

РОЗРАХУНОК ПЕРЕРІЗУ ПРОЦЕСУ ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$ З ВИКОРИСТАННЯМ ХВИЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ ФАДДЕЄВСЬКОГО ТИПУ

В. К. Тартаковський, О. М. Малярж, О. А. Лінник
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
фізичний факультет, кафедра квантової теорії поля
просп. акад. Глушкова, 6, Київ, 03022, Україна
(Отримано 10 грудня 2002 р.)

Для розрахунку перерізу процесу ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$ запропоновано метод побудови тринуклонних хвильових функцій системи протон–дейтрон з використанням рівнянь Фаддеєва та гіперсферичних функцій.

Ключові слова: рівняння Фаддеєва, інтерполяційні функції, електродезінтеграція, тринуклонні системи.

PACS number(s): 25.10.+s, 25.30.Dh

У цій статті зроблено розрахунок диференціального перерізу реакції ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$ з використанням хвильової функції системи протон–дейтрон фаддеєвського типу, яку побудовано на основі методу K -гармонік у наближенні основної гармоніки. Ця функція й функції основного стану ядра ${}^3\text{He}$ є ортогональними.

Електродезінтеграцію ядра ${}^3\text{He}$ на протон і дейтрон як експериментально, так і теоретично досліджували раніше в низці праць [1–7]. Зокрема в [3] експерименти на збіг [1, 2] було описано з використанням хвильових функцій, задіяних у процесі ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$ тринуклонних систем, розрахованих за методом K -гармонік [8], виходячи із заданих NN-потенціалів взаємодії, а в праці [4] ці ж експерименти описано ядерними хвильовими функціями, знайденими з рівнянь Фаддеєва [9] із сепарабельними NN-потенціалами. Розрахунки хвильових функцій і перерізів у статтях [3, 4] відрізняються великою складністю і трудомісткістю і, незважаючи на чималі невизначеності та похибки в експерименті [1, 2], не дали змоги до кінця досить добре його описати.

У цій статті для знаходження тринуклонних хвильових функцій неперервного спектра енергій ми пропонуємо новий наближений метод розрахунку ядерних хвильових функцій і перерізу процесу ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$, який характеризується простотою й оснований на використанні низки властивостей точних рівнянь Фаддеєва [9, 10] та гіперсферичних функцій [8, 10]. Метод дає змогу уникнути громіздких числових розрахунків, як у [3, 4], і отримати (навіть при врахуванні лише однієї основної K -гармоніки ($K=0$)) приблизно таке ж узгодження з експериментом [1, 2], як і в праці [3], де було зроблено розклад за гіперсферичними функціями, а також і в статті [4], де використано рівняння Фаддеєва.

Відлік радіус-векторів трьох нуклонів \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 і \mathbf{r}_3 робимо від центра інерції тринуклоної системи ($\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0$) і вводимо ще два відносні радіус-вектори $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$ та $\boldsymbol{\rho}_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2} = \frac{3}{2}\mathbf{r}_1$, а також глобальну (колективну) змінну $\rho = (\frac{1}{2}\mathbf{r}^2 + \frac{2}{3}\boldsymbol{\rho}_1^2)^{1/2}$. У цих змінних хвильову функцію ядра в мінімальному K -гармонічному наближенні ($K=0$) обираємо у вигляді

модельної функції, що має правильну асимптотику на великих відстанях між нуклонами [10]:

$$\Psi_0 \equiv \Psi_0(\rho) = \frac{\sqrt{2\gamma}}{3^{3/4}\pi^{3/2}} \frac{e^{-\gamma\rho}}{\rho^{5/2}},$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2ME_0}}{\hbar},$$

$$3^{3/2}\pi^3 \int_0^\infty d\rho \rho^5 \Psi_0^2(\rho) = 1, \quad (1)$$

де M — маса нуклона, $E_0 \approx 7.7$ MeV — енергія зв'язку ядра ${}^3\text{He}$.

Хвильову функцію φ_1 такого кінцевого стану, у якому лише два нуклони є зв'язаними, записуємо, згідно з рівнянням Фаддеєва, як суперпозицію двох доданків

$$\varphi_1 = e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\boldsymbol{\rho}_1} \varphi_0(r) + f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_1), \quad (2)$$

де перший у правій частині рівності (2) — це асимптотична хвильова функція, яку подано як добуток внутрішньої хвильової функції дейтрона $\varphi_0(r)$ і хвильової функції відносного руху дейтрона і 1-го нуклона (протона), що не взаємодіють, з відносним імпульсом \mathbf{p} , а другий доданок $f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_1)$ є складною за структурою частиною функції (2), що залежить від взаємодії всіх трьох нуклонів і містить двочастинкові оператори переходів [9, 10].

Проте другий доданок $f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_1)$ у (2) має, на відміну від першого у (2), одну визначну властивість: функцію $f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_1)$ можна розкласти у швидкозбіжний ряд за гіперсферичними функціями, і ми надалі використаємо цю властивість, залишаючи у вказаному ряді тільки один перший незникаючий доданок (з $K=0$). Але значно простіший перший доданок у (2), який не можна розкласти у швидкозбіжний ряд за K -гармоніками, а саме $e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\boldsymbol{\rho}_1} \varphi_0(r)$, ми залишаємо у (2) без змін. Оскільки доданок $f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_1)$ залежатиме у нашому наближенні ($K=0$) тільки від ρ і для бли-

зкосяжних NN -потенціалів швидко зменшується зі збільшенням ρ , то в цьому випадку цей доданок буде пропорційним хвильовій функції зв'язаного стану (1), що відповідає відомій ядерній інтерполяційній моделі [3, 10–12].

Отже, функцію $f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_1)$ у використаному наближенні можна подати як добуток функції (1) і множника $C(p)$, який вже не залежний від просторових координат, але залежний від величини відносного імпульсу p . Таким чином, кінцева хвильова функція фаддєєвського типу φ_1^0 набирає в нашому наближенні такого простого вигляду:

$$\varphi_1^0 = \varphi_0(r) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \boldsymbol{\rho}_1} + C(p) \Psi_0(\rho). \quad (3)$$

Коефіцієнт $C(p)$ ми знайдемо з умови ортогональності хвильових функцій (3) та (1) ($r = \sqrt{2} \rho \cos \theta$, $\rho_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \rho \sin \theta$)

$$\int d\mathbf{r} \int d\boldsymbol{\rho}_1 \varphi_1^0 \Psi_0 \equiv 3^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty d\rho \rho^5 \Psi_0(\rho) \int d\Omega_5 \varphi_1^0 = 0,$$

де $d\Omega_5 = \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta d\Omega_r d\Omega_{\rho_1}$, звідки отримуємо:

$$C(p) = -16\pi^2 3^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty d\rho \rho^5 \Psi_0(\rho) \quad (4)$$

$$\times \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \varphi_0(\sqrt{2}\rho \cos \theta) j_0 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} p \rho \sin \theta \right).$$

При розрахунках використано просту дейтронну хвильову функцію, яка має правильну асимптотичну поведінку на нескінченності:

$$\varphi_0(r) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{M\varepsilon_0}}{\hbar}, \quad \varepsilon_0 \approx 2.23 \text{ MeV}.$$

Для зручності в подальшому будемо використовувати систему одиниць, де $\hbar = c = 1$.

Диференціальний переріз на збіг σ двочастинково-го електророзщеплення ядра ${}^3\text{He}$ для компланарної кінематики (геометрії) експерименту [1, 2], де імпульси ультрарелятивістського розсіяного електрона k_f та звільненого протона (і дейтрона) лежать в одній площині з імпульсом k_i електрона, що падає, і по різні бoki від нього, в лабораторній системі відліку, де ядро ${}^3\text{He}$ не рухається, можна записати в порівняно простому вигляді. У перерізі σ ми врахували лише один доданок, який дає визначальний внесок у ділянці максимуму перерізу як функції кута вильоту протона θ_p [7]. Усереднений за напрямками спінів електрона, що падає, та ядра ${}^3\text{He}$ і просумований за проєкціями спінів усіх кінцевих частинок, цей переріз матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma \equiv \frac{d^5\sigma}{dk_f d\Omega_f d\Omega_p} &= \frac{M}{3(2\pi)^3} \sigma_0(\theta_f) \frac{(Q + \sqrt{Q^2 + 9p^2 - q^2})^2}{\sqrt{Q^2 + 9p^2 - q^2}} \left\{ \left[F_1 - (F_1 + 2\kappa F_2) \frac{q^2 - \omega^2}{8M^2} \right]^2 \right. \\ &\left. + (F_1 + \kappa F_2)^2 \frac{q^2}{2M^2} \left(\tan^2 \frac{\theta_f}{2} + \frac{1}{2} \right) \right\} |\langle \varphi_1 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_1} | \Psi_0 \rangle|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $d\Omega_f$ і $d\Omega_p$ є елементами тілесних кутів, у яких лежать імпульси розсіяного електрона та вибитого протона, θ_f – кут розсіяння електрона, $\sigma_0(\theta_f)$ – переріз Мотта з урахуванням відруху [7], $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ та $\omega = k_i - k_f$ – передані імпульс та енергія, $Q = k_i \cos \theta_p - k_f \cos(\theta_f + \theta_p)$, F_1 та F_2 – протонні формфактори Дірака та Паулі, $\kappa \approx 1.79$ – аномальний магнетний момент протона у ядерних магнетонах. При розрахунках залежність протонних формфакторів від переданого імпульсу обрано у вигляді $F_1 = F_2 = \left(1 + \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{12}\right)^{-2}$, де $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.8 \text{ Фм}$.

Матричний елемент переходу, що входить до формули (6), можна в наших позначеннях приблизно подати так:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_1} | \Psi_0 \rangle &\equiv \int d\mathbf{r} \int d\boldsymbol{\rho}_1 \varphi_1^* e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_1} \Psi_0 \cong 16\pi^2 3^{3/2} \int_0^\infty d\rho \rho^4 \Psi_0(\rho) \left[\left| \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{q} - \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{p} \right|^{-1} \right. \\ &\left. \times \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \varphi_0(\sqrt{2}\rho \cos \theta) \sin \left(\left| \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{q} - \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{p} \right| \rho \sin \theta \right) + \frac{C(p)}{\sqrt{\frac{2}{3}} q} \Psi_0(\rho) \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \sin \left(\sqrt{\frac{2}{3}} q \rho \sin \theta \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Відзначимо, що

$$q\mathbf{p} = \frac{1}{3} \left(Q^2 - q^2 + Q\sqrt{Q^2 + 9p^2 - q^2} \right).$$

Експеримент [1, 2] проводили для енергій електронів $k_i=550$ MeV, $k_f=443$ MeV і кута їхнього розсіяння $\theta_f = 51.7^\circ$. При цьому $p = 1.463$ Фм⁻¹ і $C(p) = -1.2424$ Фм^{3/2}. Значення відносної кінетичної енергії руху незв'язаних протона та дейтрона в ділянці максимуму перерізу буде меншим, ніж 100 MeV (у самому максимумі ≈ 60 MeV) і тому конче потрібно враховувати взаємодію продуктів реакції в кінцевому стані.

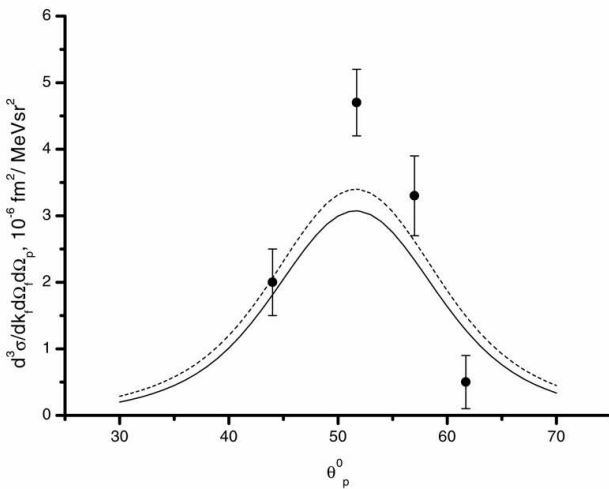


Рис. 1.

Розраховану залежність перерізу (6), (7) від кута вильоту протона для вказаних кінематичних даних подано на рисунку. На ньому ж нанесено експериментальні значення перерізу з похибками з праці [1], але в інтерпретації авторів статті [2], де було ретельніше оброблено дані праці [1]. Суцільна крива відповідає розрахункам із хвильовою функцією фаддеевського типу (3), а штрихова — плоскохвильовому наближенню, коли другий доданок у формулі (3) із множителем $C(p)$ не взято до уваги.

У самому максимумі переріз σ для $\theta_p \approx 52^\circ$ при врахуванні взаємодії в кінцевому стані (суцільна крива) приблизно дорівнює значенню $3.1 \cdot 10^{-6}$ Фм²/MeV·ср², а у плоскохвильовому наближенні (штрихова крива) — значенню $3.4 \cdot 10^{-6}$ Фм²/MeV·ср². Це тільки на декілька відсотків менше від відповідних максимальних значень перерізів у працях [3, 4], де при розрахунках використано точніші хвильові функції. Наші “дзвоноподібні” криві мають, крім того, дещо збільшені ширини в порівнянні зі ширинами максимумів у [3, 4]. Значення кута $\theta_p = 52^\circ$ у максимумі перерізу відповідає приблизно такому ж напрямку імпульсу вибитого протона, що й напрямком переданого імпульсу \mathbf{q} .

Відзначимо, що запропоновану в цій статті наближену хвильову функцію системи протон–дейтрон (3), що враховує взаємодію між незв'язаними протоном і дейтроном і є близькою до розв'язку рівняння Фаддеева, можна використати в багатьох інших фізичних задачах, де є подібні системи. Власне кажучи, розрахунок можна уточнити, якщо в розкладах хвильових функцій тринуклонних систем урахувати наступні члени з гіперсферичними функціями після гармоніки з $K = 0$.

[1] A. Johansson, Phys. Rev. B **136**, 1030 (1964).
 [2] B. F. Gibson, G. V. West, Nucl. Phys. B **1**, 349 (1967).
 [3] В. К. Тартаковський, Яд. физ. **20**, 46 (1974).
 [4] C. R. Heimbach, D. R. Lehman, J. S. O'Connell, Phys. Lett. B **66**, 1 (1977).
 [5] В. А. Гольдштейн, Э. Л. Купленников, Е. М. Мальярж и др., Укр. физ. журн. **24**, 1835 (1979).
 [6] I. V. Kozlovsky, V. A. Goldshtein, E. L. Kuplennikov et al., Nucl. Phys. A **368**, 493 (1981).

[7] А. И. Ахиезер, А. Г. Ситенко, В. К. Тартаковский, *Электродинамика ядер* (Наукова думка, Киев, 1989).
 [8] Ю. А. Симонов, Яд. физ. **3**, 630 (1966).
 [9] Л. Д. Фаддеев, Журн. эксп. теор. физ. **39**, 1459 (1960).
 [10] О. Г. Ситенко, В. К. Тартаковський, *Теорія ядра* (Либідь, Київ, 2000).
 [11] А. И. Базь, препринт ИТФ-71-79Р (Киев, 1971).
 [12] А. И. Базь, М. В. Жуков, Яд. физ. **6**, 60 (1972).

THE CALCULATION OF THE ${}^3\text{He}(e, e'){}^2\text{H}$ PROCESS WITH THE WAVE FUNCTIONS OF FADDEEV'S TYPE

V. K. Tartakovsky, O. M. Malyarzh, O. A. Lynnik
 Taras Shevchenko Kyiv University, Department of Physics,
 6 Glushkov Prospect, Kyiv, UA-03022, Ukraine

The method of the construction the three-nucleon wave functions proton-deuteron system with using Faddeev equations and hyperspherical functions is proposed for calculation of the ${}^3\text{He}(e, e'){}^2\text{H}$ process cross-section.