у нулі розв'язок є таким:

$$\begin{aligned} u(r) &= \sum_{j=1}^{2} C_S^{(j)} \sin(\alpha_j r), \\ w(r) &= \sum_{j=1}^{2} \eta_1^{(j)} C_S^{(j)} \left\{\left(\frac{3}{(\alpha_j r)^2}-1\right)\sin(\alpha_j r)-\frac{3}{\alpha_j r}\cos(\alpha_j r)\right\}, \end{aligned} \tag{45}$$

де α_j — функції потенціялів та повної енерґії, $C_S^{(j)}$ — постійні інтеґрування,

$$\alpha_{1,2}^2=\frac{-\left(\gamma^2+\frac{EW_{20}}{4}\right)\left(\frac{E-W_{20}}{E-W_{30}}+\frac{E}{E-W_{40}}\right)\pm\left|\left(\gamma^2+\frac{EW_{20}}{4}\right)\left(\frac{E-W_{20}}{E-W_{30}}-\frac{E}{E-W_{40}}\right)\right|}{\frac{E-W_{20}}{E-W_{30}}\frac{2E}{E-W_{40}}}, \tag{46}$$

$$C_D^{(j)}=-\frac{\left(\frac{E-W_{20}}{E-W_{30}}+\frac{2E}{E-W_{40}}\right)\alpha_j^2+3\left(\gamma^2+\frac{EW_{20}}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{E-W_{20}}{E-W_{30}}-\frac{E}{E-W_{40}}\right)\alpha_j^2}C_S^{(j)}\equiv\eta_1^{(j)}C_S^{(j)}. \tag{47}$$

Повний розв'язок рівнянь (33) для всіх r можна записати компактно через сферичні функції Бесселя та Ганкеля

$$u(r)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{2} C_S^{(j)}\alpha_j r j_0(\alpha_j r), \quad r<r_2,\\ \sum_{j=1}^{2}\beta_j r\Big[-B_S^{(j)}h_0^{(1)}(i\beta_j r)+N_S^{(j)}h_0^{(2)}(i\beta_j r)\Big], \quad r_2<r<r_T,\\ -A_S\gamma r h_0^{(1)}(i\gamma r), \quad r>r_T,\end{cases} \tag{48}$$

$$w(r)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{2}\eta_1^{(j)} C_S^{(j)}\alpha_j r j_2(\alpha_j r), \quad r<r_2,\\ \sum_{j=1}^{2}\eta_2^{(j)}\beta_j r\Big[B_S^{(j)}h_2^{(1)}(i\beta_j r)-N_S^{(j)}h_2^{(2)}(i\beta_j r)\Big], \quad r_2<r<r_T,\\ A_D\gamma r h_2^{(1)}(i\gamma r), \quad r>r_T.\end{cases} \tag{49}$$

В околі точки $r=0$ функції $u(r)$ та $w(r)$ ведуть себе за законом $u(r)\sim r$, $w(r)\sim r^3$. Зауважимо, що повні радіяльні функції $R_S(r)=u(r)/r$ та $R_D(r)=w(r)/r$ є сумою сферичних функцій Бесселя та Ганкеля першого та другого роду.

У точці розриву потенціялу W_2 функції $u(r)$ та $w(r)$ є неперервними разом зі своїми першими похідними

$$u\Big|_{r_2-0}^{r_2+0}=0\,,\quad w\Big|_{r_2-0}^{r_2+0}=0\,,$$

$$\frac{du}{dr}\bigg|_{r_2-0}^{r_2+0} = 0\,, \quad \frac{dr^2 w}{dr}\bigg|_{r_2-0}^{r_2+0} = 0\,. \tag{50}$$

Неперервність хвильових функцій та їх перших похідних у точці r_2 зумовлена тим, що потенціяли $W_3(r)$ та $W_4(r)$ в околі цієї точки є константами і, відповідно, їх можна винести за знак похідної. У точці розриву тензорних потенціялів r_T хвильові функції задовольняють умови

$$\begin{aligned}
&u\bigg|_{r_T-0}^{r_T+0} = 0\,, \quad w\bigg|_{r_T-0}^{r_T+0} = 0\,,\\
&\left\{\frac{E}{E-W_{30}}\left[r^3\frac{d}{dr}\frac{u}{r} - \sqrt{2}\frac{d}{dr}r^2 w\right] + \frac{E}{E-W_{40}}\left[2r^3\frac{d}{dr}\frac{u}{r} + \sqrt{2}\frac{d}{dr}r^2 w\right]\right\}\bigg|_{r_T-0} = 3r^3\frac{d}{dr}\frac{u}{r}\bigg|_{r_T+0}\,,\\
&\left\{\frac{E}{E-W_{30}}\left[\sqrt{2}r^3\frac{d}{dr}\frac{u}{r} - 2\frac{d}{dr}r^2 w\right] - \frac{E}{E-W_{40}}\left[\sqrt{2}r^3\frac{d}{dr}\frac{u}{r} + \frac{d}{dr}r^2 w\right]\right\}\bigg|_{r_T-0} = -\,3\frac{d}{dr}r^2 w\bigg|_{r_T+0}\,.
\end{aligned} \tag{51}$$

У результаті маємо вісім констант інтеґрування та вісім граничних умов для хвильових функцій, підстановкою яких у ці умови отримуємо однорідну систему трансцендентних рівнянь щодо невідомих констант. Із умови, що визначник цієї системи є нулем, маємо секулярне рівняння для знаходження енерґії зв'язаного стану дейтрона.

Відшукані явні хвильові функції дають змогу досить просто розрахувати всі фізичні характеристики зв'язаного стану дейтрона. Зауважимо, що загалом усі середні потрібно рахувати на повній хвильовій функції (8), хоча це пов'язано з певними труднощами. Цю доволі складну проблему в нашій статті ми не будемо докладніше обговорювати і тому рівняння (23) розглядатимемо як основне вихідне рівняння для триплетного стану.

Усі визначення середніх величин для дейтрона збігаються зі стандартними визначеннями у феноменологічних підходах. Так, квадрупольний момент буде

$$Q_d = \frac{1}{20}\int_0^\infty dr\, r^2 w(r)\left[\sqrt{8}\,u(r) - w(r)\right], \tag{52}$$

середньоквадратичний радіус

$$r_d = \frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty dr\, r^2\left[u^2(r) + w^2(r)\right]\right\}^{1/2} \tag{53}$$

та ймовірність D-стану

$$P_D = \int_0^\infty dr\, w^2(r). \tag{54}$$

При цьому хвильові функції нормовано стандартно

$$\int_0^\infty dr\left[u^2(r) + w^2(r)\right] = 1. \tag{55}$$

У нашому випадку рівняння (33) з потенціялами (34) містять п'ять незалежних параметрів: глибину та радіус дії кожного з потенціялів $W_2(r)$, $W_3(r)$, $W_4(r)$ (радіуси останніх двох потенціялів збігаються). Якщо відновити фундаментальні сталі $\hbar$ та c в розглянутих рівняннях, то в усіх розрахунках використано $\hbar c = 197.327053$ MeV Fm, а чисельне значення для константи γ в (35)

$$\gamma = 0.231538\,\mathrm{Fm}^{-1}, \tag{56}$$

розраховано за заданою експериментальною енерґією зв'язку дейтрона $B_d = 2.224575(9)$ MeV [13]. Для інших фізичних характеристик використано значення: квадрупольний момент $Q_d = 0.2859(3)$ Fm^2 [14] та радіус дейтрона $r_d = 1.9547(19)$ Fm [15]. У результаті опису цих даних знайдено такі параметри потенціялів для (34):

$$\begin{aligned}
&W_{20} = -98.631\,\mathrm{MeV},\ r_2 = 1.8\,\mathrm{Fm};\\
&W_{30} = -875.019\,\mathrm{MeV},\\
&W_{40} = 894.999\,\mathrm{MeV},\ r_T = 3.0\,\mathrm{Fm}.
\end{aligned} \tag{57}$$

Як видно, інтенсивності потенціялів $W_3(r)$ та $W_4(r)$ приблизно збігаються з масою нуклона і на порядок більші, ніж інтенсивність потенціялу $W_2(r)$, а радіус дії — більший, приблизно, на один фермі. Якщо взяти до уваги поправку до нерелятивістського потенціялу (31), то видно, що саме функції $W_3(r)$ та $W_4(r)$ дають основний внесок до тензорної та спін-орбітальної взаємодії, і ці потенціяльні функції умовно можна назвати тензорними потенціялами. Водночас потенціял $W_2(r)$ (як і $W_1(r)$), в основному, відповідає за центральну взаємодію.

На рис. 1 зображено розраховані для побудованих "потенціялів" взаємодії з параметрами (57) радіяльні хвильові функції дейтрона $u(r)$ і $w(r)$. Функція $u(r)$

досягає свого максимального значення приблизно в точці $r = 1.61$ Fm і дорівнює $0.529\ \mathrm{Fm}^{-1/2}$, а максимальне значення функції $w(r)$ дорівнює $0.135\ \mathrm{Fm}^{-1/2}$ при значно більшій відстані $r = r_T = 3.0$ Fm. У точці $r = r_T$ розриву тензорних "потенціялів" хвильові функції мають "надлом". Водночас у точці розриву потенціялу $W_2(r)$ подібного "надлому" в точці r_2 не спостерігаємо, оскільки хвильові функції в цій точці неперервні разом зі своїми першими похідними (50). Для параметрів (57) визначено: енерґію зв'язку дейтрона $B_d = 2.224575$ MeV, квадрупольний момент $Q_d = 0.2860\ \mathrm{Fm}^2$, радіус дейтрона $r_d = 1.9549$ Fm та ймовірність D-стану $P_D = 0.035$. Основний внесок до значення квадрупольного моменту дає хвильова функція за межами дії ядерних сил $Q_d^{\mathrm{out}} = 0.227329\ \mathrm{Fm}^2$, а в межах дії ядерних сил для квадрупольного моменту маємо $Q_d^{\mathrm{in}} = 0.058719\ \mathrm{Fm}^2$. Для ймовірности D-стану основний внесок дає ділянка біля максимуму D-хвилі, при цьому внесок у P_D приблизно однаковий як у межах дії потенціялів, так і поза межами $P_D^{\mathrm{out}} = 0.015$, $P_D^{\mathrm{in}} = 0.020$.

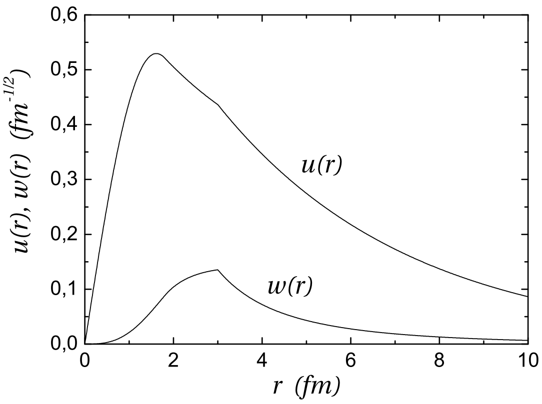

Рис. 1. Радіяльні хвильові функції в S- і D-станах для прямокутних "потенціялів" з параметрами (57).

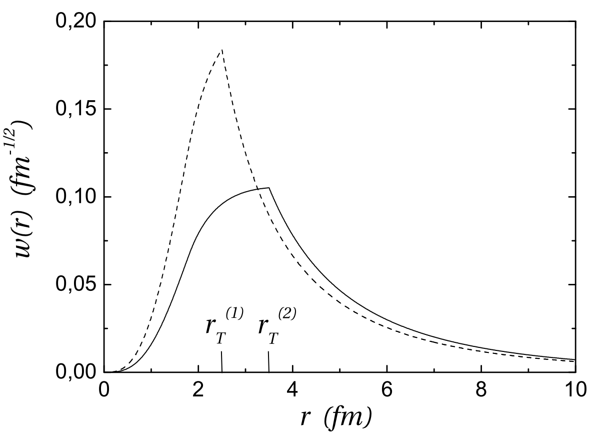

Рис. 2. Залежність функції $w(r)$ для двох різних значень радіуса тензорних сил $r_T^{(1)} = 2.5$ Fm та $r_T^{(2)} = 3.5$ Fm

Через те, що пригінка п'ятьох параметрів потенціялів проводилась тільки за трьома експериментальними параметрами (енерґія зв'язку, квадрупольний момент і радіус дейтрона), то вона не є однозначною. Наприклад, на рис. 2 зображено залежність хвильової функції $w(r)$ для двох різних радіусів дії тезорних сил $r_T^{(1)} = 2.5$ Fm та $r_T^{(2)} = 3.5$ Fm із значенням $P_D = 0.049$ та $P_D = 0.027$ відповідно. Основні характеристики дейтрона, які було розраховано за цими параметрами, також збігаються з експериментальними. Як видно, величина P_D залежить від значення радіуса дії тензорних сил і швидко зростає зі зменшенням r_T. При $r > r_T$ ці криві практично збігаються, а поблизу нуля вони пропорційні r^3. Відзначимо, що функція $w(r)$ має максимальне значення строго в точці розриву тензорних потенціялів.

Для параметрів потенціялів (57) коефіцієнти $\eta_i^{(j)}$ в (42) та (47), які пов'язують між собою константи інтеґрування для S- та D-хвиль у внутрішніх ділянках, мають такі значення:

$$\eta_1^{(1)} = \sqrt{2}, \quad \eta_1^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\eta_2^{(1)} = -\sqrt{2}, \quad \eta_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{58}$$

Можна показати, що і загалом для будь-яких параметрів потенціялів у формі прямокутних ям ці коефіцієнти можуть приймати тільки значення $\pm\sqrt{2}$ чи $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Для коефіцієнта $\eta \equiv \frac{A_D}{A_S}$ можна отримати вираз

$$\eta = \frac{w(r_T)}{u(r_T)} \left[1 + \frac{3}{\gamma r_T} + \frac{3}{(\gamma r_T)^2}\right]^{-1}, \tag{59}$$

якщо врахувати, що радіяльні рівняння в зовнішній ділянці розділяються і стають незалежними. Чисельний розрахунок дає

$$\eta = 0.026897. \tag{60}$$

Константи A_S та A_D знаходимо за формулами

$$A_S = -\frac{u(r_T)}{\gamma r_T h_0^{(1)}(i\gamma r_T)},$$
$$A_D = \frac{w(r_T)}{\gamma r_T h_2^{(1)}(i\gamma r_T)}, \tag{61}$$

і вони приймають значення

$$A_S = 0.8744235\ \mathrm{Fm}^{-1/2},$$

$$A_D = 0.023514\,\mathrm{Fm}^{-1/2}. \quad (62)$$

За знайденими точними розв'язками хвильових функцій для основного стану дейтрона можна побудувати структурну функцію дейтрона (див. [16])

$$A(q) = G_C^2(q) + \frac{8}{9}\eta^2 G_Q^2 + \frac{2}{3}\eta(1+\eta)G_M^2(q), \quad (63)$$

де $\eta = \dfrac{q^2}{4M_d^2}$. Тут перший доданок у (63) є зарядовою структурною функцією, другий доданок визначається квадрупольною структурною функцією, а третій — квадратом магнетного формфактора.

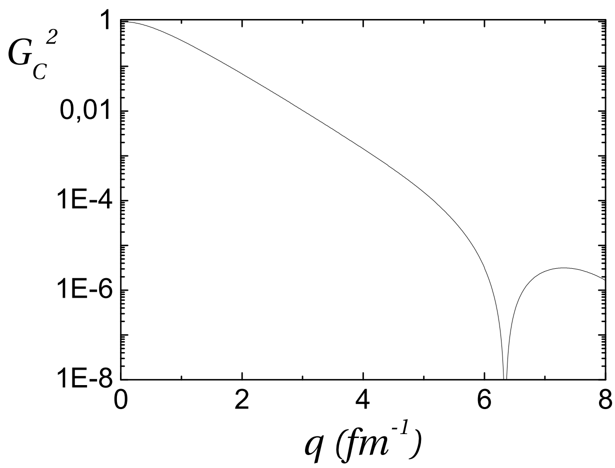

Рис. 3. Зарядовий формфактор релятивістського дейтрона з прямокутними потенціялами.

На рис. 3 зображено перший доданок структурної функції $A(q)$, що відповідає розподілові заряду в дейтроні. У наближенні точкових нуклонів це є квадрат формфактора розподілу заряду

$$G_C(q) = \int_0^\infty dr\, j_0\left(\frac{qr}{2}\right)\left[u^2(r) + w^2(r)\right]. \quad (64)$$

Поведінка електричного формфактора дейтрона $G_C(q)$ залежно від переданого імпульсу якісно збігається з феноменологічною поведінкою, коли враховується феноменологічний тензорний потенціял взаємодії. У нашому випадку при $q \approx 6.4$ Fm^{-1} спостерігаємо "провал", який зумовлений відштовхуванням на малих відстаннях за рахунок функцій $W_3(r)$ та $W_4(r)$. Аналогічні "провали" бачимо і при більших переданих імпульсах q, приблизно через однаковий інтервал, порядку $3\,\mathrm{Fm}^{-1}$. Імовірно, що природа таких провалів зумовлена розривністю вибраних потенціяльних функцій взаємодії. Цікаво, що положення таких провалів чутливе до параметрів потенціяльних функцій. При зміні параметрів потенціялів деякі провали зникають і можуть утворюватися скінченні мінімуми структурної функції $G_C^2(q)$.

IV. ВИСНОВКИ

Формулювання й дослідження стаціонарних релятивістських рівнянь типу Шредингера–Брейта в межах методу прямих взаємодій Дірака–Брейта для двох нуклонів у синґлетному та триплетному спінових станах дало змогу врахувати різноманітні релятивістські ефекти. Отримані стаціонарні рівняння для двох діракових частинок є релятивістським узагальненням рівняння Шредингера. Такі рівняння містять модифікований оператор кінетичної енерґії, який залежить від повної енерґії та координат через певні потенціяльні функції. Крім того, вони враховують центральну, спін-орбітальну та тензорну взаємодії, що залежать від відстані, швидкости та ще й від повної енерґії, яка входить до рівняння через дробово-раціональні функції. У цьому підході тензорна та спін-орбітальна взаємодії є проявом релятивістських ефектів і породжені одними й тими ж потенціяльними функціями. Оскільки тензорна взаємодія в отриманих рівняннях побудована на операторах спіну частинок та відносного імпульсу системи двох нуклонів, то такий оператор можна розглядати не тільки як поправку до потенціялу взаємодії, але і як релятивістську поправку до кінетичної енерґії.

Запис тензорного оператора через імпульси в релятивістському двочастинковому рівнянні є природнішим, ніж через координати частинок, і дає змогу, на відміну від нерелятивістського підходу, у випадку "потенціялів" прямокутної форми отдержати явний аналітичний розв'язок. Удалось отримати повний узгоджений опис усіх основних характеристик зв'язаного стану дейтрона. Установлено певні кореляційні закономірності між розміром, квадрупольним моментом та ймовірністю D-стану дейтрона.

Опис синґлетного розсіяння двох нуклонів в [11] та триплетного зв'язаного стану дейтрона в нашій статті показує, що інтенсивності для потенціяльних функцій, які входять до операторів кінетичної енерґії та тензорних операторів, набувають значень порядку маси нуклона, що вказує на суттєвий релятивізм тензорної та спін-орбітальної взаємодій і значну модифікацію кінетичної енерґії.

Важливою проблемою і далі є можливість одночасного опису всіх характеристик двонуклонного розсіяння в синґлетному та триплетному станах і повному енерґетичному інтервалі та поширення підходу Дірака–Брейта на багатонуклонні системи. Цікавою є можливість застосовувати цей підхід з прямими взаємодіями до двокваркових систем для опису структури мезонних спектрів.

[1] K. E. Lassila, M. H. Jr. Hull, H. M. Ruppel, F. A. Mc Donald, G. Breit, Phys. Rev. **126**, 881 (1962).
[2] M. Lacombe, B. Loiseau, J. M. Richard, R. Vinh-Mau, Phys. Rev. C **21**, 861 (1980).
[3] R. Machleidt, K. Holinde, Ch. Elster, Phys. Rep. **149**, (1987).
[4] R. Machleidt, Phys. Rev. C **63**, 024001 (2001).
[5] В. А. Карманов, ЭЧАЯ, **19**, вып. 3, 525 (1988).
[6] Р. П. Гайда, ЭЧАЯ, **13**, вып. 2, 427 (1982).
[7] Р. П. Гайда, Ю. Б. Ключковский, В. И. Третяк, Теор. мат. физ **44**, 194 (1980); Теор. мат. физ. **45**, 180 (1980).
[8] J. W. Darewych, A. G. Sitenko, I. V. Simenog, A. I. Sitnichenko, Phys. Rev. C **47**, 1885 (1993).
[9] А. Ю. Корчин, А. В. Шебеко, Яд. физ. **56**, вып. 12, 77 (1993).
[10] H. A. Bethe, E. E. Salpeter, *Quantum mechanics of One- and Two-Electron Atoms* (Springer Verlag, Berlin, 1957).
[11] І. В. Сименог, О. І. Туровський, Укр. фіз. журн. **46**, 391 (2001).
[12] І. В. Сименог, О. І. Туровський, Укр. фіз. журн. **48**, 210 (2003).
[13] C. van der Leun, C. Alderlisten, Nucl. Phys. A **380**, 261 (1982).
[14] D. M. Bishop, L. M. Cheung, Phys. Rev. A **20**, 381 (1979); T. E. O. Ericson, M. Rosa-Clot, Nucl. Phys. A **405**, 497 (1983).
[15] Mustafa M. Mustafa, Phys. Rev. C **48**, 929 (1993).
[16] А. И. Ахиезер, А. Г. Ситенко, В. К. Тартаковский, *Электродинамика ядер* (Наукова думка, Киев, 1989).

THE MODEL OF DEUTERON IN DIRAC–BREIT APPROACH WITH DIRECT INTERACTION

I. V. Simenog, A. I. Turovsky

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, National Academy of Sciences of Ukraine
14b Metrolohichna St., Kyiv, UA–03143, Ukraine

The second-order partial Schrödinger–Breit equations are obtained for two relativistic nucleons with direct potential interaction in the triplet spin state. New continuity relations for wave functions are derived for the case of discontinuous potentials. There are not only central but also tensor interactions of the relativistic nature in the investigated relativistic model. The exact solutions for triplet state of two nucleones with the potential in the form of rectangular wells are received. The model of the deuteron ground state is introduced on the basis of the triplet relativistic equations with potential functions in the form of the rectangular wells, where the consistent explanation of essential deuteron experimental parameters is obtained.