

СТОХАСТИЧНИЙ РЕЗОНАНС І ПАРАМЕТРИЧНЕ ПІДСИЛЕННЯ

В. В. Григоренко, Л. А. Синицький

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Тарнавського, 107, Львів, 79017, Україна

(Отримано 29 жовтня 2003 р.; в остаточному вигляді — 7 жовтня 2004 р.)

Подано результати порівняння стохастичного резонансу й параметричного підсилення для загальної моделі $\frac{dx}{dt} - x + x^3 = a \sin \nu t + \xi(t)$. Показано, що застосування коефіцієнта підсилення за потужністю, який визначається як відношення потужностей вихідного сигналу електричного кола з нелінійним опором до вхідного, дає змогу отримати корисну інформацію про властивості стохастичного резонансу.

Ключові слова: стохастичний резонанс, параметричне підсилення.

PACS number(s): 05.40.+j, 02.50.+s

Стохастичний резонанс протягом останніх двадцяти років привертає увагу як фізиків, так і спеціалістів у галузі радіоелектроніки. Це явище полягає в тому, що при дії на нелінійну систему корисного сигналу (в найпростішому випадку — гармонічного) і шуму спостерігається збільшення співвідношення сигнал/шум на виході системи зі зростанням у певних межах рівня вхідного шуму. Є декілька докладних оглядів [1–4] численних праць про стохастичний резонанс. Багато авторів досліджують це явище, розглядаючи нелінійну систему з узагальненою структурою, що зображена на рис. 1.



Рис. 1. Узагальнена схема для дослідження стохастичного резонансу.

На вхід такої системи діють корисний сигнал $f(t)$ і шум $\xi(t)$. Результат оцінюють за вихідним сигналом $y(t)$.

Походження стохастичного резонансу, залежно від структури нелінійного перетворювача, може бути зовсім різним. Так, при безреактивному (безінерційному) нелінійному перетворювачі це явище, як це неодноразово відзначалося в літературі [4], зумовлено зміщенням “робочої точки” на нелінійному елементі. На відміну від більшості радіотехнічних пристроїв, це зміщення здійснюється не постійною напругою, а шумовим сигналом. Таке ж пояснення стохастичного резонансу можливе й у динамічних нелінійних перетворювачах, які мають єдиний стан рівноваги або єдиний періодичний режим при періодичному зовнішньому збудженні. Якщо є декілька станів рівноваги для нелінійного перетворювача, а також нелінійні реактивні елементи, видається корисним дослідження

аналогії між стохастичним резонансом і параметричним підсиленням [5] при збудженні детермінованим періодичним сигналом.

Найпоширенішою моделлю нелінійної системи, на якій досліджується явище стохастичного резонансу, є спрощене рівняння руху броунівської частинки у в'язкому середовищі із симетричним бістабільним потенціалом типу $U(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ під дією невеликого гармонічного збурення. Спрощення полягає у відкиданні в рівнянні руху члена з другою похідною при граничному переході до моделі невагомої частинки. Таке спрощене рівняння має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} - x + x^3 = F(t);$$
$$F(t) = a \cdot \sin(\nu t + \alpha) + \xi(t). \quad (1)$$

Аналогом цієї моделі є коливальний контур з нелінійною ємністю, який збуджується джерелами напруги $f(t)$ і $a \cdot \sin(\nu t + \alpha)$. У цьому випадку рівняння спрощується відкиданням другої похідної при малій індуктивності контуру.

Іншою моделлю, яку можна описати рівнянням (1), є електричне коло з послідовно з'єднаними індуктивністю, нелінійним опором із вольт-амперною характеристикою S-типу та джерелами напруги.

Для кількісної характеристики стохастичного резонансу використовують такі параметри, як коефіцієнт підсилення за потужністю (КПП) й співвідношення сигнал/шум на виході. Визначення цих характеристик під час розгляду узагальненої блок-схеми (рис. 1) не викликає проблем. Однак при переході до рівняння (1) виникають деякі особливості в інтерпретації результатів, зокрема, яку величину вважати вихідним сигналом $y(t)$. Найчастіше приймають $y(t) = x(t)$, а КПП визначають як $\frac{A_1^2}{a^2}$, де A_1 — амплітуда першої гармоніки у спектрі $x(t)$. Таке трактування має певні недоліки, оскільки фізичний зміст цього співвідношення не є відношенням потужностей. Тому метою нашого дослідження є розгляд енергетичних співвід-

ношень при стохастичному резонансі та розгляд його кількісних характеристик у традиційному значенні потужностей.

Цікавим є й інше питання при вивченні явища стохастичного резонансу — чи має стохастичне збудження переваги або особливості щодо детермінованого, інакше кажучи, чи відіграє якусь особливу роль саме випадковий характер сигналу збудження. Тому нижче також аналізуємо роботу системи (1) у випадку, коли сигнал $\xi(t)$ є звичайним гармонічним.

Розгляньмо систему (1) з енергетичного боку. Для цього домножмо це рівняння на $\frac{dx}{dt}$:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{d}{dt}(U) = F(t) \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (2)$$

У лівій частині одержаного виразу є сума миттєвих потужностей сили тертя й сили, пов'язаної з потенціалом $U(t)$, у правій — потужність зовнішньої сили. Очевидно, що в періодичному режимі середнє значення потужності $\frac{dU}{dt}$ є нульовим. Отже, уся енергія, що поступає в систему від зовнішньої сили, витрачається на тертя. Таким чином, у такій механічній системі не можна говорити про підсилення потужності. Зрозуміло, що цей факт не порушується і при врахуванні другої похідної, тобто для рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} - x + x^3 = F(t).$$

Аналогічна ситуація буде і в коливальному контурі з нелінійною ємністю. Однак в електричному колі з нелінійним опором картина буде іншою.

Розгляньмо коло, схема якого зображена на рис. 2.

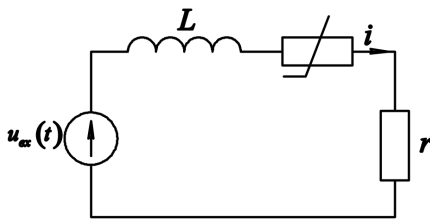


Рис. 2. Схема з нелінійним опором; $u_{\text{вх}}(t) = a \cdot \sin(\nu t + \alpha) + \xi(t)$.

У цю схему включено нелінійний опір, вольтамперну характеристику якого запишемо у вигляді:

$$u(i) = -R \cdot i + u_0 \left(\frac{i}{i_0}\right)^3,$$

де напруга й струм відраховуються від стану рівноваги (U_0, I_0) на спадній ділянці $u = U - U_0, i = I - I_0$ (рис. 3).

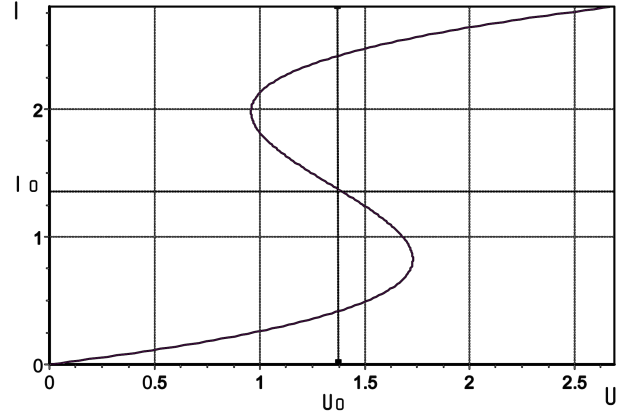


Рис. 3. Вольтамперна характеристика нелінійного опору.

Ця характеристика має назву S-подібної, або керованої струмом. Для спостереження в схемі рис. 2 стохастичного резонансу необхідно, щоб опір навантаження був меншим за абсолютне значення диференційного опору на спадній ділянці, тобто $R - r > 0$. Рівняння кола запишемо так:

$$L \frac{di}{dt} - (R - r) \cdot i + u_0 \left(\frac{i}{i_0}\right)^3 = u(t)_{\text{вх}}. \quad (3)$$

Перейдімо до безрозмірних змінних:

$$\begin{aligned} t' &= t \cdot \frac{R - r}{L}; \\ x(t') &= i(t') \cdot \beta; \\ F(t') &= \frac{u_{\text{вх}}(t') \cdot \beta}{R - r}; \\ \beta &= \sqrt{\frac{u_0}{i_0^3 (R - r)}}. \end{aligned} \quad (4)$$

За такої заміни змінних рівняння (3) набуває вигляду (1). Надалі для зручності знак “штрих” у позначенні часу опускаємо.

У цьому колі вхідною потужністю буде $u_{\text{вх}}(t) \cdot i(t)$, а вихідною — потужністю, що розсіюється на постійному опорі: $r \cdot i^2$. Причому, на відміну від механічної системи (2) або контуру з нелінійною ємністю, тут вхідна потужність не дорівнюватиме вихідній. У цьому легко переконатись, домноживши рівняння (3) на $i(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \frac{d(i^2)}{dt} + \left[-R \times i + u_0 \left(\frac{i}{i_0}\right)^3 \right] \\ \times i + r \times i^2 = u_{\text{вх}}(t) \times i. \end{aligned} \quad (5)$$

Перший член у співвідношенні (5) — це миттєва потужність на індуктивності, її середнє значення нульове. Другий член — це потужність на нелінійному опорі, її значення залежатиме від режиму роботи системи й не обов'язково буде додатним.

Отже, в електричному колі з нелінійним опором можна розглядати КПП як відношення усереднених значень вихідної потужності $r \cdot i^2$ до вхідної $u_{\text{вх}}(t) \cdot i(t)$. Через безрозмірні змінні (4) ці потужності запишуться як:

$$\begin{aligned} P_{\text{вх}} &= u_{\text{вх}}(t) \cdot i(t) = \frac{R-r}{\beta^2} \cdot x(t) \cdot F(t); \\ P_{\text{вих}} &= r \cdot i^2 = \frac{r}{\beta^2} \cdot x^2; \\ \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}} &= \frac{r}{R-r} \cdot \frac{x^2}{F \cdot x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Зробімо аналітичні оцінки вхідної та вихідної потужностей і порівняймо одержані дані з результатами числового моделювання рівняння (1). Спершу проаналізуємо спрощений випадок, коли на вхід системи діє тільки один гармонічний сигнал $F(t) = a \cdot \sin(\nu t + \alpha)$. Розглянемо дві можливі ситуації, коли розв'язок не має постійної складової (симетричний режим) і коли вона наявна (несиметричний режим). У першій наближений розв'язок (1) шукатимемо у вигляді

$$x(t) = A_1 \sin(\nu t). \quad (7)$$

Застосувавши метод гармонічного балансу і відкинувши члени з вищими гармоніками, отримуємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A_1 і ν :

$$\begin{aligned} A_1 \left(-1 + \frac{3}{4} A_1^2 \right) &= a \cos \alpha; \\ A_1 \nu &= a \sin \alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Для несиметричного режиму наближений розв'язок буде таким:

$$x(t) = A_0 + A_1 \sin(\nu t). \quad (9)$$

Метод гармонічного балансу для (9) дає таку систему рівнянь стосовно коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} A_0^2 &= 1 - \frac{3}{2} A_1^2; \\ A_1 \left(-1 + 3A_0^2 + \frac{3}{4} A_1^2 \right) &= a \cos \alpha; \\ A_1 \nu &= a \sin \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Із першого співвідношення в (10) видно, що тільки при $A_1^2 \leq \frac{2}{3}$ існують дійсні розв'язки для A_0 , отже, при $A_1^2 \geq \frac{2}{3}$ система (10) втрачає сенс й буде тільки розв'язок (7), тобто симетричний режим. Таким чином, при $A_1^2 < \frac{2}{3}$ спостерігатиметься несиметричний режим, при $A_1^2 \geq \frac{2}{3}$ — симетричний. Цей висновок підтверджується також аналізом стійкості в малому лінеаризованого в околі розв'язків (7) і (9) рівняння (1). Можна показати, що умови стійкості для несиметричного (симетричного) режимів у малому визначаються нерівністю $A_1^2 < 2/3$ ($A_1^2 > 2/3$).

Щоб оцінити амплітуду першої гармоніки в (9), виключимо з рівнянь (10) A_0 , а решту рівнянь піднесемо до квадрата й додамо. Одержимо

$$\frac{225}{16} z^3 - 15z^2 + (4 + \nu^2) z = a^2, \quad \text{де } z = A_1^2.$$

Для кута α маємо співвідношення

$$\text{tg } \alpha = \frac{\nu}{2 - \frac{15}{4} A_1^2}. \quad (11)$$

Для симетричного режиму при $A_1^2 \geq \frac{2}{3}$ з рівнянь (8) отримуємо рівняння для визначення A_1 і α :

$$\frac{9}{16} z^3 - \frac{3}{2} z^2 + (1 + \nu^2) z = a^2; \quad (12)$$

$$\text{tg } \alpha = -\frac{\nu}{1 - \frac{3}{4} A_1^2}. \quad (13)$$

КПП у цьому випадку дорівнює, згідно з (6),

$$\eta = \frac{r}{R-r} \times \frac{A_1}{a} \cos \alpha.$$

Якщо $\cos \alpha < 0$, то енергія джерела постійної напруги, яке виводить нелінійний резистор на ділянку з від'ємним опором, передається не тільки на вихід, але й на вхід. Тому в цій ситуації КПП може необмежено зростати. Із формул (11) і (13), відповідно для несиметричного та симетричного режимів, одержимо умови, за яких КПП втрачає зміст, тобто енергія на виході не зумовлена відбиранням її від корисного сигналу: $\alpha > \frac{\pi}{2}$ при $\frac{8}{15} < A_1^2 < \frac{2}{3}$ та $\frac{2}{3} \leq A_1^2 < \frac{4}{3}$. Отже, в околиці точки біфуркації, де несиметричний режим плавно переходить до симетричного, КПП системи необмежено зростає. За межами цього відрізка η має скінченне значення, яке поступово спадає при $A_1 < 0.73$ та $A_1 > 1.15$.

Визначимо залежність амплітуди вхідного сигналу ($a_{\text{гр}}$), при якій відбувається перехід від несиметричного до симетричного режиму, від частоти. Для цього у (12) підставимо $z = A_1^2 = \frac{2}{3}$. Отримаємо

$$a_{\text{гр}}^2 = \frac{1}{6} (1 + 4\nu^2). \quad (14)$$

Таку залежність зручно пояснити моделлю, у якій вхідний сигнал проходить через аперіодичну ланку першого порядку із частотною характеристикою

$$K(j\nu) = \frac{1}{\nu_0 + j\nu}, \quad (15)$$

де $\nu_0 = 0,5$ — частота зрізу. Така модель не пояснює всіх частотних залежностей у досліджуваній системі, а лише дає змогу знайти ділянку максимального підсилення при дії на вхід системи сигналів з різними частотами й амплітудами.

Зауважимо, що метод гармонічного балансу дає вірогідні результати при $\nu = O(1)$, тому що в цьому разі вищі гармоніки принаймні на порядок менші від першої, але оцінка граничного значення амплітуди вхідного сигналу за формулою (14) добре збігається з результатами чисельного моделювання рівняння (1) в широкій смузі частот (таблиця 1).

ν	$a_{\text{гр}}$ (формула (14))	$a_{\text{гр}}$ (експеримент)
0.01	0.408	0.388
0.05	0.410	0.402
0.1	0.416	0.420
0.5	0.577	0.603
1.0	0.913	0.931
5.0	4.10	4.11

Таблиця 1. Порівняння оцінок граничного значення амплітуди вхідного сигналу з результатами чисельного експерименту.

Як видно з наведеної таблиці, похибка оцінки навіть на низьких частотах не перевищує 5%.

Порівняймо одержані результати з випадком, коли на вхід системи діє тільки випадковий сигнал $\xi(t)$, який будемо вважати білим гауссівським шумом зі спектральною густиною $2D$. Тоді для рівняння (1) можна записати відповідне йому рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) стосовно густини ймовірності $P(x, t)$:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} [(x^3 - x) P(x, t)]. \quad (16)$$

У встановленому режимі, $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$, рівняння (16) перетворюється у звичайне диференціальне рівняння щодо $P(x)$:

$$\frac{dP}{dx} + \frac{1}{D} (x^3 - x) P = c_1. \quad (17)$$

Очевидно, що $c_1 = 0$, оскільки це необхідно для виконання умови $\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x) = 0$. Розв’язок рівняння (17) можна знайти аналітично:

$$P(x) = c_2 \cdot e^{-\frac{x^4 - 2x^2}{4D}},$$

де стала c_2 визначається з умови нормування $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1$.

Оцінімо усереднену за проміжок часу T потужність, яку віддає джерело випадкового сигналу в схемі. Домножмо рівняння (1) на $\frac{R-r}{\beta^2} \cdot x(t)$ і використаємо вираз для вхідної потужності з (6):

$$\bar{P}_{\text{вх}} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{\text{вх}} dt = \frac{R-r}{\beta^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \left(x \frac{dx}{dt} - x^2 + x^4 \right) dt$$

або

$$\bar{P}_{\text{вх}} = \frac{R-r}{\beta^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d(x^2)}{dt} dt + \frac{R-r}{\beta^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T (-x^2 + x^4) dt.$$

Очевидно, що $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [x^2(T) - x^2(0)] = 0$, тому перший член в останньому співвідношенні можна відкинути. Перейдімо від усереднення за часом до усереднення за ансамблем. Тоді

$$P_{\text{вх}} = \frac{R-r}{\beta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (-x^2 + x^4) P(x) dx.$$

Підставивши сюди вираз для $P(x)$ з (17), шляхом інтегрування за частинами одержуємо

$$P_{\text{вх}} = \frac{R-r}{\beta^2} \cdot D \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = D \cdot \frac{R-r}{\beta^2}.$$

Отже, середня потужність, що відбирається від джерела шуму, завжди позитивна, і не спостерігається передача енергії цьому джерелу при жодних значеннях спектральної потужності шуму. Цей факт не є несподіваним. Під дією шуму не існує граничного переходу між симетричним і несиметричним режимами збудження. Саме на цій межі під час періодичного збудження спостерігається передача енергії від постійного джерела на збудження й корисний сигнал.

Звернімось до випадку, коли поряд із корисним сигналом діє збудження $\xi(t)$, яке спочатку вважаємо детермінованим періодичним сигналом $\xi(t) = \xi_0 \sin \omega t$. Таким чином, розглядаємо (1) як

$$\frac{dx}{dt} - x + x^3 = a \sin \nu t + \xi_0 \sin \omega t. \quad (18)$$

Енергетичні співвідношення в (18) визначали чисельним інтегруванням. Установлено, що в цьому ви-

падку також існує деякий відрізок $a_m \leq a \leq a_M$, на якому потужність сигналу $a \sin \nu t$ приймає від’ємні значення; граничні значення a_m, a_M суттєво залежать від ξ_0 . При розрахунках бралось до уваги, що $a \ll \xi_0$. Виникнення ділянки від’ємної потужності відповідає співвідношенню $a_m + \xi_0 = (\xi_0)_{кр}$, де $(\xi_0)_{кр}$ — нижня межа сигналу збудження, при якому він отримує потужність від джерела постійного зміщення за відсутності сигналу, що підсилюється. Отже, при фіксованому ξ_0 та зміні корисного сигналу від значення $a = 0$ ефект від’ємної потужності спостерігається тільки, якщо амплітуда a досягає значення a_m . За межами відрізка $[a_m, a_M]$ КПП має скінченне значення, яке поступово спадає при $a > a_M$ і $a < a_m$. В останньому випадку η дуже швидко спадає до значення, яке близьке до одиниці. Подібну картину спостерігаємо і тоді, коли використовуємо загальноприйняте у працях зі стохастичного резонансу поняття про “коефіцієнт підсилення за потужністю”, який визначається як $\eta' = \left(\frac{A_1}{a}\right)^2$. Цей коефіцієнт також досягає максимуму в околі $(\xi_0)_{кр}$, а далі швидко спадає.

На рис. 4 наведена залежність КПП від a при сталому значенні $\xi_0 = 0.485$; $\nu = 0.1$; $\omega = 0.33$; $\frac{r}{R-r} = 1$.

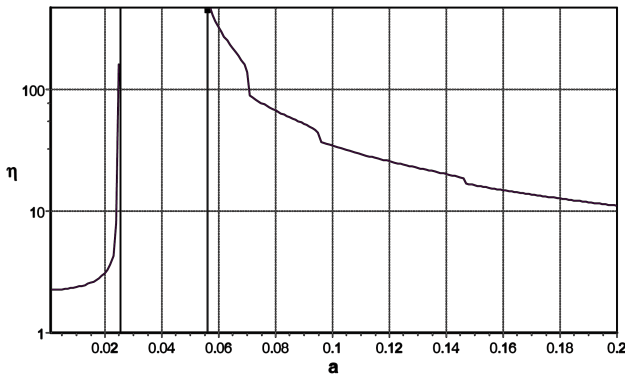


Рис. 4. Залежність коефіцієнта підсилення за потужністю від амплітуди корисного сигналу.

На ділянці $0.026 < a < 0.055$ джерелу корисного сигналу передається потужність, тому КПП втрачає зміст. На рис. 5 наведено залежність η' від a . Зрозуміло, що ця величина має скінченне значення і на ділянці, де потужність передається на корисний сигнал.

При детермінованому збудженні на відрізках параметра a , де потужність передається корисному сигналу (на відміну від випадку дії на систему одного гармонічного сигналу), ця потужність передається як від нелінійного опору, так і від сигналу збудження. Зрозуміло, що при цьому вважається, що $a \ll \xi_0$. Таким чином, наявний ефект обміну енергією між коливаннями різних частот подібний до того, що існує в нелінійних реактивних елементах (співвідношення Мен-

лі і Роу [5]). Проте в останньому випадку цей ефект визначається співвідношенням частот корисного сигналу та збудження і не залежить від їхніх амплітуд. Дослідження про обмін енергіями в нелінійних резисторах виконували в 60-х роках ХХ століття, проте останнім часом про них не згадують.

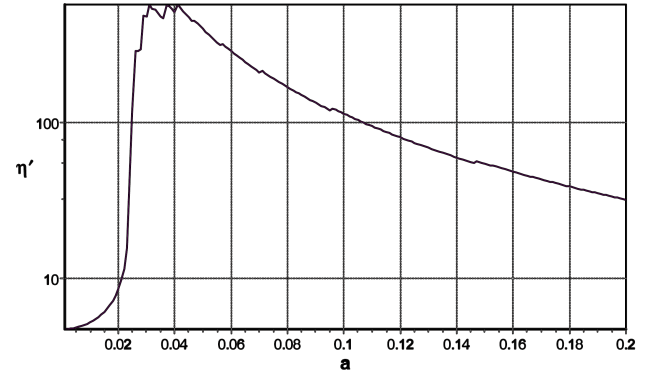


Рис. 5. Залежність $\eta' = \left(\frac{A_1}{a}\right)^2$ від амплітуди корисного сигналу.

Розгляньмо залежність КПП від частоти сигналу збудження. На рис. 6 наведено дві залежності КПП від амплітуди сигналу збудження за фіксованої амплітуди корисного сигналу ($a = 0.01$) при різних частотах сигналу збудження — $\omega = 0.33$ та $\omega = 0.66$:

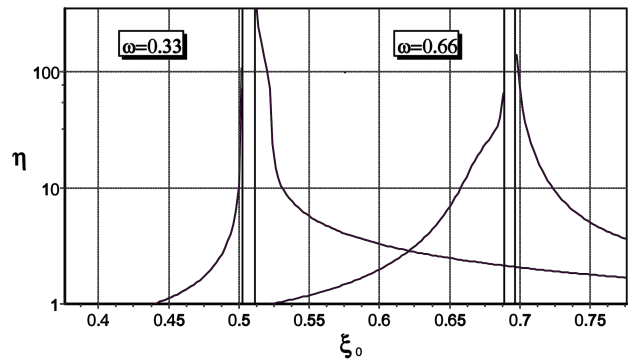


Рис. 6. Коефіцієнт підсилення за потужністю залежно від амплітуди сигналу збудження при різних частотах цього сигналу.

Із наведених залежностей видно, що максимум КПП при меншій частоті збудження досягається, якщо $\xi_0 \approx 0.505$, а при більшій частоті — якщо $\xi_0 \approx 0.693$. Ці результати добре узгоджуються із запропонованою вище моделлю, згідно з якою можна вважати, що сигнал проходить через аперіодичну ланку із частотною характеристикою (15). Справді, енергія сигналу збудження на виході аперіодичної ланки становитиме $\frac{\xi_0^2}{2} \cdot |K(j\omega)|_{\omega=0.33}^2 = 0.36$ у першому випадку

і 0.35 у другому. Отже, можна вважати, що підсилення у двох детермінованих сигналів при сталих параметрах корисного сигналу залежить тільки від енергії сигналу збудження на виході аперіодичної ланки із частотою зрізу 0.5.

Звернімося тепер до випадку, коли на вхід системи діють корисний гармонічний сигнал і білий шум. Тоді рівняння ФПК щодо густини ймовірності $P(x, t)$ матиме вигляд:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} [(x^3 - x - a \cdot \sin(\nu t + \alpha)) P(x, t)]. \quad (19)$$

Його розв'язок можна використати для одержання енергетичних співвідношень згідно з (6), якщо у відповідних місцях, замість реалізацій $x(t)$, підставити значення математичного очікування $\langle x(t) \rangle = \int x \cdot P(x, t) dx$. Рівняння ФПК (19) розв'язували чисельним інтегруванням до настання періодичного режиму.

Отримані результати чисельних експериментів показують, що збудження шумом дає набагато менше підсилення корисного сигналу, ніж збудження гармонічним сигналом. Для прикладу на рис. 7 наведено залежність КПП від рівня шуму при сталих значеннях $a = 0.1$; $\nu = 0.1$; $\frac{r}{R-r} = 1$.

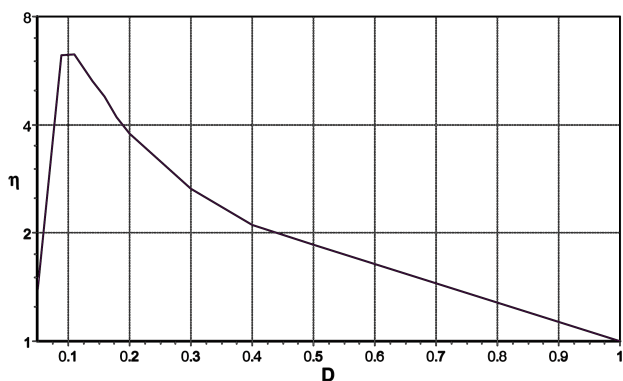


Рис. 7. Залежність коефіцієнта підсилення за потужністю від рівня шуму.

На відміну від збудження гармонічним сигналом, тут підсилення практично не залежить від рівня вхідного сигналу (в тих межах, поки амплітуда математичного очікування $\langle x(t) \rangle$ є меншою за одиницю). Так, якщо $D = 0.1$; $\nu = 0.1$; $\frac{r}{R-r} = 1$, КПП дорівнював 6.3 при амплітуді сигналу в межах до 0.1 (амплі-

туда $\langle x(t) \rangle$ тут не перевищувала 0.3) і знижувався до значення 4.1, якщо $a = 0.4$ (амплітуда $\langle x(t) \rangle = 1.1$). Тобто при збудженні шумом не спостерігаємо явища передачі енергії від нелінійного опору джерелу корисного сигналу, як під час гармонічного збудження. Крім того, порівнюючи графіки на рис. 4 та рис. 7, слід зауважити, що при шумовому збудженні досягаються набагато нижчі значення КПП, ніж при гармонічному.

Максимум КПП під дією шуму спостерігаємо при значенні спектральної густини шуму, що не повністю відповідає енергії детермінованого сигналу збудження з урахуванням дії аперіодичної ланки із частотною характеристикою (15). Справді, дисперсія шуму на виході такої ланки становитиме

$$\sigma^2 = \frac{D}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\nu)|^2 d\nu = 2D.$$

Тобто, згідно з рис. 7, максимум КПП досягається при дисперсії близько 0.2, що майже удвічі менше від енергії детермінованого сигналу, де відповідне значення становило 0.36. Але ефект з погляду значення КПП є значно меншим.

Висновки

1. Зіставлення підсилення сигналу при детермінованому періодичному збудженні і збудженні шумом показує, що вони мають спільну рису — енергія сигналу збудження в обох випадках передається на підсилюваний сигнал.

2. Традиційна модель (1), на якій вивчається стохастичний резонанс, дає дві різні фізичні інтерпретації: у першому випадку — це система (механічна або електрична), де явища зумовлені бістабільним потенціалом або нелінійними властивостями реактивного елемента (ємності). Проте та ж модель описує електричне коло з нелінійним опором, що має ділянку з від'ємним диференціальним опором. У другому випадку є можливість визначити коефіцієнт підсилення за потужністю пристрою, який може при періодичному збудженні бути необмежено великим. В околі цієї ділянки найяскравіше проявляється параметричний і стохастичний резонанси. КПП при стохастичному резонансі завжди обмежений і тому є значно меншим, ніж при параметричному.

3. Застосування КПП подекуди є раціональнішим, ніж загальноприйняте визначення КПП за рівнем зростання корисного сигналу, зумовленого дією шуму. Воно дає змогу встановити найсприятливіші значення параметрів, де стохастичний резонанс проявляється найяскравіше.

СТОХАСТИЧНИЙ РЕЗОНАНС І ПАРАМЕТРИЧНЕ ПІДСИЛЕННЯ

- [1] L. Gammationi, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, Rev. Mod. Phys. **70**, 224 (1998).
[2] В. Анищенко, А. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, Усп. физ. наук **169**, 7 (1999).
[3] D. Luchinsky, R. Manella, P. McClintock, N. Stocks, IEEE Trans. Circuits Systems, part II. **46**, 1205 (1999).
[4] F. Chapeau-Blondeau, Lecture Notes in Phys. (Springer (Berlin), 2000) p. 137.
[5] М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн* (Наука, Москва, 1984).

STOCHASTIC RESONANCE AND PARAMETRIC AMPLIFICATION

V. V. Hryhorenko, L. A. Synytsky
Ivan Franko National University of Lviv
107 gen. Tarnavsky St., Lviv, UA-79017, Ukraine

Stochastic resonance and parametric amplification are compared in a generic model $\frac{dx}{dt} - x + x^3 = a \sin \nu t + \xi(t)$. It was shown that the introduction of power amplification in agreement with input-output amplification of the power circuit with nonlinear resistance provides some useful information on the properties characteristic of stochastic resonance.