

МЕТОД ВКБ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДІРАКА З ВЕКТОРНИМ ТА СКАЛЯРНИМ ПОТЕНЦІЯЛАМИ

В. Ю. Лазур, В. В. Рубіш, О. К. Рейтій
*Ужгородський національний університет,
вул. Волошина, 54, Ужгород, 88000, Україна*
(Отримано 30 червня 2004 р.)

Розвинуто послідовну схему методу ВКБ для рівняння Дірака в центральній-симетричному полі зі скалярно-векторним варіантом взаємодії. Знайдено вигляд релятивістських хвильових функцій у класично дозволених і заборонених ділянках та умови їх зшивання при переході через точки повороту. Як застосування розвинутого методу одержано релятивістський аналог умови квантування Бора–Зоммерфельда, що містить спіно-орбітальну взаємодію в суміші скалярного $S(r)$ та векторного $V(r)$ потенціалів, та релятивістське узагальнення формули Гамова для ширини квазістаціонарного рівня для частинки спіну $1/2$, що взаємодіє зі скалярним та векторним полями одночасно. Показано, що для кулонівського та осциляторного потенціалів зі змішаною лоренц-структурою отримане правило квантування точно відтворює енергетичний спектр.

Ключові слова: рівняння Дірака, метод ВКБ, ефективний потенціал, умова квантування, ширина рівня, потенціальні моделі.

PACS number(s): 03.65.Ge, 03.65.Pm, 03.65.Sq

I. ВСТУП

Релятивістські водневоподібні (ВП) атоми та їх КХД аналоги — важко-легкі кварк-антикваркові ($Q\bar{q}$) системи — ідеальні об'єкти для досліджень, які дають змогу піддавати результати квантової теорії дуже точній експериментальній перевірці. Особливу роль у розвитку релятивістської теорії зв'язаних станів відіграє рівняння Дірака. З нього випливає наявність спіну та спінового моменту у фундаментальних ферміонів і безпосередньо виникають задачі про тонку й надтонку структури енергій ВП-атомів та $Q\bar{q}$ -систем. Рівняння Дірака з радіаційними поправками [1, 2], яке запропонував Швінгер, дозволяє враховувати багаторазову взаємодію частинки з власним і зовнішнім полями.

Чільне місце в сучасному розвитку релятивістської теорії зв'язаних станів посідає метод ефективного рівняння Дірака. У ньому можливий послідовний перехід від двочастинкової теорії до наближення зовнішнього поля [3]. Як випливає з результатів праць [3, 4], така можливість реалізується й має практичні переваги у випадку ВП-атомів та $Q\bar{q}$ -систем. Проте в більшості задач [4], у яких фізично виправданою є концепція зовнішнього поля, спроби знайти точні розв'язки рівняння Дірака з більш-менш реалістичним потенціалом взаємодії наштовхуються на непереборні поки що труднощі. Для знаходження розв'язків найчастіше застосовують або числові, або асимптотичні методи. У багатьох теоретичних та прикладних питаннях саме можливість отримати асимптотичний розв'язок дає змогу провести найповніший аналіз задачі. Тому навряд чи потрібно докладно пояснювати важливість створення й удосконалення асимптотичних методів розв'язування рівняння Дірака.

Квазікласичне наближення Вентцеля–Крамерса–Бріллюена (або ВКБ-метод) є одним з основних і найуніверсальніших асимптотичних методів розв'язування задач квантової механіки та математичної фізики (див., наприклад, [5–9]), для яких або невідомі, або надто громіздкі точні розв'язки. На відміну від теорії збурень це наближення не пов'язане з малістю взаємодії і тому має ширшу сферу застосовності, даючи змогу досліджувати якісні закономірності в поведінці та властивостях квантовомеханічних систем. Зокрема стандартний ВКБ-метод [5–9] (для рівняння Шредингера) успішно використовували для атома водню в постійних електричному та магнетному зовнішніх полях (див., наприклад, [5, 10–14] та наведені там поклики), для ряду модельних потенціалів [15], у квантовомеханічній задачі двох кулонівських центрів [16–18] та ін. Обговорення сучасного стану цього методу, різних його варіантів та застосувань у нерелятивістській теорії атомів і молекул, квантовій хемії, у задачах теорії зіткнень тощо можна знайти в [19, 20].

Успішне використання ВКБ-наближення до різних задач нерелятивістської фізики стимулювало поширення цього методу й на релятивістські системи, що описуються рівнянням Дірака. Теорію квазікласичного наближення для рівняння Дірака в сильному ($E_0 > 2mc^2$, де E_0 — енергія зв'язку електрона) зовнішньому полі почали систематично розробляти в тісному зв'язку з проблемою глибоких рівнів [21–27], яка має фундаментальне значення для квантової електродинаміки (критичний заряд ядра Z_c та спонтанне народження позитронів із вакууму при $Z > Z_c$, див. [28–31]). Застосування методу ВКБ до релятивістської кулонівської задачі із зарядом $Z > 137$ ґрунтувалося в ранніх працях [21–27] на квадрованні рівняння Дірака (метод ефективного потенціалу [28, 29]). Такий

підхід добре працює в докритичній ділянці $Z \leq Z_c$, $E_0 \geq -mc^2$. Однак для станів з енергією $E < -mc^2$ підстановка $\chi(r) = (mc^2 + E - V)^{-1/2} F(r)$ стає сингулярною в точці $r = r_g$, де $V(r_g) = mc^2 + E$ (розглядається потенціал притягання: $V(r) < 0$, $0 < r < \infty$). Унаслідок цього стандартні квазікласичні формули [5–9] втрачають зміст поблизу точки $r = r_g$ через розбіжність фазових інтегралів. Різні автори [21–27] додали цю трудність по-різному, інколи вельми дотепно [23, 27], але до кінця її вдалося розв’язати тільки в працях [32, 33]. Виявилось, що сингулярність при $r = r_g$ взагалі не виникає, якщо застосовувати ВКБ-наближення не до рівняння другого порядку для $\chi(r)$, а безпосередньо до вихідної системи Дірака для радіальних хвильових функцій F та G . Отримані на цьому шляху квазікласичні формули для розв’язків рівняння Дірака в сильному зовнішньому полі мають численні застосування в теорії важких та надважких атомів [34]. Проте останнім часом виникло значне зацікавлення іншими подібними системами: моделями змішаних мезонів, що складаються з одного важкого та одного легкого кварка (антикварка) ($Q\bar{q}$ -мезони) [35–37]. Досліджуючи властивості таких систем у межах складових кваркових моделей, автори багатьох праць (див., наприклад, [35–38] та зазначені там поклики) намагаються добути важливу фізичну інформацію про вигляд потенціалу міжкваркової взаємодії, порівнюючи результати теоретичних передбачень із наявними експериментальними даними стосовно спектрів мас та ширин розпадів B - та D -мезонів [39, 40]. Априорі не відомі й лоренц-трансформаційні властивості далекодійних сил (конфаймента); не відомо також, обмін якого типу (скалярний чи векторний) дає основний внесок у спін-спінову взаємодію кварків. Усе це приводить до теоретичної невизначеності кваркового потенціалу на великих та середніх відстанях. Важливо, однак, підкреслити, що саме в ділянці великих та середніх відстаней формується більшість основних характеристик мезонів [37, 38]. А це дає змогу, вивчаючи спектри мас та розпади мезонів, досліджувати низькоенергетичну ділянку сильної взаємодії та усунути ряд неоднозначностей у визначенні кваркового потенціалу.

Проведений аналіз чималого обсягу інформації, отриманої з ґраткових обчислень, феноменології сильних взаємодій та теоретико-польових робіт, дає підстави вважати, що далекодійний утримуючий потенціал складається із суміші лоренц-векторної та лоренц-скалярної частин. А це означає, що задача обчислення спектрів рівняння Дірака з такими потенціалами (скалярно-векторним варіантом взаємодії) вимагає особливого розгляду та модифікації ВКБ-схеми, розвиненої у [32, 33] для діраківської частинки в центральній-симетричному електростатичному полі, що задається вектор-потенціалом $A_\mu = (A_0(r), 0, 0, 0)$.

Нашу статтю побудовано в такий спосіб. У другому розділі за допомогою відомої техніки лівих та пра-

вих власних векторів відповідної однорідної системи розвинуто рекурентну схему побудови ВКБ-розкладів для розв’язків рівняння Дірака в зовнішніх скалярному та векторному центральних полях. На цій основі в розділі 3 отримано квазікласичні формули для радіальних функцій F та G у класично дозволених і заборонених ділянках, знайдено формули їх зшивання при переході через точки повороту. У цьому ж розділі проведено узагальнення правила квантування Бора–Зоммерфельда на релятивістський випадок, коли частинка спіну $1/2$ взаємодіє зі скалярним і (“кольорово”)–електростатичними зовнішніми полями одночасно. У квазікласичному наближенні одержано загальний вираз для ширини квазістаціонарних рівнів, відомий раніше лише для електростатичних потенціалів бар’єрного типу. У четвертому розділі показано, що для деяких простих потенціалів зі змішаною лоренц-структурою отримане правило квантування точно відтворює енергетичний спектр.

II. РЕКУРЕНТНА СХЕМА ПОВУДОВИ ВКБ-РОЗКЛАДІВ

Задача про рух релятивістської частинки зі спіном $1/2$ у статичному скалярному та (“кольорово”)–електростатичному зовнішніх полях зводиться в нашій постановці до знаходження розв’язків узагальненого рівняння Дірака ($c = \hbar = e = 1$):

$$[\alpha \hat{\mathbf{p}} + \beta(m + S(\mathbf{r})) + V(\mathbf{r})] \Psi = E\Psi. \quad (1)$$

Тут $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, β – матриці Дірака, $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla_{\mathbf{r}}$ – оператор імпульсу, E та m – повна енергія та маса частинки. Підкреслимо, що $S(r)$ – лоренц-скалярний потенціал, а потенціал $V(r)$ є нульовою (часовою) компонентою 4-вектора A_μ : $\mathbf{A} = 0$, $V(r) = -eA_0(r)$, $e > 0$.

Отримаємо формули квазікласичного наближення для рівняння Дірака (1), обмежившись класом потенціалів із центральною симетрією: $S(\mathbf{r}) = S(r)$, $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Відповідно до цього шукатимемо хвильову функцію Ψ стаціонарних станів (у стандартному зображенні) у вигляді

$$\Psi = r^{-1} \begin{pmatrix} F(r) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) \\ iG(r) \Omega_{j l' M}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де $\Omega_{j l M}$ – сферичний спінор [2], j і M – повний кутовий момент та його проєкція ($j = l \pm 1/2$), l – орбітальний момент ($l + l' = 2j$), $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Після відокремлення кутових змінних \mathbf{n} у рівнянні (1) приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку для радіальних хвильових функцій F та G :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dr} + \frac{\tilde{k}}{r} F - \frac{1}{\hbar} [(E - V(r)) + (m + S(r))] G &= 0, \\ \frac{dG}{dr} - \frac{k}{r} G + \frac{1}{\hbar} [(E - V(r)) - (m + S(r))] F &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Тут у явному вигляді відновлено залежність від сталої Планка \hbar та використано такі нові позначення:

$$\tilde{k} = \hbar k, \quad k = \begin{cases} -(l+1) & \text{для } j = l + 1/2 \quad (l = 0, 1, \dots), \\ l & \text{для } j = l - 1/2 \quad (l = 1, 2, \dots), \end{cases} \quad (4)$$

так що $|k| = j + 1/2 = 1, 2, \dots$. Знак k поряд з $\hbar j$, $\hbar M$ та енергією E є інтегралами руху для діраківської частинки в довільному центральному полі.

Систему (3) можна звести до рівняння другого порядку, виключивши одну з невідомих радіальних функцій, але при побудові формальних асимптотичних розв'язків (ФАР) зручніше оперувати безпосередньо із самою системою. Запишемо її в матричній формі:

$$\chi' = \frac{1}{\hbar} D \chi, \quad \chi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$D = \begin{pmatrix} -\tilde{k}/r & m + S(r) + E - V(r) \\ m + S(r) - E + V(r) & \tilde{k}/r \end{pmatrix}$$

(штрих означає похідну за r). Система (6) містить природний малий параметр \hbar , і задача полягає в асимптотичному інтегруванні цієї системи при $\hbar \rightarrow 0$.

Наведемо алгоритм побудови ФАР. Дотримуючись стандартної схеми асимптотичної теорії систем лінійних диференціальних рівнянь [41], шукатимемо розв'язок системи (6) у вигляді асимптотичного ряду за степенями \hbar :

$$\chi(r) = \exp \left\{ \int^r y(r') dr' \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \varphi^{(n)}(r), \quad (6)$$

$$y(r) = \hbar^{-1} y_{-1}(r) + y_0(r) + \hbar y_1(r) + \dots,$$

$$\varphi^{(n)}(r) = \begin{pmatrix} \varphi_F^{(n)}(r) \\ \varphi_G^{(n)}(r) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

де верхня (нижня) компонента $\varphi_F^{(n)}$ ($\varphi_G^{(n)}$) вектора $\varphi^{(n)}$ відповідає радіальній функції F (G). Підставляючи розклади (6), (7) в (6) та прирівнюючи до нуля коефіцієнти при однакових степенях \hbar , отримаємо нескінченну рекурентну систему рівнянь для невідомих скалярних $y_n(r)$ та векторних $\varphi^{(n)}(r)$ функцій:

$$(D - y_{-1}I)\varphi^{(0)} = 0, \quad (8)$$

$$(D - y_{-1}I)\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)'} + \sum_{k=0}^n y_{n-k} \varphi^{(k)},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Тут 0 — нульова дворядна матриця-стовпець, а I — одинична 2×2 матриця. Із рівняння (8) випливає, що $y_{-1}(r)$ повинно бути власним значенням, а $\varphi^{(0)} \equiv \varphi_i$ — одним із власних (правих) векторів матриці $D(r)$. Власні значення $y_{-1} \equiv \lambda_i$ є коренями характеристичного рівняння $\det(D - y_{-1}I) = 0$:

$$y_{-1} \equiv \lambda_i = \pm q,$$

$$q = \sqrt{(m + S(r))^2 - (E - V(r))^2 + (k/r)^2}. \quad (10)$$

Тоді відповідні праві власні вектори φ_i в покомпонентній формі запису рівні

$$\begin{aligned} \varphi_i &= A_1 \begin{pmatrix} m + S + E - V \\ \lambda_i + k r^{-1} \end{pmatrix} \\ &= A_2 \begin{pmatrix} \lambda_i - k r^{-1} \\ m + S - E + V \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут і надалі $\hbar = c = 1$; індекс i приймає два значення \pm , асоційовані з двома значеннями функції $\lambda_i(r) = \pm q(r)$; $A_1(r)$ та $A_2(r)$ — нормувальні множники, які зафіксуємо пізніше за домовленістю.

Оскільки матриця $D(r)$ не є симетричною, то поряд з правими власними векторами ми повинні ввести також ліві власні вектори $\check{\varphi}_i$. Останні визначаються умовами

$$\check{\varphi}_i(D - \lambda_i I) = 0, \quad (12)$$

$$\check{\varphi}_i = B_1(m + S - E + V, \lambda_i + k r^{-1})$$

$$= B_2(\lambda_i - k r^{-1}, m + S + E - V). \quad (13)$$

До цього слід додати, що $\check{\varphi}_i$ не збігається з φ_i^T ; при цьому ліві та праві власні вектори матриці $D(r)$ ортогональні:

$$(\check{\varphi}_i, \varphi_j) = \sum_{\alpha=1}^2 (\check{\varphi}_i)_\alpha (\varphi_j)_\alpha = \text{const } \delta_{ij}. \quad (14)$$

Як завжди, δ_{ij} — символ Кронекера.

Для визначення функції $y_0(r)$ скористаємося першим із рівнянь (9), покладемо в ньому $\varphi^{(0)} = \varphi_i$ та домножимо обидві частини зліва на вектор-рядок $\check{\varphi}_i$. Тоді з огляду на (12) ліва частина кінцевої рівності перетвориться в нуль, і ми отримаємо рівняння для $y_0(r)$, з якого випливає

$$y_0(r) = -\frac{(\check{\varphi}_i, \varphi'_i)}{(\check{\varphi}_i, \varphi_i)}. \quad (15)$$

Як ми бачили вище (див. (11), (13)), власні вектори $\varphi_i, \check{\varphi}_i$ визначаються неоднозначно, з точністю до довільних множників $A_{1,2}$ та $B_{1,2}$. Цю довільність можна усунути, наклавши на $\varphi_i, \check{\varphi}_i$ природну умову

$$(\check{\varphi}_i, \varphi'_i) = (\check{\varphi}'_i, \varphi_i). \quad (16)$$

У цьому випадку інтеграл $\int_0^r y_0(r') dr'$ обчислюється в замкнутому вигляді:

$$\int_0^r y_0(r') dr' = \ln[(\check{\varphi}_i, \varphi_i)^{-1/2}]. \quad (17)$$

Тоді шуканий квазікласичний розв'язок системи (6) можна записати так:

$$\chi_i = (\check{\varphi}_i, \varphi_i)^{-1/2} \exp \left\{ \int_0^r \lambda_i(r') dr' \right\} \varphi_i. \quad (18)$$

Провівши аналогічні побудови, можна послідовно знайти й усі інші члени $y_1, y_2, \dots, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots$ в розкладах (6), (7). Але формули для них виявляються громіздкими, і тому в застосуваннях використовується, як правило, тільки головний член (18) ФАР розв'язку (6) (що відповідає відомому виразу $\psi \sim p^{-1/2} \exp \left\{ i \int_0^r p(r') dr' \right\}$ ординарної нерелятивістської квазікласики [5]). Насправді тут суттєвим моментом є той факт, що формальні розклади (6), (7) за степенями \hbar у загальному випадку не збігаються, а становляють так званий асимптотичний ряд, кілька перших членів якого дають добре наближення до точного розв'язку, якщо тільки параметр розкладу \hbar достатньо малий.

Нарешті, нам залишилося показати, що умову (16) завжди можна задовольнити належним вибором нормувальних множників $A_{1,2}$ та $B_{1,2}$ у формулах (11), (13). Так, підстановка (11), (13) в (16) приводить до рівняння

$$\frac{A_1 B'_1 - A'_1 B_1}{A_1 B_1} = -\frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{q(q \pm k r^{-1})}, \quad (19)$$

звідки, а також із представлення (18) приходимо до такого результату для головного члена асимптотики радіальних функцій χ_i в підбар'єрній ділянці:

$$\chi_{\pm} = \left[2q \left(q \pm \frac{k}{r} \right) \right]^{-1/2} \exp \left\{ \pm \int_0^r q dr + \frac{1}{2} \int_0^r \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{q(q \pm k r^{-1})} dr \right\} \begin{pmatrix} m+S+E-V \\ k r^{-1} \pm q \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Якщо дотримуватися другої форми запису власних векторів φ_i і $\check{\varphi}_i$ (у термінах нормувальних множників A_2 та B_2 у формулах (11) і (13)), то після аналогічних побудов одержимо таке ВКБ-представлення:

$$\chi_{\pm} = \left[2q \left(q \mp \frac{k}{r} \right) \right]^{-1/2} \exp \left\{ \pm \int_0^r q dr - \frac{1}{2} \int_0^r \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{q(q \mp k r^{-1})} dr \right\} \begin{pmatrix} \pm q - k r^{-1} \\ m+S-E+V \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Перш ніж обговорювати зміст отриманих формул, слід відзначити, що в класично заборонених ділянках простору, де $q(r) > 0$, функції $y_{-1}(r)$ та $y_0(r)$ набувають дійсних значень. Знаки плюс (мінус) в (20) та (21) відповідають розв'язку, експоненціально зростаючому (спадному) зі зростанням r . Для спадного розв'язку (знак мінус) слід використовувати формулу (20) при $k < 0$ та формулу (21) при $k > 0$; для зростаючого — навпаки. Простий і часто ефективний

спосіб вибору зручної форми запису розв'язків полягає в тому, щоб величина $Q_{\pm} = q \pm k/r$ була додатною в класично забороненій ділянці. При іншому виборі розв'язку не виключена можливість появи у виразах для F та G невизначеності типу $0/0$ у точці $r = r_g$, де величина Q_{\pm} обертається в нуль. Ця фіктивна сингулярність робить неможливим пряме використання формул (20) та (21) в околі точки r_g . У зв'язку з цим отримання квазікласичних формул для F та G , віль-

них від сингулярностей потребувало б розкриття вказаної невизначеності в точці r_g . А це, своєю чергою, вимагає додаткових доволі громіздких обчислень.

Переїдімо тепер до застосувань розвинутого вище варіанта ВКБ-методу до конкретних фізичних задач. Зазвичай квазікласичне наближення використовується для дискретного спектра й дещо рідше — для обчислення хвильових функцій неперервного спектра та в теорії розсіяння [5–9, 19]. Проте в багатьох ділянках фізики трапляються потенціали з бар'єром, для яких, замість дискретних рівнів, виникають квазістаціонарні стани (резонанси) з комплексною енергією $E = E_r - i\Gamma/2$. У наступному розділі ми розглянемо цю задачу в квазікласичному наближенні, що дозволить знайти для положення резонансу E_r та його ширини Γ загальні вирази, справедливі для довільних гладких потенціалів $V(r)$ та $S(r)$ бар'єрного типу.

III. МЕТОД ВКБ ДЛЯ ПІДБАР'ЄРНИХ РЕЗОНАНСІВ

У цьому розділі ми коротко розглянемо застосування методу ВКБ до однієї важливої проблеми, пов'язаної з вивченням розпадних (квазістаціонарних) станів квантових об'єктів [42]. Такі стани вводяться, як відомо, за аналогією зі звичайними стаціонарними станами дискретної частини спектра власних значень гамільтоніана. На комплексній площині енергій E їм відповідають полюси стаціонарної функції Гріна (див. [42]) $G(E) = (E - \hat{H} + i\eta)^{-1}$ (тут \hat{H} — повний гамільтоніан системи).

Уведення комплексних рівнів енергії порушує, однак, один з основних постулатів квантової теорії, згідно з яким спектр власних значень будь-якого ермітового оператора повинен бути дійсним, а відповідні власні функції — нормованими. Аналітичні продовження стаціонарних розв'язків у комплексну площину енергій мають, отже, принципово новий зміст. Вони дають найпростішу та найбільш зручну апроксимацію нестаціонарних розв'язків в основній ділянці зміни змінних, там, де точні хвильові функції $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ найближчі до функцій стаціонарних зв'язаних станів: $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) \approx \Psi_n(\mathbf{r}) \exp(-iE_n t)$, $\text{Im } E_n \ll \text{Re } E_n$.

Уточнення сфери застосовності вихідних положень теорії квазістаціонарних станів та вдосконалення розрахункових методів тривалий час були основною задачею досліджень цього напрямку. Вона актуальна й тепер, особливо в застосуваннях до конкретних систем. Як приклади тут можна навести низку фундаментальних задач атомної та ядерної фізики: йонізація атомних систем під дією зовнішнього електромагнетного поля [10–14, 43], розпад радіоактивних ядер або нестабільних частинок [44], реакції відриву електрона при низькоенергетичних зіткненнях атомних частинок [45] тощо. Водночас сама логіка розвитку теорії розпадних станів диктує, очевидно, постановку цілої низки якісно нових задач, аналогічних до тих, які раніше розв'язувались лише в нерелятивістському наближенні. Природно постають питання

про вплив на властивості розпадних квазістаціонарних станів різноманітних фізичних факторів — релятивізму та спін-орбітальної взаємодії, зовнішніх полів зі змішаною лоренц-структурою потенціалів взаємодії, адіабатично повільної зміни параметрів тощо. Результати, отримані при розв'язанні подібних задач, є цікавими для квантової механіки неабелевої частинки в зовнішньому калібрувальному полі Янга–Міллса [46], при вивченні вакуумної оболонки надкритичних атомів [21–30], для опису ефектів спонтанного народження позитронів при повільних зіткненнях важких ядер [29–34], а також з погляду вивчення розв'язків рівняння Дірака в сильних полях.

III.1. Структура ВКБ-розв'язків. Повертаючись до ВКБ-асимптотик (20) та (21), бачимо, що наявна там величина $q(r)$ збігається (з точністю до множника $i = \sqrt{-1}$) з радіальним імпульсом квазікласичної релятивістської частинки. Якщо записати цю величину у формі $q = [2m(U - \bar{E})]^{1/2}$, то виразу (10) відповідають ефективна енергія $\bar{E} = (E^2 - m^2)/2m$ та ефективний потенціал (ЕП) $U(r, E)$ для радіального руху:

$$U(r, E) = \frac{E}{m}V + S + \frac{S^2 - V^2}{2m} + \frac{k^2}{2mr^2}. \quad (22)$$

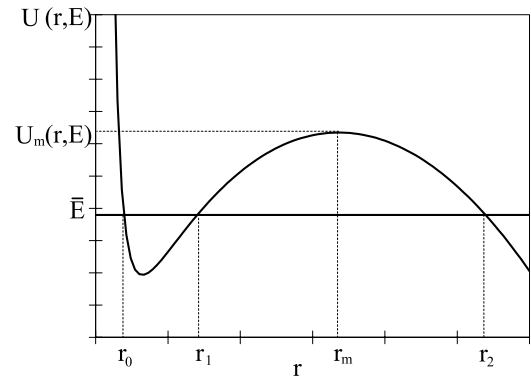


Рис. 1. Вигляд ефективного потенціалу $U(r, E)$ бар'єрного типу; r_0, r_1, r_2 — корені квазіімпульсу (10).

Наступний аналіз істотно залежить від вигляду ЕП $U(r, E)$ та розташування точок повороту (нулів функції $q(r)$ на півосі $0 < r < \infty$). Для описання явищ, пов'язаних з утворенням та розпадом квазістаціонарних станів, виділимо клас потенціалів $V(r)$ та $S(r)$, для яких ЕП $U(r, E)$ має вигляд ями, відокремленої від зовнішньої ділянки потенціалним бар'єром. Надалі будемо вважати, що $V(r)$ та $S(r)$ не мають особливостей при $0 < r < \infty$ і задовольняють такі умови (у граничній точці $r = 0$):

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{1+\delta} V(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^{1+\delta} S(r) = 0$$

$$\text{при } r \rightarrow 0 \text{ та } \delta > 0. \quad (23)$$

Для потенціалів зі степеневою поведінкою на малих відстанях,

$$V(r) \sim r^{-\beta_1}, \quad S(r) \sim r^{-\beta_2}, \quad \beta_i \leq 1, \quad r \rightarrow 0, \quad (24)$$

ці умови виключають можливість “падіння на центр”, [2, 29]. Для скалярних потенціалів $S(r)$, більш сингулярних, ніж r^{-1} , доданок із відцентровим потенціалом у виразі (22) не відіграє суттєвої ролі, і асимптотика розв’язків F та G при $r \rightarrow 0$ не залежить від k . Якщо $V(r)$ та $S(r)$ задовольняють умови (23), то ЕП $U(r, E)$ має при $r = 0$ полюс другого порядку. Якісний хід ЕП $U(r, E)$ бар’єрного типу та положення точок повороту r_j при $\bar{E} < U_m$ (U_m — вершина потенціального бар’єра) зображені на рис. 1.

У квазікласичному наближенні хвильова функція квазістаціонарного стану має різну асимптотичну форму у трьох ділянках: I) потенціальна яма $r_0 < r < r_1$; II) підбар’єрна ділянка $r_1 < r < r_2$; III) класично дозволена ділянка $r > r_2$ із квазидискретним енергетичним спектром [5]. Межами між різними ділянками — точками повороту (т. п.) r_j ($j = 0, 1, 2$) — тут слугують корені рівняння $\bar{E} = U(r, E)$. Не вдаючись до деталей обчислень, випишімо головні члени асимптотики розв’язків системи Дірака (3) в кожній із трьох указаних ділянок:

I. У класично дозволеній ділянці $r_0 < r < r_1$ ВКБ-асимптотики радіальних функцій F та G мають осцилюючий характер:

$$F(r) = C_1^\pm \left[\frac{E - V + m + S}{p(r)} \right]^{1/2} \cos \Theta_1,$$

$$G(r) = C_1^\pm \operatorname{sgn} k \left[\frac{E - V - m - S}{p(r)} \right]^{1/2} \cos \Theta_2; \quad (25)$$

при цьому згідно з (10)

$$p(r) = [(E - V(r))^2 - (m + S(r))^2 - (k/r)^2]^{1/2} \quad (26)$$

— квазікласичний імпульс для радіального руху частинки, $\operatorname{sgn} k$ — знак k , а фази Θ_1 та Θ_2 даються рівностями

$$\Theta_1(r) = \int_{r_1}^r \left(p + \frac{k w}{p r} \right) dr + \frac{\pi}{4},$$

$$\Theta_2(r) = \int_{r_1}^r \left(p + \frac{k \tilde{w}}{p r} \right) dr + \frac{\pi}{4}, \quad (27)$$

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{V' - S'}{m + S + E - V} - \frac{1}{r} \right),$$

$$\tilde{w} = \frac{1}{2} \left(\frac{V' + S'}{m + S - E + V} + \frac{1}{r} \right). \quad (28)$$

Крім того, ми позначаємо (у формулах (25) та в усіх наведених нижче ВКБ-представленнях розв’язків) константи нормування C_j , що відповідають станам з $k > 0$, верхнім індексом “+”, а ті, що відповідають станам з $k < 0$, — індексом “-”.

У природному припущенні, що ширина рівня Γ достатньо мала, хвильову функцію квазістаціонарного стану можна нормувати на одну частинку, локалізовану в ділянці потенціальної ями I (див. з цього приводу [5–7]: $\int_{r_0}^{r_1} (F^2 + G^2) dr = 1$. При цьому швидко осцилюючі функції $\cos^2 \Theta_1(r)$ та $\cos^2 \Theta_2(r)$ слід замінити їхнім середнім значенням, рівним $1/2$; тоді для констант нормування C_1^\pm в (25) отримаємо

$$|C_1^\pm| = \left\{ \int_{r_0}^{r_1} \frac{E - V(r)}{p(r)} dr \right\}^{-1/2} = \left(\frac{2}{T} \right)^{1/2}. \quad (29)$$

У цьому виразі T збігається з періодом радіальних коливань класичної релятивістської частинки з енергією E в потенціальній ямі I. Відзначимо, що в т. п. $r = r_1$ виконується рівність $E - V(r_1) = [(m + S(r_1))^2 + k^2/r_1^2]^{1/2}$, тому величина $E - V$ додатна в ділянці I.

II. У підбар’єрній ділянці $r_1 < r < r_2$ величина p набуває чисто уявних значень $p = iq$, $p^2(r) < 0$, а функції $q(r)$ та $y_0(r)$ — дійсні. При цьому ВКБ-розв’язок осцилюючого типу (25) продовжується тут розв’язком, експоненціально спадаючим із відстанню в глиб класично забороненої ділянки II. Для станів із $k > 0$ (на достатній віддалі від т. п. r_1 та r_2) маємо

$$\chi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \frac{C_2^+}{\sqrt{qQ}} \times \exp \left\{ - \int_{r_2}^r \left[q + \frac{(m + S)V' + (E - V)S'}{2qQ} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} -Q \\ m + S - E + V \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Такий же розв’язок для станів з $k < 0$ записується у вигляді

$$\chi = \frac{C_2^-}{\sqrt{qQ}} \exp \left\{ - \int_{r_2}^r \left[q - \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2qQ} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} m+S+E-V \\ -Q \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Наявна в (30) та (31) величина $Q = q + |k|r^{-1}$, а функція $q(r)$ задається формулою (10).

III. У “зовнішній” класично дозволеній ділянці $r > r_2$ квазістаціонарному станові відповідає розбіжна хвиля:

$$\chi = \frac{C_3^+}{\sqrt{pP}} \exp \left\{ \int_{r_2}^r \left[ip + \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2pP} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} iP \\ m+S-E+V \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Цей вираз слід використовувати, розглядаючи стани з $k > 0$, при цьому величина $P = p + i|k|r^{-1}$, а радіальний імпульс $p(r)$ знову додатний. Аналогічний вираз для станів з $k < 0$ виглядає так:

$$\chi = \frac{C_3^-}{\sqrt{pP}} \exp \left\{ \int_{r_2}^r \left[ip - \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2pP} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} m+S+E-V \\ iP \end{pmatrix}. \quad (33)$$

III.2. Формули зв'язку ВКБ-розв'язків. Отримані в п. III.1 квазікласичні формули апроксимують шуканий розв'язок системи Дірака (3) при всіх r , за винятком малих околів т. п. r_j ($j = 0, 1, 2$). Єдиний розв'язок системи (3) на всьому інтервалі значень r можна одержати обходом (у площині комплексної змінної r) т. п. r_j та встановленням зв'язку між коефіцієнтами C_j^\pm квазікласичних розв'язків (25)–(33), побудованих у різних ділянках. Точний математичний розгляд проблеми зв'язку ВКБ-розв'язків потребує, взагалі кажучи, урахування можливості зближення полюса другого порядку в точці $r = 0$ та т. п. r_0 , т. п. r_0 та r_1 (вузька яма, глибокі підбар'єрні резонанси з енергією поблизу дна потенціальної ями) та наявності точок перегину ефективної потенціальної енергії $U(r, E)$. У задачах, пов'язаних з описом квазістаціонарних станів із великими квантовими числами, з'являються додаткові труднощі, що виникають щоразу, коли доводиться враховувати зближення (між собою) т. п. r_1 і r_2 (вузький бар'єр, рідбергівські стани атомів з енергією, близькою до вершини бар'єра: $E_r \rightarrow U_m$) та зміщення т. п. r_1, r_2 в комплексну площину (комплексні потенціали, надбар'єрні резонанси, які лежать вище від класичного порога йонізації: $E_r > U_m$). Ми, однак, не торкатимемося цього кола значно складніших, але водночас і цікавіших задач; їх розгляд виходить за межі цієї праці й може бути предметом окремого дослідження. Тут проаналізуємо тільки найтиповіший випадок, коли всі три т. п. r_j ($j = 0, 1, 2$) дуже рознесені, і їх можна вивчати незалежно одна від одной. Точніше, припустимо, що виконуються умови

$$\left| \int_{r_j}^{r_{j+1}} p(r) dr \right| \gg 1, \quad j = 0, 1.$$

(Як правило, саме з такою ситуацією ми матимемо

справу у фізичних задачах наступних розділів). Тоді для обходу таких точок та зшивання ВКБ-розв'язків можна скористатися стандартними рецептами [5–8]. Один з них, який запропонували Цваан та Штюкельберг, а згодом розвинутий у цілій низці праць, використовує факт стрибкоподібної зміни коефіцієнтів C_j^\pm (явище Стокса) асимптотичного зображення розв'язку в околі т. п. r_j при переході через лінію Стокса

$$\operatorname{Re} \int_{r_j}^r p(r') dr' = 0$$

та вимогу однозначності точного розв'язку при обході вздовж замкнутого контуру навколо розгляданої т. п.

Інший можливий прийом полягає в тому, що поблизу т. п. r_j ($j = 1, 2$) система Дірака (3) зводиться до рівняння другого порядку (типу нерелятивістського рівняння Шредингера) з потенціалом, лінійно залежним від $r - r_j$, розв'язок якого описують так званою функцією Ейрі. Потім потрібно зшити вказаний точний розв'язок із квазікласичним по обидва боки від т. п. r_j . Оскільки деталі обох методів досить повно викладені в багатьох літературних джерелах, ми обмежимося тут лише вказівкою рецепта розв'язання проблеми зшивання ВКБ-розкладів та як підсумковий результат наведемо остаточні формули зв'язку між коефіцієнтами C_j^\pm квазікласичних розв'язків рівняння Дірака для розгляданої задачі з трьома ізольованими т. п.:

- Діють звичайні [5–8] формули зв'язку ВКБ-розв'язків зліва та справа від т. п. r_j , якщо в асимптотичних формах вигляду (30), (31) та (32), (33) слідкувати за поведінкою в околі розгляданої т. п. тільки головних множників

$p^{-1/2} \exp\{\pm \int_{r_j}^r p dr\}$, сингулярних при $r \rightarrow r_j$.

2. Побудовані, згідно з указаним рецептом, кінцеві формули зв'язку між коефіцієнтами C_j^\pm квазікласичних розв'язків (25)–(33) в ділянках I–III мають такий вигляд:

$$C_2^\pm = -iC_3^\pm = \mp \frac{C_1^\pm}{2} \left[\frac{E - V(r_1) + m + S(r_1)}{|k| r_1^{-1}} \right]^{\pm \frac{1}{2}} \times \exp \left\{ - \int_{r_1}^{r_2} \left[q \pm \frac{(m + S)V' + (E - V)S'}{2qQ} \right] dr \right\}. \quad (34)$$

Хоч отримані квазікласичні формули (25)–(34) мають досить складну аналітичну структуру, їх застосування до конкретних задач не викликає принципових труднощів, оскільки всі величини, що входять в F та G , визначені через одновимірні квадратури.

III.3. Рівняння для енергії квазістаціонарних рівнів. Як уже було сказано в п. III.1, визначаючи квазістаціонарні стани, зазвичай вимагають, щоб розв'язок рівняння Дірака на нескінченності становив розбіжну хвилю (2), (32), (33); це відповідає частинці, що врешті-решт вилітає із системи при її розпаді [5]. Умова відсутності збіжної компоненти в асимптотичному виразі для хвильової функції квазістаціонарного стану відбирає комплексні власні значення енергії $E = E_r - i\Gamma/2$, де E_r – положення, а Γ – ширина резонансу, який відповідає квазістаціонарному станові. Величина Γ додатна; вона визначає ймовірність розпаду за одиницю часу: $W = \Gamma/\hbar$.

Виведемо умову, яка характеризує положення квазістаціонарних рівнів у квазікласичному випадку. Нехтуючи проникністю бар'єра в ділянці $r_1 < r < r_2$ та вважаючи, що зліва і справа від потенціальної ями $r_0 < r < r_1$ залишаються тільки експоненціально спадні ВКБ-розв'язки, знаходимо з (25) умову квантування:

$$\int_{r_0}^{r_1} \left(p + \frac{k w}{p r} \right) dr = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots; \quad (35)$$

тут через n_r позначено радіальне квантове число. Рівняння (35) визначає дійсну частину енергії рівня E_r . Воно відрізняється від звичайної квазікласичної умови квантування Бора-Зоммерфельда [5] релятивістським виразом для квазіімпульсу $p(r)$ та врахуванням поправки ($\sim w(r)$) на спіно-орбітальну взаємодію, що приводить до розщеплення рівнів із різним знаком квантового числа k .

Як видно з виразу (28) для $w(r)$, за тонке розщеплення рівнів відповідальною є різниця $V' - S'$, у якій адитивні внески за рахунок скалярного ($-S'$) та векторного (V') варіантів взаємодії мають протилежні знаки. Формальна причина цього полягає в тому, що знак спіно-орбітальної взаємодії залежить від лоренцевої структури потенціалу взаємодії. Це, між іншим, можна розглядати як відображення тієї обставини, що у векторному полі спіни частинок орієнтуються в напрямку $[\mathbf{F}_v \mathbf{p}]$, де $\mathbf{F}_v = -\mathbf{n} dV/dr$ – сила, що діє на частинку, \mathbf{p} – її імпульс, \mathbf{n} – одиничний вектор у напрямку вектора \mathbf{r} , а в скалярному полі – в напрямку $-\mathbf{F}_s \mathbf{p}$, де $\mathbf{F}_s = -\mathbf{n} dS/dr$. Ці міркування наочно пояснюють той факт, що в скалярному полі рівень $j = 3/2, l = 1$ лежить нижче від рівня $j = 1/2, l = 1$, а у векторному полі – навпаки.

Ми побачимо далі (розд. IV), що в загальнішому випадку взаємодії частинки зі скалярним та векторним полями одночасно величина й характер спіно-орбітального розщеплення рівнів істотно залежать від відносної ролі вказаних взаємодій. Отже, відомості про положення та тонке розщеплення рівнів у цілому можуть уже виявити роль кожного з потенціалів $S(r)$ та $V(r)$ окремо.

У зв'язку з урахуванням в умові квантування (35) лише спіно-орбітальної поправки та нехтуванням поправкою за рахунок спіно-спінового зв'язку необхідно зробити таке пояснення. Зрозуміло, якщо діяти формально, то за допомогою розвинутої в попередньому розділі рекурентної техніки можна було б отримати для енергії рівня E_r і точніше рівняння, яке поряд зі спіно-орбітальною враховує ще й поправку на спіно-спінову взаємодію. Нагадаємо, що для включення такої поправки в (35) нам довелося б обчислити функції $y_1(r)$ і $\varphi^{(1)}(r)$, тобто врахувати члени порядку \hbar у квазікласичних розкладах (6), (7). Однак таке уточнення умови квантування (35) навряд чи має сенс, оскільки врахування спіно-спінової взаємодії (на відміну від спіно-орбітальної) є перевищенням точності квазікласичного розрахунку. Нижче (розд. IV) ми покажемо це на прикладі кулонівського та осциляторного потенціалів, для яких формула квантування (35) точно відтворює енергетичний спектр. Наголосимо також, що рівні енергії, розраховані за цією формулою для ряду інших модельних потенціалів, добре узгоджуються з точними значеннями, навіть якщо ширина ями $r_0 < r < r_1$ невелика.

Перейдемо до обчислення ширини рівня $\Gamma = 2 \text{Im} E$. Для цього домножмо перше рівняння системи (3) на G^* , друге (після попереднього переходу до комплексно-спряжених величин G^*, F^* та $E^* = E_r + i\Gamma/2$) – на F , додаймо їх та проінтегруймо за змінною r від 0 до ∞ . Потім інтеграл за r від комбінації $G^* F' + G^{*'} F = (G^* F)'$ легко обчислюється в загальному вигляді; при цьому слід урахувати, що на нижній межі (при $r = 0$) добуток $G^* F$ обертається в нуль і нетривіальний внесок дає тільки верхня межа інтегрування ($r = \infty$). В остаточному рівнянні більшість отриманих членів дійсні, і, взявши всюди уявні частини, ми одразу ж прийдемо до шуканого результату.

тату:

$$\Gamma = -2 \operatorname{Im}[G^*(r)F(r)]_{r \rightarrow \infty}. \quad (36)$$

Цей результат для ширини резонансу Γ можна одержати також і безпосереднім обчисленням потоку частинок, які відлітають на нескінченність, при нормуванні на одну частинку в ділянці $r_0 < r < r_1$. Використовуючи тепер асимптотичні зображення (32), (33) радіальних функцій F та G праворуч від т. п. r_2 , а також формули зв'язку (34) між нормувальними константами C_j^\pm в ділянках I–III, знаходимо в головному ВКБ-наближенні для ширини рівня Γ такий вираз:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_0}{T} \exp \left\{ -2 \int_{r_1}^{r_2} q(r) dr \right\}, \quad (37)$$

де

$$\Gamma_0 = \exp \left\{ 2k \int_{r_1}^{r_2} \frac{w}{r q} dr \right\}, \quad (38)$$

а наявний тут період радіальних коливань T установлений у (29).

Відзначмо, що отримана квазікласична формула (37) є релятивістським узагальненням добре відомої формули Гамова для ширини квазістаціонарного рівня. Нетривіальним моментом такого узагальнення є видозміна виразу для періоду коливань T та поява в передекспоненті виразу (37) додаткового множника Γ_0 , який залежить від знака квантового числа k і зумовлений спин-орбітальним зв'язком у суміші скалярного $S(r)$ і векторного $V(r)$ потенціалів. У нерелятивістському випадку цей множник практично не відрізняється від одиниці й формула (37) допускає наочну інтерпретацію. А саме, $1/T$ є кількістю ударів за одиницю часу частинки (локалізованої всередині ділянки I) об внутрішню стінку ($r = r_1$) потенціального бар'єра $r_1 < r < r_2$, а експоненціальний множник $\exp\{-2 \int_{r_1}^{r_2} q dr\}$ відповідає ймовірності проходження крізь цей бар'єр при кожному ударі.

Отже, формули (35), (37) являють собою основний підсумок проведеного дослідження: вони визначають спектр квазістаціонарних станів спірної частинки ($s = 1/2$) в ЕП $U(r, E)$ бар'єрного типу.

Задля уникнення непорозумінь тут важливо підкреслити, що коли ми говоримо про потенціал бар'єрного типу (або ж, еквівалентно, потенціал з бар'єром), то маємо на увазі не вихідні потенціали $V(r)$ та $S(r)$, що безпосередньо входять у систему рівнянь Дірака (3), а породжуваний ними (згідно з виразом (22)) енергозалежний ЕП $U(r, E)$. У дещо загальнішій (ніж при означенні (22)) постановці ЕП виникає при квадратуванні рівняння Дірака, тобто зведенні системи

рівнянь (3) до (одного) математично еквівалентного рівняння другого порядку (шредінґерівського типу); при цьому до виразу (22) для $U(r, E)$ додаються невеликі спінові поправки, що містять функцію $w(r)$. У нерелятивістському випадку $U(r, E) \approx S(r) + V(r)$; коли ж енергія зв'язку рівня $E_b = m - E_r$ порівняна з енергією спокою m , відмінність між потенціалами U та $S + V$ стає доволі істотною.

На завершення цього розділу зазначимо, що при виключеному скалярному полі ($S = 0$) отримані тут квазікласичні формули для E_r та Γ повністю узгоджуються з відомими результатами [32, 33] для цих же характеристик резонансів у чисто векторному полі: $V(r) = -eA_0(r)$, $\mathbf{A} = 0$.

Переходячи до конкретних застосувань розвинутого методу, аспробуємо спочатку правило квантування (35) на модельних потенціалах, для яких усі обчислення проводимо аналітично.

IV. ПОРІВНЯННЯ З ТОЧНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

Розглянемо декілька прикладів потенціалів $V(r)$ та $S(r)$, для яких квазікласична умова квантування (35) дає точні значення всіх рівнів енергії, включаючи й основні стани.

Приклад 1. Почнімо з однієї з найпростіших задач — обчислення спектра релятивістських зв'язаних станів у суміші скалярного $S(r)$ та векторного $V(r)$ потенціалів притягання кулонівського типу:

$$V(r) = -\frac{\xi}{r}, \quad S(r) = -\frac{\xi'}{r}. \quad (39)$$

Тут ξ та ξ' — електростатична та відповідно скалярна константи зв'язку. Цю задачу часто використовують як модельне наближення, досліджуючи рух лептонів у полі атомних ядер [47, 48]. У припущенні слабкого зв'язку, коли застосовна теорія збурень, кулонівський потенціал $V(r) = -\xi/r$ виникає в нижчому наближенні однофотонного обміну між ядром та лептоном, що рухається навколо нього, тоді як скалярний кулоноподібний потенціал $S(r) = -\xi'/r$ породжується одиничним обміном “безмасовим”, скалярним мезоном. Зрозуміло, при такому виборі форми $S(r)$ можна сподіватися лише на якісне уявлення про структуру енергетичного спектра лептонних атомів [47, 48]. Річ тут, звичайно, у тому, що нерідко цитований у літературі скалярний σ -мезон має занадто велику масу, і тому відповідний скалярний потенціал насправді є короткодійним. Подальші фізичні деталі цієї моделі можна знайти в [47, 48].

За допомогою позначень

$$\lambda = (m^2 - E^2)^{1/2}, \quad \gamma = (k^2 - \xi^2 + \xi'^2)^{1/2} \quad (40)$$

вирази (26), (28) для $p(r)$ та $w(r)$ можна записати так:

$$p(r) = \frac{\lambda}{r} \sqrt{(r-r_0)(r_1-r)},$$

$$w(r) = -\frac{m+E}{2[\xi-\xi'+(m+E)r]}, \quad (41)$$

де точки повороту r_0 та r_1 визначаються формулами

$$r_{0,1} = \frac{1}{\lambda^2} \left[\xi E + \xi' m \mp \sqrt{(\xi E + \xi' m)^2 - \lambda^2 \gamma^2} \right]. \quad (42)$$

У цих позначеннях умова квантування (35) набирає вигляду

$$\lambda \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{(r-r_0)(r_1-r)} \frac{dr}{r} - \frac{k(m+E)}{2\lambda} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{[\xi-\xi'+(m+E)r] \sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}}$$

$$= \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (43)$$

Нам буде зручно позначити через I_1 та I_2 перший та відповідно другий інтеграли в лівій частині рівняння (43). Обчислення кожного з них можна провести в три етапи. Спочатку за допомогою заміни змінної інтегрування $r = [(r_1-r_0)x + (r_1+r_0)]/2$ квадратичні форми під знаком радикалів в I_1 та I_2 зводимо до діагональної форми. Потім за допомогою другої підстановки $y = [(1-x)/(1+x)]^{1/2}$ підінтегральні вирази в I_1 та I_2 зводимо до раціонального вигляду

$$I_1 = \lambda \frac{(r_1-r_0)^2}{r_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^2(y^2+a^2)} dy, \quad (44)$$

$$I_2 = -\frac{k}{2} \sqrt{\frac{m+E}{m-E}} \cdot \frac{1}{\sqrt{[\xi-\xi'+r_1(m+E)][\xi-\xi'+r_0(m+E)]}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1}, \quad (45)$$

де $a^2 = r_1/r_0$. І нарешті, наявні в (44) (45) інтеграли можна обчислити за допомогою теореми про лишки. Для цього контур інтегрування в обох інтегралах (44), (45) потрібно замкнути півколом нескінченно великого радіуса, розташованого у верхній півплощині комплексної змінної y , та врахувати, що полюси підінтегрального виразу в (44) перебувають у точках $y = ia$ та $y = i$, причому останній є полюсом другого порядку. Функція під знаком інтеграла (45) має у верхній півплощині єдиний простий полюс у точці $y = i$. Обчисливши в (44), (45) інтеграли за лишками підінтегральних функцій, остаточно отримаємо

$$\frac{\pi}{2} \left\{ \lambda r_0 \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_0}} - 1 \right)^2 - \sqrt{\frac{m+E}{m-E}} \frac{k}{\sqrt{(\xi-\xi')^2 + (\xi-\xi')(m+E)(r_0+r_1) + r_0 r_1 (m+E)^2}} \right\} = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi. \quad (46)$$

Після спрощення це дає рівняння для визначення власних значень енергії:

$$\frac{\xi E + \xi' m}{\sqrt{m^2 - E^2}} - \gamma - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} k = n_r + \frac{1}{2}. \quad (47)$$

Розв'язуючи це рівняння щодо E , знаходимо

$$E = m \left\{ \frac{-\xi \xi'}{\xi^2 + (N + \gamma)^2} \mp \left[\left(\frac{\xi \xi'}{\xi^2 + (N + \gamma)^2} \right)^2 - \frac{\xi'^2 - (N + \gamma)^2}{\xi^2 + (N + \gamma)^2} \right]^{1/2} \right\}, \quad (48)$$

причому $N = n_r + (1 + \text{sgn } k)/2 = n - |k|$, $k = \mp(j+1/2)$ для станів з $j = l \pm 1/2$, а $n = 1, 2, \dots$ — головне квантове число. Ця формула збігається (при всіх значеннях n_r та k) з відомим точним виразом (див. [47, с. 186]) для спектра спінорного рівняння (1) зі скалярним та електростатичним потенціалами кулонівського типу (39), хоча, згідно з квазікласичним способом отримання цієї формули, вона формально застосовна лише для $n_r \gg 1$.

Проаналізуємо коротко результати, які випливають з (48) у деяких найважливіших випадках.

А. Розглянемо спочатку випадок, коли зовнішнє електростатичне поле виключене ($\xi = 0$) і, отже, вираз для дискретних рівнів енергії (48) набирає вигляду

$$E_{\pm} = \pm m \sqrt{1 - \frac{\xi'^2}{(n - |k| + \gamma)^2}}; \quad (49)$$

де тепер $\gamma = \sqrt{k^2 + \xi'^2}$. Ця формула показує, що рівняння Дірака зі скалярним зв'язком при $S(r) = -\xi'/r$ має дві симетрично розташовані (щодо нульового рівня $E = 0$) гілки енергетичного спектра масивних ферміонів відповідно до двох можливих значень квадратного кореня (49). Більш конкретно, додатний знак кореня (49) відповідає спектрові енергії частинки, а від'ємний — спектрові енергії античастинки. Ми бачимо, отже, що специфіка розгляданого спінорного рівняння (1) зі скалярним зв'язком проявляється в тому, що воно описує одночасно поведінку частинки та античастинки. При цьому всередині кожної гілки спектра порядок розташування рівнів енергії, починаючи з основного стану, такий: $1S_{1/2}, 2P_{3/2}, 2S_{1/2}$ та $2P_{1/2}, 3S_{1/2}$ тощо.

Зазначимо ще, що зі зростанням константи скалярного зв'язку ξ' енергетична щільність між спектрами частинок та античастинок зменшується, причім у границі $\xi' \rightarrow \infty$ рівні енергії асимптотично прямують до нульового значення ($E_{\pm} \rightarrow \pm 0$), ніколи не досягаючи його. Саме тому ані народження пар, ані зіткнення рівнів частинок та античастинок тут не відбуваються, тобто діраківський вакуум стійкий при скалярно-зв'язку.

Б. Розглянемо тепер, що діється, коли виключене зовнішнє скалярне поле ($\xi' = 0$). Поклавши в (48) $\xi' = 0$, отримаємо відому формулу Зоммерфельда [2] для тонкої структури рівнів воднеподібного атома:

$$E_{nj} = m \left[1 + \frac{\xi^2}{(n - |k| + \gamma)^2} \right]^{-1/2}. \quad (50)$$

Тут $\gamma = \sqrt{k^2 - \xi^2}$, $\xi = Z\alpha = Z/137$, Z — заряд ядра, а α — стала тонкої структури. Друга гілка спектра енергії, що відповідає від'ємному знакові перед коренем у (48), відкинута, оскільки в цьому частинковому випадку, $\xi' = 0$, вона приводить до стороннього розв'язку вихідного рівняння (47) — при $E < 0$ та $\xi' = 0$ ліва частина (47) від'ємна, а права додат-

на. З цією математичною обставиною пов'язаний той добре відомий факт, що в дискретному спектрі рівняння Дірака з векторним зв'язком відсутні зв'язані стани для античастинок при заданому знакові потенціалу $V(r) < 0$, незважаючи на ефективне притягання $U(r, E) \sim -V^2/2m$ на малих відстанях, яке існує як для частинок, так і для античастинок. Як впливає з (50), усякий рівень дискретного спектра в кулонівському полі ядра Z виникає тільки з верхнього континууму і монотонно опускається зі зростанням Z до нуля. При $\xi = |k|$ параметр γ в (50) має кореневу особливість, яка приводить до комплексних значень енергії E_{nj} при подальшому продовженні (50) в ділянку $\xi > |k| = j + 1/2$. Докладніше обговорення питань, пов'язаних з указаною особливістю, міститься в оглядах [29, 30] та монографіях [21, 31, 47, 48]. Відомо, що при врахуванні скінченних розмірів ядра ця аномалія зникає і зв'язані стани електрона в сильному полі обрізаного (на малих відстанях: $r \leq 10^{-12}$ см) кулонівського потенціалу існують аж до Z_c , де Z_c — значення заряду Z , при якому енергія розгляданого стану досягає межі нижнього (позитронного) континууму — m . Для перших чотирьох рівнів $1S_{1/2}, 2P_{1/2}, 2S_{1/2}, 2P_{3/2}$ розрахунки дають такі значення величини критичного заряду Z_c : 172, 185, 245 та 255, відповідно до [30]. Суттєво, що при $Z < Z_c$ ($1S_{1/2}$) електронні та позитронні стани не переплутуються; для рівняння Дірака нема “позитронних рівнів”, які б виникали з нижнього континууму. Таким чином, при $Z < Z_c$ спектр рівняння Дірака в полі ядра повністю визначений. Очевидно, що явища, які постають при $Z > Z_c$, мають суттєво багаточастинковий характер і їх слід описувати в межах теоретико-польового формалізму [31, 49].

Отже, на підставі сказаного констатуємо: оскільки аналізоване тут кулонівське поле ядра по-різному діє на частинки та античастинки (притягує електрони та відштовхує позитрони), спектри енергій для частинок (електронів) та античастинок (позитронів) несиметричні. Саме в цьому полягає принципова відмінність цього випадку від попереднього — взаємодії масивних ферміонів зі скалярним зовнішнім полем кулонівського типу (39); вплив останнього зводиться до того, що змінюється тільки маса (яка однакова для обох типів фермі-частинок — електронів та позитронів). Це означає, що, на відміну від електростатичного, скалярне поле діє однаково як на частинки, так і на античастинки (і саме тому дискретні спектри електронів та позитронів симетричні для спінорного рівняння (1) із чисто скалярним зв'язком ($\xi = 0$)).

В. Зупинімся ще на одному важливому частковому випадку, що реалізується при $\xi = \xi'$. У цій ситуації $\gamma = |k|$, $n - |k| + \gamma = n$ і вираз (48) помітно спрощується:

$$E_{\pm} = m \left[\frac{-\xi^2}{\xi^2 + n^2} \pm \frac{n^2}{\xi^2 + n^2} \right]. \quad (51)$$

У наведеному виразі гілку спектра $E_- = -m$, що відповідає нижньому знакові (мінус), слід відкинути,

оскільки в розгляданому частковому випадку $\xi = \xi'$ вона приводить до порушення умови (47). Тоді гілка спектра, що залишилась у (51), дає енергію частинки:

$$E_+ = m \left[1 - \frac{2\xi^2}{\xi^2 + n^2} \right]. \quad (52)$$

Звідси випливає, що зі зростанням константи зв'язку ξ енергетична щільність $\Delta = m + E_+$ між зв'язаним станом і нижнім континуумом зменшується. Проте в границі $\xi \rightarrow \infty$ рівні енергії не входять у нижній континуум, а лише асимптотично наближаються до його межі, ніколи не досягаючи значення $E = -m$. При частковому значенні $\xi = 1$ енергія нижнього рівня $n = 1$ дорівнює нулеві.

Розгляньмо питання про застосовність квазікласичного наближення до аналізованого тут складеного поля кулонівського типу (39). Щоб отримати кількісну оцінку, перетворімо вираз (41) для квазікласичного імпульсу $p(r)$ до вигляду

$$p(r) = \frac{\gamma}{r} \sqrt{\left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{r}{r_1} \right)}, \quad (53)$$

де γ визначається виразом (40). Тоді умова застосовності квазікласичного розгляду набирає такої форми:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{p} \right) &= \gamma^{-1} \left(\frac{r}{r_{\min}} - 1 \right) \\ &\times \left[\left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{r}{r_1} \right) \right]^{-3/2} \ll 1 \end{aligned} \quad (54)$$

і виконується тим краще, чим більше γ . Тут r_{\min} — та точка, у якій ефективний потенціал (22) досягає мінімуму: $r^{-1} = (r_0^{-1} + r_1^{-1})/2$. При виконанні умови $\xi' > \xi$ (що відповідає сильному скалярному полю) розв'язок системи Дірака (3) для розглянутих потенціалів (39) має квазікласичний вигляд у всій зміні змінної r , за винятком вузьких інтервалів, що безпосередньо примикають до точок повороту r_0 та r_1 . Якщо ж $\xi \gg \xi'$, то умова застосовності ВКБ-наближення така ж, що й у випадку сильного кулонівського поля в теорії надкритичних атомів [32, 33].

При $\gamma \gg 1$ в ділянці невеликих $r < r_1$ в ефективно-му потенціалі (22) важливу роль (домінуючу при $r \rightarrow 0$) відіграє відцентровий потенціал $\gamma^2/2mr^2$. У цій ділянці імпульс $p(r) \sim \gamma/r$, а відношення двох доданків під знаком інтеграла у (35) становить $\sim k\gamma^{-2}rw(r) \sim (\xi' - \xi)^{-1}$. Оскільки квазікласичне наближення для хвильової функції має при $\xi' \gg \xi \sim 1$ точність порядку $(\xi' - \xi)^{-2}$ (див. [21]), то спін-орбітальні члени (як поправки порядку $(\xi' - \xi)^{-1}$) повинні бути збережені.

Приклад 2. Отримаємо спектр енергій релятивістської частинки маси m та спіну $1/2$ в суміші скалярного та векторного потенціалів осциляторного вигляду

$$S(r) = V(r) = \omega \frac{r^2}{4}, \quad \omega > 0. \quad (55)$$

Розв'язок спектральної задачі для рівняння Дірака з такими потенціалами становить певний теоретичний інтерес для спектроскопії гадронів у межах релятивістських потенціальних моделей [36–38].

Зрозуміло, що складена лише з потенціалів осциляторного типу (55) модель міжкваркової ($Q\bar{q}$) взаємодії не враховує кулонівського притягання на малих відстанях, що відповідає за взаємодію вільних кварків. Проте в ділянці великих r вона враховує ефективно натяг струни, який забезпечує конфаймент кварків усередині гадронів. Крім того, для цієї простої моделі $Q\bar{q}$ — взаємодії рівняння Дірака допускає точний розв'язок, що саме по собі є цікавим.

Для потенціалів (55)

$$p(r) = \frac{\beta}{\sqrt{2}r} [(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)]^{1/2}, \quad w(r) = -\frac{1}{2r}, \quad (56)$$

$\beta = \sqrt{\omega(E + m)}$, а точки повороту r_0 та r_1 визначаються формулами

$$r_{0,1} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[E - m \mp \sqrt{(E - m)^2 - 2k^2\omega^2\beta^{-2}} \right]^{1/2}. \quad (57)$$

Замінімо в (35) імпульс $p(r)$ і функцію $w(r)$ їхніми явними виразами (56) та перейдемо до інтегрування за новою змінною $x = r^2$. У результаті цих перетворень правило квантування (35) набирає вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{\beta}{2^{3/2}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(x - x_0)(x_1 - x)} \frac{dx}{x} \\ &- \frac{k}{2^{3/2}\beta} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x\sqrt{(x - x_0)(x_1 - x)}} = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi, \end{aligned} \quad (58)$$

де $n_r = 0, 1, 2, \dots$, нові межі області інтегрування визначаються за формулами $x_0 = r_0^2$, $x_1 = r_1^2$.

Обчислити наявні в (58) інтеграли квантування можна з допомогою теорії лишків за такою ж схемою, як і у випадку аналогічних інтегралів I_1, I_2 в лівій частині рівняння (43). Оскільки всі необхідні для такого обчислення технічні деталі ми вже й так досить докладно описали вище, наведемо тут тільки остаточний результат:

$$\frac{\beta(E - m)}{2^{3/2}\omega} - \frac{|k|}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sgn} k = n_r + \frac{1}{2}. \quad (59)$$

Якщо ввести позначення $\mathcal{K} = |k| + (1 + \operatorname{sgn} k)/2$ і за-

мінити параметр β його явним виразом, то останню рівність можна переписати так:

$$(E - m) \sqrt{2(E + m)} - (4n_r + 2\mathcal{K} + 1) \sqrt{\omega} = 0. \quad (60)$$

Розв'язуючи це рівняння стосовно E , ми знайдемо власні значення енергії як функції від квантових чисел n_r та \mathcal{K} :

$$E_{n_r, \mathcal{K}} = \left(2m + 8 \cdot 2^{2/3} m^2 A^{-1/3} + 2^{1/3} A^{1/3} \right) / 6, \quad (61)$$

де введено позначення

$$A = -B + \sqrt{B^2 - 1024 m^6}, \\ B = 32 m^3 - 27 \omega (1 + 2\mathcal{K} + 4n_r)^2.$$

Умова застосовності отриманого виразу (61): $n_r \gg 1$. Як буде показано в Додатку, при точному знаходженні розв'язків рівняння Дірака зі скалярним $S(r)$ та векторним $V(r)$ потенціалами осциляторного типу (55) енергія стаціонарних станів дається формулою (61) для всіх значень n_r .

Як видно з (61), кожен стан характеризується двома квантовими числами n_r та \mathcal{K} . Енергія залежить тільки від комбінації квантових чисел: $2n_r + \mathcal{K} = \Lambda$, тому $\Lambda = 1, 2, 3, \dots$ можна назвати головним квантовим числом. Кожне значення $\Lambda \geq 3$ може бути реалізоване кількома комбінаціями значень n_r і \mathcal{K} , внаслідок чого енергетичні рівні (61) зі значенням $\Lambda \geq 3$ є виродженими. Слід зауважити, що це виродження є "випадковим": воно зумовлене не симетрією задачі, а квадратичною залежністю вихідних потенціалів (55) від радіуса r .

Приклад 3. Одержимо спектр енергій рівняння Дірака для безмасового ферміона в зовнішньому скалярному полі з комбінованим потенціалом типу "лійки":

$$S(r) = -\frac{\xi'}{r} + \sigma r, \quad \sigma > 0; \quad V(r) = 0. \quad (62)$$

Специфіка цієї моделі зі скалярним варіантом взаємодії (62) проявляється, зокрема, в питанні про спонтанне порушення кіральної симетрії в початково симетричній системі. Уся річ у тому, що для безмасової частинки ($m = 0$) рівняння Дірака (1) із чисто векторним зв'язком (при $S(r) = 0$) інваріантне щодо глобального перетворення хвильової функції: $\Psi \rightarrow \exp(i\alpha' \gamma_5) \Psi$, $\tilde{\Psi} \rightarrow \tilde{\Psi} \exp(i\alpha' \gamma_5)$. З погляду спектра, кіральна симетрія проявляється у виродженні всіх станів за парністю; конкретніше, маси станів 0^+ і 0^- (чи 1^+ і 1^-) однакові.

Інваріантність щодо глобальних перетворень не вичерпує всіх властивостей симетрії безмасового рівняння Дірака. Легко перевірити, що в кіральній границі ($m = 0$) система рівнянь (3) інваріантна стосовно загальніших перетворень вигляду [35]

$$E \rightarrow E, \quad k \rightarrow -k, \quad S \rightarrow -S, \\ V \rightarrow V, \quad G(r) \rightarrow -F(r), \quad F(r) \rightarrow G(r), \quad (63)$$

які не пов'язані з геометричною симетрією простору-часу. Звідси випливає, що за відсутності зовнішнього скалярного поля ($S(r) = 0$) спектр є виродженим щодо знака діраківського квантового числа k ; тобто він залежить тільки від повного моменту j , але не окремо від його складників — орбітального l та спінового $s = 1/2$ моментів (кіральне виродження).

Як легко переконатися з безпосередньої перевірки, безмасове рівняння Дірака інваріантне також стосовно перетворень зарядового спряження:

$$E \rightarrow -E, \quad k \rightarrow -k, \quad S \rightarrow S, \\ V \rightarrow -V, \quad G(r) \leftrightarrow F(r). \quad (64)$$

Ми бачимо, що ці претворення симетрії контрастують з попередніми (63) тим, що зв'язують стани з додатними та від'ємними значеннями енергії. Зокрема за відсутності зовнішнього електростатичного поля (чисто скалярна взаємодія) маємо подвоєння станів із цим $|E_n|$, але протилежними знаками самої енергії $E_n = \pm |E_n|$. Ця обставина дозволяє обмежитись докладним вивченням лише одної (додатної) гілки спектра $E_n > 0$, що робить простішою задачу знаходження власних значень енергії E_n системи Дірака (3) зі скалярним варіантом взаємодії (62). Цю останню задачу можна розв'язати або чисельно, або у квазікласичному наближенні, яке формально застосовне для високозбуджених станів, але (як буде показано нижче) дає результати із задовільною точністю навіть для основного та першого збудженого станів.

Для потенціалу (62) і частинки з нульовою масою ($m = 0$) вирази (26), (28) для $p(r)$ та $w(r)$ набувають вигляду

$$p(r) = \frac{\sigma}{r} [(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)]^{1/2}, \\ w(r) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r - P_+} + \frac{1}{r - P_-} \right), \quad (65)$$

де

$$P_{\pm} = \frac{1}{2\sigma} \left(-E \pm \sqrt{E^2 + 4\xi'\sigma} \right), \quad \gamma = \sqrt{k^2 + \xi'^2}, \quad (66)$$

а положення точок повороту r_0 та r_1 задається рівністю

$$r_{0,1} = \frac{1}{2^{1/2}\sigma} \sqrt{E^2 + 2\xi'\sigma \mp \sqrt{(E^2 + 2\xi'\sigma)^2 - 4\sigma^2\gamma^2}}. \quad (67)$$

У цих позначеннях квазікласичну умову квантування

можна записати так:

$$\sigma \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)} \frac{dr}{r} - \frac{k}{2\sigma} \sum_{i=\pm} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{(r - P_i) \sqrt{(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)}} = \left(n_r + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad (68)$$

$$n_r = 0, 1, 2, \dots$$

Обчислення першого інтеграла квантування в лівій частині (68) зводиться з допомогою певних замінь змінних інтегрування до обчислення за лишками відповідного контурного інтеграла. Другий інтеграл в (68) (що входить під знак суми) виражається через повні еліптичні інтеграли першого $K(\epsilon)$ та третього $\Pi(\alpha^2, \epsilon)$ роду [50]:

$$K(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\Pi(\alpha^2, \epsilon) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (69)$$

Після цих обчислень квазікласична умова квантування (68) набирає форми трансцендентного рівняння:

$$\frac{E^2 + 2\sigma(\xi' - \gamma)}{4\sigma} - \frac{k}{\sigma(r_0 + r_1)\pi} \times \left[2r_0 \left(\frac{\Pi(\alpha_+^2, \epsilon)}{r_0^2 - P_+^2} + \frac{\Pi(\alpha_-^2, \epsilon)}{r_0^2 - P_-^2} \right) - \left(\frac{1}{r_0 + P_+} + \frac{1}{r_0 + P_-} \right) K(\epsilon) \right] = n_r + \frac{1}{2}. \quad (70)$$

Тут використані нові позначення

$$\epsilon = \sqrt{\frac{E^2 + 2\sigma(\xi' - \gamma)}{E^2 + 2\sigma(\xi' + \gamma)}}, \quad \alpha_{\pm}^2 = \epsilon \frac{P_{\pm} + r_0}{P_{\pm} - r_0}.$$

Рівняння (70) можна розв'язати в явному вигляді у двох граничних випадках, $\sigma \rightarrow 0$ та $\sigma \rightarrow \infty$. Нижче ми обмежимося розглядом практично важливого випадку слабого зв'язку, коли при порівняно малих значеннях параметра σ (а саме при $\sigma \lesssim 0.2 \text{ Гев}^2$) добре виконується умова $E_{n_r, k}^2 \gg 2\sigma\gamma$ для всіх можливих значень енергії рівнів $E_{n_r, k}$. У цьому разі наведені формули помітно спрощуються і рівняння (70) для квазікласичного спектра остаточно набирає доволі простого вигляду

$$E_{n_r, k}^2 = 4\sigma \left[n_r + \frac{1}{2} + \frac{\gamma - \xi'}{2} + \frac{k}{4\gamma} + \frac{\sigma k}{2E_{n_r, k}^2} R(E_{n_r, k}) \right] + O \left(\left(\frac{\sigma\gamma}{E_{n_r, k}^2} \right)^2 \right), \quad (71)$$

де $\sigma > 0$ й уведено таке позначення:

$$R(E_{n_r, k}) = \frac{1}{\pi} \left(0.38 + \ln \frac{E_{n_r, k}^2}{\sigma\gamma} \right).$$

Коли ж кулонівський член у потенціалі (62) відсутній (тобто при $\xi' = 0$), рівняння (71) точно збігається із запропонованою в праці [51] квазікласичною умовою квантування рівнів енергії в скалярній ямі $U(r, E)$, що породжується лінійним утримуючим потенціалом, $S(r) = \sigma r$, $V(r) = 0$.

Рівняння (71) для $E_{n_r, k}$ неважко розв'язати чисельно. Порівняння результатів таких розрахунків $E_{n_r, k}$ з точними значеннями [35], отриманими числовим інтегруванням системи Дірака (3), показує, що квазікласичне рівняння (71) забезпечує цілком прийнятну точність обчислення енергетичного спектра: навіть для нижніх станів з $n_r \sim 1$ похибка (71) у визначенні $E_{n_r, k}$ не перевищує 5% та швидко зменшується зі зростанням n_r .

Поряд з прямим числовим розв'язанням трансцендентних рівнянь (70) та (71) здається доцільним ціною деяких спрощень або апроксимацій сформулювати наближені аналітичні вирази для енергетичних рівнів, які дозволили б без особливих труднощів простежити залежність $E_{n_r, k}$ від квантових чисел n_r , k та параметрів моделі взаємодії (62). При цьому зазначимо, що для нижніх станів з радіальним квантовим числом $n_r \sim 1$ величина $R(E_{n_r, k}) \cong 0.6 \div 0.8$. Проте з подальшим зростанням n_r ця величина швидко виходить на одиницю і, як показують результати числових розрахунків, існує досить протяжна ділянка енергетичного спектра (див. табл. 1), у якій можна покласти $R(E_{n_r, k}) = 1$. У цьому наближенні рівняння (71) легко розв'язується, і для енергії стаціонарних станів $E_{n_r, k}$ одержуємо:

$$\epsilon_{n_r, k} = \frac{E_{n_r, k}}{\sqrt{\sigma}} = \pm \sqrt{N' - \xi' + [(N' - \xi')^2 + 2k]^{1/2}}, \quad (72)$$

де $N' = 2n_r + 1 + \gamma + k/2\gamma$, а параметр γ визначено формулою (66). Додатний знак кореня відповідає енергії частинки, а від'ємний — енергії античастинки, узятій зі знаком “мінус”. Стосовно формули (71) та деяких особливостей релятивістського спектра для моделі потенціалу (62) зробимо кілька зауважень.

1. Залежність $E_{n_r, k}(\sigma) \propto \sigma^{1/2}$ впливає вже з міркувань скейлінгу; заміна $r \rightarrow \mu r$ у системі рівнянь (3) з масою $m = 0$ та комбінованим потенціалом (62) при належному виборі масштабного множника μ : $r \rightarrow r/\sqrt{\sigma}$ та $E_{n_r, k} = \sqrt{\sigma} \epsilon_{n_r, k}$.

2. У безмасовому рівнянні Дірака в зовнішньому скалярному полі (62) при обох знаках параметрів ξ' і σ існує тільки дискретний спектр. Ця обставина має просте пояснення. На малих відстанях в ефективному потенціалі $U(r, E)$ моделі (62) провідну роль відіграє доданок γ^2/r^2 , що відповідає відштовхуванню й унеможливує “падіння на центр”, при будь-якому значенні параметра ξ' . З іншого боку, на великих відстанях (де якраз і формується енергетичний спектр) в ЕП $U(r, E)$ домінує релятивістський член $S^2/2m$, що приводить до квадратичного запирання $(\sigma r)^2/2m$ (незалежно від знака параметра σ вихідного скалярного потенціалу (62)). Отже, ЕП $U(r, E)$ цієї моделі завжди (як при додатних, так і при від’ємних значеннях σ та ξ') має вигляд осциляторної потенціальної ями. У цьому істотна відмінність від нерелятивістської потенціальної моделі, де при від’ємних значеннях σ ефективний потенціал у радіальному рівнянні Шредингера має бар’єр, унаслідок чого, замість дискретних рівнів, виникають квазістаціонарні стани з комплексною енергією.

3. Спектр власних значень $E_{n_r, k}$ безмасового рівняння (1) зі скалярним потенціалом лінійного вигля-

ду $S(r) = \sigma r$ ($V(r) \equiv 0$) розраховано з високою точністю в праці [35] прямим числовим інтегруванням цього рівняння. Порівняння квазікласичного виразу (71) з отриманими в [35] числовими значеннями $\varepsilon_{n_r, k}$ та з результатами розв’язання трансцендентного рівняння (70) на ЕОМ методом мінімізації наведено в табл. 1 для двох значень кулонівського параметра ξ' : $\xi' = 0$ та 0.4. Видно, що сфера застосовності квазікласичної асимптотики (71), формально справедливої за умови $\sigma \ll 1$ (для збуджених станів з $n_r \gg 1$), “затягується” аж до загальноприйнятого натягу струни $\sigma \cong 0.18 \text{ GeV}^2$ навіть для основного ($n_r = 0$) стану. Це показує, що асимптотики квазікласичного типу можуть бути корисними для якісного аналізу спектра вихідного рівняння (1).

Нарешті, розрахунки енергії $E_{n_r, k}$ (які ми тут не наводимо) з використанням трансцендентного рівняння (70) показують, що загальні риси спектра слабо залежать від величини й навіть знака параметра σ , якщо $|\sigma| \lesssim 0.2 \text{ GeV}^2$. Однак це твердження несправедливе для тонкої структури P -рівнів. Наприклад, $P_{1/2}$ -рівень лежить вище від $P_{3/2}$ -рівня для $\sigma > 0$ і нижче від $P_{3/2}$, якщо $\sigma < 0$.

Стани n_r k	$\xi' = 0$			$\xi' = 0.4$	
	$\varepsilon_{n_r, k}$ [35]	$\varepsilon_{n_r, k}^{\text{ВКБ}}$	$\varepsilon_{n_r, k}^{(\text{ac})}$	$E_{n_r, k}^{\text{ВКБ}}$, GeV	$E_{n_r, k}^{(\text{ac})}$, GeV
0 -1	1.61944	1.62292	1.4142	0.55809	
1 -1	2.60263	2.60381	2.5887	1.02972	1.04765
2 -1	3.29118	3.29182	3.2886	1.33819	1.35699
3 -1	3.85541	3.85581	3.8555	1.58633	1.60356
0 -2	2.14652	2.14721	2.0009	0.82198	0.72702
1 -2	2.95197	2.95230	2.9208	1.18994	1.18375
2 -2	3.57353	3.57371	3.5616	1.46502	1.46751
3 -2	4.09947	4.09961	4.0941	1.69492	1.69967
0 -3	2.56927	2.56951	2.4495	1.01854	0.95639
1 -3	3.26852	3.26871	3.2287	1.33151	1.31723
0 -4	2.93218	2.93231	2.8284	1.18253	1.15227
0 1	2.29403	2.29251	2.3178	0.93348	0.92051
1 1	3.03103	3.03038	3.0359	1.25659	1.23879
2 1	3.62598	3.62557	3.6265	1.51411	1.49669
0 2	2.70440	2.70391	2.7443	1.09944	1.10954
1 2	3.35376	3.35350	3.3693	1.38451	1.38364
0 3	3.05967	3.05589	3.1021	1.24973	1.26591
0 4	3.40866	3.36945	3.4183	1.38513	1.40086

Таблиця 1. Власні значення $E_{n_r, k}$ та $\varepsilon_{n_r, k}$ безмасового рівняння Дірака зі скалярною взаємодією (62) для двох значень кулонівського параметра ξ' .

Примітка: При даних n_r, k, ξ' та $|\sigma| = 0.18 \text{ GeV}^2$ значення $\varepsilon_{n_r, k}$ — результат числового розрахунку [35]; $\varepsilon_{n_r, k}^{\text{ВКБ}}$ та $E_{n_r, k}^{\text{ВКБ}}$ — результати числового розв’язання трансцендентного рівняння (70); $\varepsilon_{n_r, k}^{(\text{ac})}$, $E_{n_r, k}^{(\text{ac})}$ — асимптотика (71).

ДОДАТОК

Знайдімо точні розв'язки та спектр енергій рівняння Дірака (1) у зовнішньому центрально-симетричному полі, що задається скалярним $S(r)$ і векторним $V(r)$ потенціалами осциляторного типу (55). Виключаючи, як завжди, із системи (3) одну з функцій (наприклад, $G(r)$), отримаємо рівняння другого порядку для визначення $F(r)$:

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \left[(E + m) \left(E - m - \frac{\omega r^2}{2} \right) - \frac{k(k+1)}{r^2} \right] F(r) = 0. \quad (Д1)$$

Відповідно до характеру асимптотичної поведінки радіальних функцій $F(r)$, $G(r)$ при великих r і на малих відстанях будемо шукати розв'язок рівняння (Д1) у вигляді

$$F(r) = e^{-\frac{\beta}{2^{3/2}} r^2} r^{\mathcal{K}} f(\rho), \quad (Д2)$$

де $\rho = \beta r^2 / \sqrt{2}$, а параметри β і \mathcal{K} означені в (56) та (60) відповідно. Підстановка цього виразу в (Д1) приводить до наступного рівняння для функції $f(\rho)$:

$$\rho f''(\rho) + (4\alpha - \rho) f'(\rho) - \left[2\alpha - \beta(E - m)/2^{3/2} \omega \right] f(\rho) = 0, \quad (Д3)$$

де $\alpha = (2\mathcal{K} + 1)/8$. Розв'язок цього рівняння, скінченний при $\rho = 0$, виражається (з точністю до сталого множника C) через вироджену гіпергеометричну функцію $F(a, b; z)$ рівнянням

$$f(\rho) = C F \left(2\alpha - \beta(E - m)/2^{3/2} \omega, 4\alpha; \rho \right). \quad (Д4)$$

Для того, щоб наявна в правій частині (Д4) гіпергеометрична функція $F(a, b; \rho)$ зводилась до полінома, параметр a повинен дорівнювати цілому від'ємному числу або нулеві, що дає рівняння (60) для визначення дискретних рівнів енергії.

Розв'язок для $G(r)$ визначається за формулою

$$G(r) = \frac{1}{m + E} \left(\frac{dF(r)}{dr} + \frac{k}{r} F(r) \right) \quad (Д5)$$

з використанням отриманого вище виразу для $F(r)$ та рекурентних співвідношень для вироджених гіпергеометричних функцій [50]. Невизначений у $F(r)$ та $G(r)$ загальний коефіцієнт нормування C можна знайти з умови: $\int_0^\infty (F^2 + G^2) dr = 1$.

На завершення цього Додатка наведемо остаточні вирази для радіальних хвильових функцій дискретного спектра:

$$F(r) = C e^{-\frac{\beta}{2^{3/2}} r^2} r^{\mathcal{K}} F \left(-n_r, \frac{2\mathcal{K}+1}{2}; \frac{\beta}{\sqrt{2}} r^2 \right), \quad (Д6)$$

$$G(r) = C \frac{2^{3/2} \beta}{(2\mathcal{K} + 1)(m + E_{n_r, \mathcal{K}})} e^{-\frac{\beta}{2^{3/2}} r^2} r^{\mathcal{K}+1} \times \left[n_r F \left(1 - n_r, \frac{2\mathcal{K}+3}{2}; \frac{\beta}{\sqrt{2}} r^2 \right) + \frac{2\mathcal{K} + 1}{4} F \left(-n_r, \frac{2\mathcal{K}+1}{2}; \frac{\beta}{\sqrt{2}} r^2 \right) \right], \quad (Д7)$$

де нормувальний коефіцієнт

$$C = \frac{\beta^{(2\mathcal{K}+1)/4}}{2^{-1+(2\mathcal{K}+1)/8} \Gamma \left(\frac{2\mathcal{K}+1}{2} \right)} \sqrt{\frac{\Gamma \left(\frac{2\mathcal{K}+1}{2} + n_r \right) (E_{n_r, \mathcal{K}} + m)}{n_r! (3E_{n_r, \mathcal{K}} + m)}}.$$

Точні розв'язки та спектр енергій рівняння Дірака з осциляторними потенціалами (55) досліджено недавно в статі [52], причому розглянуто тільки стани з $k < 0$: $\mathcal{K} = |k|$. У цьому частковому випадку наші вирази (61), (Д6) та (Д7) відтворюють результати [52].

- [1] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантовых полей* (Наука, Москва, 1976).
- [2] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1976).
- [3] H. Gross, *Phys. Rev.* **186**, 1448 (1969); H. Groth, D. R. Yennie, *Rev. Mod. Phys.* **41**, 350 (1969).
- [4] M. I. Eides, N. Grotch, V. A. Sheluto, *Phys. Rep.* **342**, 63 (2001); hep-ph/0002158.
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)* (Наука, Москва, 1974).
- [6] А. Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории* (Наука, Москва, 1975).
- [7] Дж. Хединг, *Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ)* (Мир, Москва, 1965).
- [8] Н. Фрёман, П. У. Фрёман, *ВКБ-приближение* (Мир, Москва, 1967).
- [9] N. Fröman, P. O. Fröman, in *Proc. of the Niels Bohr Centennial Conference, Copenhagen, 1985* (North-Holland, Amsterdam, 1985), p. 1.
- [10] Б. М. Смирнов, М. И. Чибисов, *Журн. эксп. теор. физ.* **49**, 841 (1965).
- [11] А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, *Журн. эксп. теор. физ.* **50**, 1393 (1966); **51**, 309 (1966).
- [12] Ф. И. Никишов, В. И. Ритус, *Журн. эксп. теор. физ.* **50**, 255 (1966).
- [13] В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, *Журн. эксп. теор. физ.* **113**, 1579 (1988).
- [14] В. С. Лисица, *Усп. физ. наук* **153**, 379 (1987).
- [15] В. Д. Мур, В. С. Попов, *Журн. эксп. теор. физ.* **104**, 2293 (1993).
- [16] С. С. Герштейн, Л. И. Пономарев, Т. П. Пузынина, *Журн. эксп. теор. физ.* **48**, 633 (1965).
- [17] И. В. Комаров, Л. И. Пономарёв, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции* (Наука, Москва, 1976).
- [18] N. Athavan, N. Fröman, P. O. Fröman, M. Lakshmanan, *J. Math. Phys.* I — **42**, 5051 (2001); II — **42**, 5077 (2001); III — **42**, 5096 (2001).
- [19] Б. М. Карнаков, В. П. Крайнов, *Квазиклассическое приближение в квантовой механике* (Изд. МИФИ, Москва, 1992).
- [20] N. Fröman, P. O. Fröman, *Phase-integral method: Allowing near lying transition points. Tracts in Natural Philosophy, V. 40*, edited by C. Truesdell, (Springer, Berlin, 1996).
- [21] Ф. Б. Мигдал, *Фермионы и бозоны в сильных полях* (Наука, Москва, 1978).
- [22] В. С. Попов, В. Д. Мур, *Яд. физ.* **18**, 684 (1973).
- [23] М. С. Маринов, В. С. Попов, *Журн. эксп. теор. физ.* **67**, 1250 (1974).
- [24] В. П. Крайнов, *Письма журн. эксп. теор. физ.* **13**, 359 (1971).
- [25] А. Б. Мигдал, В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский, *Журн. эксп. теор. физ.* **72**, 835 (1977).
- [26] В. Л. Елецкий, Д. Н. Воскресенский, В. С. Попов, *Яд. физ.* **26**, 994 (1977).
- [27] В. Д. Мур, В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский, *Яд. физ.* **27**, 529 (1978).
- [28] В. С. Попов, *Журн. эксп. теор. физ.* **59**, 965 (1970).
- [29] Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, *Усп. физ. наук* **105**, 404 (1971).
- [30] В. С. Попов, *Изв. Акад. Наук СССР, физика* **41**, 2577 (1977).
- [31] W. Greiner, B. Muller, J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1985); J. Reinhardt, W. Greiner, *Rep. Prog. Phys.* **40**, 219 (1977).
- [32] В. Д. Мур, В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский, *Письма журн. эксп. теор. физ.* **28**, 140 (1978).
- [33] В. Д. Мур, В. С. Попов, *Яд. физ.* **28**, 837 (1978).
- [34] В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский, В. Л. Елецкий, В. Д. Мур, *Журн. эксп. теор. физ.* **76**, 431 (1979).
- [35] V. D. Mur, V. S. Popov, Yu. A. Simonov, V. P. Yurov, *Журн. эксп. теор. физ.* **105**, 3 (1994).
- [36] Ю. А. Симонов, *Усп. физ. наук* **166**, 338 (1996).
- [37] D. Ebert, V. O. Galkin, R. N. Faustov, *Phys. Rev. D* **57**, 5663 (1998).
- [38] D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin, *Mod. Phys. Lett. A* **18**, 601 (2003).
- [39] DELPHI Collaboration, P. Abreu *et al.*, *Phys. Lett. B* **345**, 598 (1995); ALEPH Collaboration, D. Buskulic *et al.*, *Z. Phys. C* **73**, 601 (1997); CLEO Collaboration, R. Anastassov *et al.*, hep-ex/9708035 (1997).
- [40] DELPHI Collaboration, M. Feindt, O. Podobrin, Report No DELPHI 96-93 CONF, **22**, (1996); DELPHI Collaboration, D. Bloch *et al.*, Report No DELPHI 97-102 CONF, **84**, (1997).
- [41] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений* (Наука, Москва, 1983).
- [42] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* (Наука, Москва, 1971).
- [43] В. Г. Кадышевский, Г. А. Кравцова, В. Н. Родионов, *Теор. мат. физ.* **130**, 275 (2002).
- [44] R. K. Janev, L. P. Presnyakov, V. P. Shevelko, *Physics of Highly Charged Ions* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1985).
- [45] О. Г. Ситенко, В. К. Тартаковский, *Теория ядра* (Либидь, Київ, 2000).
- [46] В. В. Белов, В. П. Маслов, *Докл. Акад. Наук СССР* **311**, 849 (1990).
- [47] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1990).
- [48] W. Greiner, J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1996).
- [49] Ф. Ф. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях* (Энергоатомиздат, Москва, 1988).
- [50] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции (пер. с англ.)* (Наука, Москва, 1967).
- [51] Yu. A. Simonov, *Яд. физ.* **60**, 2252 (1997); Yu. A. Simonov, *Яд. физ.* **63**, 104 (2000).
- [52] Wen-Chao Qiang, *Chin. Phys.* **11**, 757 (2002).

В. Ю. ЛАЗУР, В. В. РУБИШ, О. К. РЕЙТИЙ

**WKB METHOD FOR THE DIRAC EQUATION WITH
VECTOR AND SCALAR POTENTIALS**

V. Yu. Lazur, V. V. Rubish, O. K. Reity
*Uzhgorod National University, 32 Voloshyna St.,
Uzhgorod, UA-88000, Ukraine*

A sequential scheme of the WKB method is developed for the Dirac equation in a central symmetrical field with scalar and vector variants of interaction. The view of relativistic wave functions in the classical allowed and forbidden regions, and the conditions of their matching at transition through the turning points are found. As applications of the developed method the relativistic analogu of Bohr–Sommerfeld quantization condition which contains a spin-orbital interaction in a mixture of scalar $S(r)$ and vector $V(r)$ potentials, and relativistic generalization of the Gamov formula for quasistationary level width of the spin 1/2 particle interacting with scalar and vector fields simultaneously are obtained. It is shown that for Coulomb and oscillator potentials with the mixed Lorentz structure the obtained rule of quantization exactly reproduces the energy spectrum.