ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 9, № 3 (2005) с. 187–197

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 9, No. 3 (2005) p. 187–197

МОДЕЛЬ ВАКУУМОПОДІБНОЇ КОНФІҐУРАЦІЇ ТА ПРОСТІР КАЛУЦИ–КЛЯЙНА

В. Д. Гладуш, М. В. Галаджій
Дніпропетровський національний університет,
вул. Наукова, 13, Дніпропетровськ, 49050, Україна
(Отримано 14 березня 2005 р.; в остаточному вигляді — 6 липня 2005 р.)

У межах п'ятивимірної ґравітації збудовано лоренц-інваріянтну космологічну модель. Доведено, що умови Калуци–Кляйна виконуються завдяки вакуумним рівнянням п'ятивимірної ґравітації. Унаслідок цього простір Калуци–Кляйна реалізується динамічно, як лоренц-інваріянтна мода п'ятивимірної ґравітації. Після вимірної редукції і конформного відображення модель зводиться до чотиривимірної конфіґурації з конформним скалярним полем із нульовим конформно-інваріянтним тензором енерґії-імпульсу на фоні плоского простору-часу. Цю нульову моду рівнянь взаємодіючих конформно-інваріянтного скалярного і ґравітаційного полів можна сприймати як вакуумоподібну конфіґурацію загальної теорії відносности (ЗТВ) без космологічної сталої. Таким чином, вакуум ЗТВ можна вважати виявом конформно- і лоренц-інваріянтної моди п'ятивимірної ґравітації і, природно, теорії Калуци–Кляйна.

Ключові слова: теорія Калуци–Кляйна, умови циліндричности й замкнености, конічна синґулярність, вакуумоподібна конфіґурація.

PACS number(s): 04.50.+h, 04.20.Jb

I. ВСТУП

У зв'язку з досягненнями спостережливої астрономії зросло зацікавлення питаннями теорії космічного вакууму, який загальновизнано пов'язується з ненульовою космологічною сталою (див. огляди [1, 2] та поклики в них).

Згідно з цими уявленнями в лоренц-інваріянтному просторі-часі $V^{(4)}$ вакуум можна визначити як стан матерії з лоренц-інваріянтним розподілом "речовини" [3–5]. У межах космологічних уявлень це означає, що ми маємо справу з лоренц-інваріянтною космологічною моделлю. Відповідна метрика $V^{(4)}$ допускає групу Лоренца $L = O(1,3)$ як групу рухів. Ґравітаційне поле з такою симетрією в ЗТВ породжується лоренц-інваріянтним "вакуумоподібним" тензором енерґії-імпульсу

$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi\kappa}\,\delta^{\mu}_{\nu}\,, \tag{1.1}$$

де κ — ґравітаційна стала ($c = 1$), Λ — космологічна стала. Густина вакууму визначається значенням цієї сталої: $\rho_v = \Lambda/8\pi\kappa$.

Група Лоренца L діє на координати x^{μ} $(\mu\,,\nu = 0,1,2,3)$ простору-часу $V^{(4)}$ за стандартним правилом

$$\tilde{x}^{\mu} = L^{\tilde{\mu}}_{\nu} x^{\nu}\,, \tag{1.2}$$

причому

$$\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = L^{\alpha}_{\tilde{\mu}} L^{\beta}_{\tilde{\nu}} \eta_{\alpha\beta}\,, \qquad L^{\alpha}_{\tilde{\mu}} L^{\tilde{\mu}}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}\,, \qquad L^{\alpha}_{\tilde{\nu}} L^{\tilde{\mu}}_{\alpha} = \delta^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}}\,, \tag{1.3}$$

де $\eta_{\mu\nu}$, $\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ — метрики Мінковського.

Умова інваріянтности $V^{(4)}$ щодо групи Лоренца приводить до конформно-плоского простору з метрикою

$$^{(4)}ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = \psi^2 \eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}\,, \tag{1.4}$$

де функція ψ може залежати тільки від величини $\eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$ інваріянтної щодо перетворень Лоренца. З рівнянь Айнштайна

$$^{(4)}G_{\mu\nu} = {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ {}^{(4)}R\ g_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

і того факту, що для конформно-плоскої метрики (1.4) тензор конформної кривини Вейля обертається в нуль, випливає такий вираз для тензора кривини:

$$^{(4)}R_{\mu\,\nu\,\rho\,\sigma} = -\frac{\Lambda}{3}\left(g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\rho}\right). \tag{1.6}$$

Це відповідає просторові сталої від'ємної кривини (для $\Lambda > 0$)

$$K = -1/a^2 = -\Lambda/3\,. \tag{1.7}$$

В узагальнених стереографічних координатах [6, 7] метрика простору сталої від'ємної кривини має вигляд [8]

$$^{(4)}ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = \frac{\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}{\left(1 + \frac{K}{4}\eta_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}\right)^2} \tag{1.8}$$

і описує космологічну модель де Сітера. Тому $a = \sqrt{-1/K} = \sqrt{3/\Lambda} > 0$ — це "радіус" кривини простору де Сітера.

Маємо формулу [6]

$$ {}^{(4)}ds_0^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \epsilon\, du_\epsilon^2 - u_\epsilon^2\, {}^{(3)}d\Omega_\epsilon^2\,, \qquad (1.9) $$

де

$$ u_\epsilon = \sqrt{\epsilon\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}\,, \qquad \epsilon = \frac{\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}{|\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu|}\,. \qquad (1.10) $$

“Кутова” частина в (1.9)

$$ {}^{(3)}d\Omega_\epsilon^2 = h_{ij}dy^i dy^j = \frac{\epsilon(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2}{\left(1 + \frac{K_0}{4}\, S_\epsilon^2\right)^2}, \qquad (i,j = 1,2,3) \quad (1.11) $$

описує метрику тривимірного простору сталої кривини $K_0 = \mp 1 = -\epsilon$ в узагальнених стереографічних координатах y^i [6,7], при цьому $S_\epsilon^2 = \epsilon(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2$.

З урахуванням (1.9) метрику космологічної моделі де Сітера (1.8) можна переписати у вигляді

$$ {}^{(4)}ds^2 = \frac{\epsilon\, du_\epsilon^2 - u_\epsilon^2\, {}^{(3)}d\Omega_\epsilon^2}{(1 - \epsilon u_\epsilon^2/4a^2)^2}\,. \qquad (1.12) $$

Залежно від ϵ вона описує зовнішню ($\epsilon = -1$) чи внутрішню ($\epsilon = 1$) ділянки світлового конуса $\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$. Легко бачити, що ця метрика інваріянтна при інверсії

$$ u_\epsilon = \frac{4a^2}{\tilde{u_\epsilon}}. \qquad (1.13) $$

Симетрія моделі насправді ширша. Виявляється, що простір з метрикою (1.8) має максимально можливу симетрію для чотиривимірних псевдоріманових просторів [8]. Вона описується 10-параметричною групою де Сітера $O(1,4)$ [9, 10], яка є групою руху метрики (1.8).

Наведене трактування вакууму пов'язане з однопараметричною сім'єю вакуумних конфіґурацій ЗТВ (1.8). Тут виникає проблема значення густини вакуумної енергії ρ_v або значення сталої Λ, які поки що можна визначити тільки зі спостережень [1].

Виявляється, що можна побудувати нетривіяльну “вакуумоподібну” конфіґурацію без космологічної сталої. Для цього розгляньмо лоренц-інваріянтну космологічну модель ЗТВ з конформно-інваріянтним скалярним полем на фоні плоского простору-часу. Відповідний цій системі конформно-інваріянтний тензор енерґії-імпульсу дорівнює нулеві. На основі цього в нашій статті запропоновано трактування класичного вакууму ЗТВ як лоренц-інваріянтної нульової моди рівнянь ЗТВ для взаємодіючих конформно-інваріянтного скалярного й ґравітаційного полів. Модель допускає суто геометричне формулювання в межах п'ятивимірної ґравітації [11]. Показано, що конформно- і лоренц-інваріянтний випадок теорії Калуци–Кляйна $V^{(5)}$ можна розглядати як конформно- й лоренц-інваріянтний випадок рівнянь п'ятивимірної ґравітації (без зовнішніх джерел), у якому постулати циліндричности й замкнености реалізуються динамічно. Ця модель після вимірної редукції та відповідного конформного відображення зводиться до згаданої чотиривимірної вакуумної конфіґурації з конформно-інваріянтним скалярним полем. Тому вакуум ЗТВ можна трактувати як вияв конформно- й лоренц-інваріянтної моди рівнянь п'ятивимірної ґравітації. Вона приводить до лоренц-інваріянтної конформно-плоскої космологічної моделі в теорії Калуци–Кляйна. Запропонований підхід, так само як і стандартний підхід, зумовлює однопараметричну сім'ю вакуумних конфіґурацій. Тут як параметр виступає заряд скалярного поля G, який у моделі Калуци–Кляйна зводиться до геометричного параметра — радіуса компактифікації $V^{(5)}$: $r_c = \sqrt{G}$.

II. П'ЯТИВИМІРНА O(1,3)-СИМЕТРИЧНА КОСМОЛОГІЧНА МОДЕЛЬ ТА УМОВА ЦИЛІНДРИЧНОСТИ

Розгляньмо п'ятивимірну $O(1,3)$-симетричну космологічну модель у межах п'ятивимірної ЗТВ [11]. Тут псевдорімановий простір $V^{(5)}$ має метрику ${}^{(5)}g_{AB}$ ($A,\ B = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$) (сиґнатури $(+,-,-,-,-)$), що залежить, у загальному випадку, від усіх координат x^A. Метрика задовольняє п'ятивимірні рівняння Айнштайна у вакуумі

$$ {}^{(5)}G_B^A = {}^{(5)}R_B^A - \frac{1}{2}\ {}^{(5)}R\ \delta_B^A = 0\,, \qquad (2.1) $$

які випливають із п'ятивимірного варіяційного принципу для дії Гільберта

$$ I^{(5)} = -\frac{1}{16\pi\hat{\kappa}} \int \sqrt{|{}^{(5)}g|}\ {}^{(5)}R\ d^5x\,, \qquad (2.2) $$

де $\hat{\kappa}$ — “п'ятивимірна ґравітаційна стала”, ${}^{(5)}g = \det({}^{(5)}g_{AB})$. Надалі будемо вважати, що x^μ $(\mu\,,\nu = 0,1,2,3)$ — просторово-часові координати, а $x^4 \equiv \acute{z}$ — додаткова п'ята координата.

Нехай група Лоренца $L = O(1,3)$ діє на просторово-часові координати x^μ $(\mu\,,\nu\ =\ 0,1,2,3)$ за правилом (1.2). Умова інваріянтости $V^{(5)}$ щодо групи Лоренца приводить до простору, який допускає сім'ї конформно-плоских просторово-часових локальних перетинів. Компоненти п'ятивимірної метрики можуть залежати тільки від координати $\acute{z}$ і величини $\epsilon\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = u_\epsilon^2$. Тому, узагальнюючи чотиривимірну метрику (1.8), метрику простору $V^{(5)}$ можна записати в такій (4+1)-формі:

$$ {}^{(5)}ds^2 = \psi^2(\acute{z},u)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \tilde{V}^2(\acute{z},u)\left(d\acute{z} + N(\acute{z},u)x_\mu dx^\mu\right)^2\,, \qquad (2.3) $$

де $\tilde{\psi}(\acute{z},u)$, $\tilde{V}(\acute{z},u)$ та $N(\acute{z},u)$ — шукані функції. Тут для зручности ми тимчасово опустили індекс "$_\epsilon$". Далі, відповідно до теореми Фробеніуса [12,13], ми можемо покласти $d\acute{z}+N(\acute{z},u)x_\mu dx^\mu = d\acute{z}+N(\acute{z},u)u\,du = \beta dz$, де z і β — деякі функції змінних $\{\acute{z},u\}$. Використаймо функцію z як нову п'яту координату. Тоді метрику (2.3) можна переписати так:

$$^{(5)}ds^2 = \psi^2(z,u)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - V^2(z,u)dz^2\,, \tag{2.4}$$

де $V^2 = \beta\tilde{V}^2$. Звідси за допомогою (1.9) одержуємо інше зображення $O(1,3)$-симетричної п'ятивимірної метрики в (1+1+3)-формі

$$^{(5)}ds^2 = \psi^2(z,u)(\epsilon\,du^2 - u^2\,{}^{(3)}d\Omega^2_\epsilon) - V^2(z,u)dz^2\,. \tag{2.5}$$

Для зручности запишемо цю метрику в такому (2+3)-вигляді:

$$^{(5)}ds^2 = {}^{(5)}g_{AB}dx^A dx^B = {}^{(2)}ds^2 - \Lambda^2\,{}^{(3)}d\Omega^2_\epsilon\,, \tag{2.6}$$

де

$$^{(2)}ds^2 = \gamma_{ab}dx^a dx^b = \epsilon\psi^2(z,u)\,du^2 - V^2(z,u)dz^2\,. \tag{2.7}$$

Тут метричні функції γ_{ab} і Λ залежать тільки від координат x^a, причому $a,b = 0,4$; $i,j = 1,2,3$. Оскільки метрика g_{AB} має сиґнатуру $(+,-,-,-,-)$, а "кутова" частина, згідно з (1.11), має сиґнатуру $(-\epsilon,-,-)$, то для сиґнатури метрики γ_{ab} маємо $(\epsilon,-)$. Тому для детермінанта $\gamma = \det|\gamma_{ab}|$ отримуємо $\operatorname{sign}\gamma = -\operatorname{sign}\epsilon$. Метрика (2.6) при $\epsilon = \pm 1$ описує різні ділянки того ж самого простору.

Виявляється, що, згідно з рівняннями п'ятивимірної ЗТВ, розглянута космологічна модель, окрім групи $O(1,3)$, допускає додаткову симетрію та відповідний їй закон збереження. Для знаходження цієї додаткової симетрії скористаймося метрикою (2.6). За умовою, простір $V^{(5)}$ з метрикою g_{AB} (2.6) допускає 6-параметричну групу рухів $O(1,3)$ з векторами Кілінґа $\boldsymbol{\xi}_r = \boldsymbol{\xi}^k_{(r)}\partial_k$ $(r = 1,2,\ldots,6)$. Ця група діє транзитивно на перетинах $x^a = \text{const}$, претворюючи "кутові" змінні y^i. Нехай, окрім групи $O(1,3)$, простір $V^{(5)}$ допускає додаткову групу рухів з вектором Кілінґа $\boldsymbol{\xi} = \xi^A\partial_A$. Шуканий вектор повинен задовольняти рівняння Кілінґа

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\,{}^{(5)}g_{AB} = {}^{(5)}g_{AB,\,C}\xi^C + {}^{(5)}g_{AC}\,\xi^C_{,\,B} + {}^{(5)}g_{CB}\,\xi^C_{,\,A} = \xi_{A;\,B} + \xi_{B;\,A} = 0\,, \tag{2.8}$$

де символ $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}$ позначає похідну Лі щодо вектора $\boldsymbol{\xi}$, а значок "$_{,\,A}$" $\equiv \partial_A \equiv \partial/\partial x^A$ — частинну похідну за координатою x^A.

Додаткова однопараметрична група рухів повинна комутувати з групою $O(1,3)$. Звідси випливає, що

$$[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}_r] = 0\,. \tag{2.9}$$

Оскільки перетини $x^a = \text{const}$ мають максимально можливу $O(1,3)$ симетрію для тривимірних псевдоріманових просторів [8], то шукана група може діяти тільки на двовимірних перетинах $x^i = \text{const}$ з метрикою γ_{ab}. Тому вектор $\boldsymbol{\xi}$ повинен мати розклад $\boldsymbol{\xi} = \xi^a\partial_a$, де компоненти ξ^a підпорядковуються рівнянням:

$$^{(5)}g_{AB,\,c}\xi^c + {}^{(5)}g_{Ac}\,\xi^c_{,\,B} + {}^{(5)}g_{cB}\,\xi^c_{,\,A} = 0\,. \tag{2.10}$$

Для метрики (2.6) ці рівняння розпадаються на систему двох рівнянь

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\,\gamma_{ab} = \gamma_{ab,\,c}\xi^c + \gamma_{ac}\,\xi^c_{,\,b} + \gamma_{cb}\,\xi^c_{,\,a} = \xi_{a;\,b} + \xi_{b;\,a} = 0\,, \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{\xi}\Lambda = \xi^a\Lambda_{,\,a} = 0\,, \tag{2.12}$$

де значок "$_{;\,a}$" $\equiv \nabla_a$ — коваріянтна похідна щодо метрики γ_{ab}.

Рівняння (2.11) приводять до рівняння безперервности

$$\xi^a_{;\,a} = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon\gamma}}\left(\sqrt{-\epsilon\gamma}\,\xi^a\right)_{,\,a} = 0\,. \tag{2.13}$$

Загальний розв'язок цього рівняння беремо у вигляді

$$\xi^a = -e^{ab}\varphi_{,\,b}\,, \tag{2.14}$$

де $\varphi = \varphi(x^a)$ — деяка функція координат x^a, а e^{ab} — двовимірний інваріянтний антисиметричний одиничний тензор, визначений співвідношеннями:

$$e_{ab} = -e_{ba} = \sqrt{-\epsilon\gamma}\;\epsilon_{ab}\,, \qquad e^{ab} = -\frac{\epsilon\,\epsilon^{ab}}{\sqrt{-\epsilon\gamma}}. \tag{2.15}$$

Тут ϵ_{ab} — двовимірний символ Леві–Чівіти, такий, що

$$\epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba}\,, \qquad \epsilon_{04} = \epsilon^{04} = 1\,, \qquad \epsilon_{ab}\epsilon^{bc} = -\delta^c_a\,. \tag{2.16}$$

Відзначимо, що антисиметричний тензор e_{ab} задовольняє співвідношення

$$e_{ab}e^{bc} = \epsilon\delta^c_a\,, \qquad \gamma_{ab}e^{ac}e^{bd} = -\epsilon\gamma^{cd}\,, \qquad e_{ab}e_{cd} = -\epsilon(\gamma_{ac}\gamma_{bd} - \gamma_{ad}\gamma_{bc})\,. \tag{2.17}$$

Уведімо на двовимірних перетинах $x^i = \text{const}$ ортонормований векторний базис $\{u_a\,, n_a\}$ такий, що

$$u_a u^a = \epsilon\,, \qquad n_a n^a = -1\,, \qquad n_a u^a = 0\,,$$
$$\gamma_{ab} = \epsilon u_a u_b - n_a n_b\,. \qquad (2.18)$$

Тоді між e_{ab}, u^a і n^a є такі співвідношення:

$$e_{ab} = -\epsilon(u_a n_b - u_b n_a)\,, \qquad n_a = e_{ab}u^b\,,$$
$$u_a = \epsilon e_{ab} n^b\,. \qquad (2.19)$$

З рівнянь (2.12) і (2.14) випливає, що $\varphi = \varphi(\Lambda)$. Отже, вектор Кілінґа має вигляд

$$\xi^a = -e^{ab}\Lambda_{,\,b}\,\varphi_{,\,\Lambda}\,, \qquad (2.20)$$

де $\varphi_{,\,\Lambda} = \partial\varphi/\partial\Lambda$.

Конкретний вигляд функції $\varphi(\Lambda)$ знайдемо з вакуумних рівнянь Айнштайна. Для метрики (2.6) маємо ${}^{(5)}G^a_k \equiv 0$ і

$$ {}^{(5)}G^a_b = -\frac{3}{\Lambda}\nabla^a\nabla_b\Lambda + \frac{3}{\Lambda^2}\left(\Lambda\Delta\Lambda + (\nabla\Lambda)^2 - \epsilon\right)\delta^a_b\,, \qquad (2.21)$$

$$ {}^{(5)}G^i_k = \left(\frac{1}{2}\,\Lambda^2\;{}^{(2)}R - 2\Lambda\Delta\Lambda - (\nabla\Lambda)^2 + \epsilon\right)\delta^i_k\,, \quad (2.22)$$

де $\Delta = \nabla^a\nabla_a$, $(\nabla\Lambda)^2 = \gamma^{ab}\nabla_a\Lambda\nabla_b\Lambda$, ${}^{(2)}R$ — скалярна кривина двовимірного простору з метрикою γ_{ab}.

З (2.21) випливає, що (a, b)-компоненти вакуумних рівнянь п'ятивимірної ґравітації (2.1) мають таку структуру:

$$\Lambda_{\,;\,a;\,b} = F\gamma_{ab}\,, \qquad (2.23)$$

де

$$F = \frac{1}{\Lambda}\left(\Lambda\Delta\Lambda + (\nabla\Lambda)^2 - \epsilon\right). \qquad (2.24)$$

Підставимо тепер (2.20) у рівняння Кілінґа (2.11) і врахуємо співвідношення (2.23). У результаті одержимо рівняння

$$\varphi_{,\,\Lambda\Lambda}\,\Lambda^{,\,c}(e_{ca}\Lambda_{,\,b} + e_{cb}\Lambda_{,\,a}) = 0\,. \qquad (2.25)$$

Оскільки $\Lambda_{,\,a} \neq 0$, то звідси випливає, що $\varphi_{,\,\Lambda\Lambda} = 0$. Це дає $\varphi(\Lambda) = A\Lambda$, де A — деяка стала. Покладімо $A = 1$, тоді $\varphi = \Lambda$. Тому шуканий вектор Кілінґа набирає вигляду

$$\boldsymbol{\xi} = \xi^a\partial_a = -e^{ab}\Lambda_{,\,b}\partial_a = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon\gamma}}\;\epsilon^{ab}\Lambda_{,\,b}\partial_a\,. \qquad (2.26)$$

У результаті ми приходимо до п'ятивимірного аналога узагальненої теореми Біркгофа [13]. Згідно з цією теоремою, $O(1,3)$-симетрична п'ятивимірна метрика, яка задовольняє п'ятивимірні вакуумні рівняння Айнштайна, допускає додатковий вектор Кілінґа $\boldsymbol{\xi}$ (2.26). Вектор $\boldsymbol{\xi}$ лінійно не залежить від векторів Кілінґа $\boldsymbol{\xi}_{(r)}$ вихідної групи рухів $O(1,3)$ і визначає додаткову симетрію вакуумних $O(1,3)$-симетричних просторів $V^{(5)}$. Це відповідає умові циліндричности просторів Калуци–Кляйна, яка, отже, для лоренцінваріянтних вакуумних просторів п'ятивимірної ґравітації реалізується динамічно.

III. П'ЯТИВИМІРНИЙ АНАЛОГ МАСОВОЇ ФУНКЦІЇ

Вектор Кілінґа $\boldsymbol{\xi} = \xi^a\partial_a$, згідно з рівняннями (2.1), приводить до нетривіяльного закону збереження. Зі згорнутих тотожностей Біянкі

$${}^{(5)}G^A_{B\,;\,A} = 0 \qquad (3.1)$$

та рівнянь Кілінґа (2.8) випливає рівняння неперервности

$$P^\mu_{;\,\mu} = \frac{1}{\Lambda^3\sqrt{-\gamma}}\left(\Lambda^3\sqrt{-\gamma}\,P^a\right)_{,\,a} = 0 \qquad (3.2)$$

для вектора

$$P^a = {}^{(5)}G^a_b\xi^b = -\,{}^{(5)}G^a_b e^{bc}\Lambda_{,\,c}\,. \qquad (3.3)$$

Розв'язок рівняння (3.2) шукаємо у вигляді антисиметричного ґрадієнта

$$P^a = -\frac{3}{2}\,\Lambda^{-3}e^{ab}G_{,\,b} \qquad (3.4)$$

деякого "потенціялу" $G = G(x^a)$. Звідси отримуємо

$$G_{,\,a} = -\frac{2}{3}\,\epsilon e_{ab}\Lambda^3 P^b\,. \qquad (3.5)$$

Відповідно до рівняння неперервности (3.2) умова інтеґровности цього співвідношення виконується тотожно.

Підставляючи праву частину рівняння (3.3) у (3.5) і використовуючи формули (2.17), одержуємо визначальне рівняння

$$G_{,\,a} = \frac{2}{3}\,\epsilon\Lambda^3 e_{ab}e^{dc}\,G^b_d\Lambda_{,\,c} = \frac{2}{3}\,\Lambda^3(\,G^b_b\Lambda_{,\,a} - G^b_a\Lambda_{,\,b})\,. \qquad (3.6)$$

Формули (2.21) приводять до співвідношення

$$G_{,\,a} = \left(\Lambda^2(\nabla\Lambda)^2 - \epsilon\Lambda^2\right)_{,\,a}\,. \tag{3.7}$$

Звідси видно, що можна покласти

$$G = \Lambda^2(\nabla\Lambda)^2 - \epsilon\Lambda^2\,. \tag{3.8}$$

Ця величина є п'ятивимірним аналогом відомої масової функції ЗТВ [14–16]. З рівнянь (2.1) і співвідношень (3.6) випливає закон збереження

$$\Lambda^2(\nabla\Lambda)^2 - \epsilon\Lambda^2 = G = \mathrm{const}\,, \tag{3.9}$$

який є наслідком додаткової симетрії, що допускається лоренц-інваріянтними метриками (2.3), (2.6) п'ятивимірної ґравітації.

Згідно з теоремою Фробеніуса [12] та відповідно до [13], вектор Кілінґа (2.26) запишемо так:

$$\xi_a = \beta Z_{,\,a}\,, \tag{3.10}$$

де Z і β — деякі функції. У ділянці, де $(\nabla\Lambda)^2 \neq 0$, ми можемо використовувати змінні Z і Λ як координати. Із формул (2.26) і (3.10) одержуємо

$$\begin{aligned}\gamma^{Z\Lambda} &= \gamma^{ab}Z_{,\,a}\Lambda_{,\,b} = \beta^{-1}\gamma^{ab}\xi_a\Lambda_{,\,b} = \\ &= -\beta^{-1}e^{bc}\Lambda_{,\,c}\Lambda_{,\,b} = 0\,.\end{aligned} \tag{3.11}$$

За допомогою рівняння (3.10) знаходимо

$$(\boldsymbol{\xi})^2 = \gamma^{ab}\xi_a\xi_b = \beta^2\gamma^{ab}Z_{,\,a}Z_{,\,b} = \beta^2\gamma^{ZZ}\,. \tag{3.12}$$

З іншого боку, враховуючи (2.17), отримуємо вираз

$$\begin{aligned}\gamma_{ab}\xi^a\xi^b &= \gamma_{ab}e^{ac}e^{bd}\Lambda_{,\,c}\Lambda_{,\,d} = -\epsilon(\nabla\Lambda)^2 \\ &= -\epsilon\gamma^{ab}\Lambda_{,\,a}\Lambda_{,\,b} = -\epsilon\gamma^{\Lambda\Lambda}\,.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Отже, у координатах Z і Λ маємо

$$\gamma_{ZZ} = -\epsilon\beta^2\gamma_{\Lambda\Lambda}$$

і метрика γ_{ab} набирає вигляду

$${}^{(2)}ds^2 = \gamma_{ab}dx^a dx^b = \gamma_{\Lambda\Lambda}(d\Lambda^2 - \epsilon\beta^2 dZ^2)\,, \tag{3.14}$$

При цьому для компонент вектора Кілінґа маємо такі вирази:

$$\xi^\Lambda = 0\,, \qquad \xi^Z = \frac{1}{\beta\gamma_{\Lambda\Lambda}}\,. \tag{3.15}$$

Далі, з (Λ,Λ)-компонент рівнянь Кілінґа (2.11) маємо

$$\gamma_{\Lambda\Lambda} = \gamma_{\Lambda\Lambda}(\Lambda)\,. \tag{3.16}$$

Компоненти (Z,Z) рівнянь (2.11) виконуються тотожно, а з (Z,Λ)-компонент рівнянь одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial\Lambda}\,(\beta\gamma_{\Lambda\Lambda}) = 0\,. \tag{3.17}$$

Звідси випливає, що $\beta = f(Z)/\gamma_{\Lambda\Lambda}$, де $f(Z)$ — довільна функція Z, яку можна покласти рівною одиниці. Таким чином, шукана метрика (2.6) у координатах кривин $\{Z,\,\Lambda\}$ набирає вигляду

$${}^{(5)}ds^2 = -\frac{\epsilon}{\gamma_{\Lambda\Lambda(\Lambda)}}\,dZ^2 + \gamma_{\Lambda\Lambda}(\Lambda)d\Lambda^2 - \Lambda^2\,{}^{(3)}d\Omega^2_\epsilon\,. \tag{3.18}$$

Невідому функцію $\gamma_{\Lambda\Lambda}$ можна знайти із закону збереження (3.9):

$$(\gamma_{\Lambda\Lambda})^{-1} = \gamma^{\Lambda\Lambda} = \gamma^{ab}\Lambda_{,\,a}\Lambda_{,\,b} = (\nabla\Lambda)^2 = \epsilon + \frac{G}{\Lambda^2}\,. \tag{3.19}$$

Звідси бачимо, що величина G аналогічна масі Шварцшільда M у ЗТВ.

Перейдемо тепер від координат кривин $\{Z,\,\Lambda\}$ до конформних координат $\{Z,\,u\}$, у яких просторово-часова частина метрики приймає конформно-плоский вигляд (2.5). Підставивши $\Lambda = \Lambda(u)$ у (3.18), знаходимо

$${}^{(5)}ds^2 = -\frac{\epsilon}{\gamma_{\Lambda\Lambda}}\,dZ^2 + \gamma_{\Lambda\Lambda}\left(\frac{d\Lambda}{du}\right)^2 du^2 - \Lambda^2\,{}^{(3)}d\Omega^2_\epsilon\,. \tag{3.20}$$

Порівнюючи цю метрику з метрикою (2.5) доходимо висновку, що

$$\gamma_{\Lambda\Lambda}\Lambda_u^2 = \epsilon\psi^2\,, \qquad \Lambda = u\psi \tag{3.21}$$

$$V^2 = \frac{\epsilon}{\gamma_{\Lambda\Lambda}}\,. \tag{3.22}$$

Зі співвідношень (3.21) випливає рівняння для функції $\Lambda(u)$

$$\pm\sqrt{\epsilon\gamma_{\Lambda\Lambda}}\,\frac{d\Lambda}{\Lambda} = \frac{du}{u}, \tag{3.23}$$

неявний розв'язок якого для випадку $\epsilon\gamma_{\Lambda\Lambda} > 0$ є таким:

$$u = C\exp\int\left(\pm\frac{\sqrt{\epsilon\gamma_{\Lambda\Lambda}}}{\Lambda}\,d\Lambda\right)\,. \tag{3.24}$$

Отже, метрику (3.20) можна звести до вигляду (2.5), у якому всі функції вже не залежать від п'ятої координати Z. Цим завершується доведення п'ятивимірного аналога теореми Біркгофа для $O(1,3)$-симетричних метрик, що допускають конформно-плоскі просторово-часові перетини в п'ятивимірній ґравітації.

З урахуванням теореми Біркгофа та вигляду вектора Кілінґа (3.15) закон збереження (3.9) для метрики (2.5) набирає вигляду

$$\epsilon G = u^2 \left(\frac{d\Lambda}{du}\right)^2 - \Lambda^2 \,. \tag{3.25}$$

Відтак після інтеґрування отримуємо

$$\Lambda = au - \frac{\epsilon G}{4au} \,, \tag{3.26}$$

де a — стала і припускається, що $a > 0$ і $G > 0$. Звідси випливає, що

$$\psi du = \frac{\Lambda}{u}\, du = \left(a - \frac{\epsilon G}{4au^2}\right) du = \left(1 - \frac{\epsilon G}{4a^2u^2}\right) d(au) \,. \tag{3.27}$$

Тому з точністю до масштабного перетворення $u \to \acute{u} = au$ можна покласти

$$\psi = 1 - \frac{\epsilon G}{4u^2} \,. \tag{3.28}$$

При $G < 0$ розв'язок є аналогічним.

Щоб знайти V, використаймо співвідношення (3.22) і (3.19). Звідси знаходимо

$$V^2 = \frac{\epsilon}{\gamma_{\Lambda\Lambda}} = 1 + \frac{\epsilon G}{\Lambda^2} = 1 + \frac{\epsilon G}{u^2\psi^2} = \frac{1 + \epsilon G/4u^2}{1 - \epsilon G/4u^2} \,. \tag{3.29}$$

У результаті, відновлюючи індекс "$_\epsilon$", шукані метрики можна записати так:

$$^{(5)}ds^2 = -\left(\frac{1 + \epsilon G/4u_\epsilon^2}{1 - \epsilon G/4u_\epsilon^2}\right)^2 dZ^2 \tag{3.30}$$

$$+ \left(1 - \frac{\epsilon G}{4u_\epsilon^2}\right)^2 \left(\epsilon\, du_\epsilon^2 - u_\epsilon^2\, {}^{(3)}d\Omega_\epsilon^2\right) .$$

Використовуючи формулу (1.9), ці метрики можна переписати тільки так:

$$^{(5)}ds^2 = -\left(\frac{1 + G/4u^2}{1 - G/4u^2}\right)^2 dZ^2 \tag{3.31}$$

$$+ \left(1 - \frac{G}{4u^2}\right)^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \,,$$

де $u^2 = \epsilon u_\epsilon^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$.

Фізичний зміст цієї космологічної моделі та сталої G стане зрозумілим при вимірній редукції п'ятивимірної дії (2.2). Для цього перепишімо інтервал (3.31) у загальнішій формі

$$^{(5)}ds^2 = {}^{(5)}g_{AB} dx^A dx^B = \acute{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - V^2 dZ^2 \,, \tag{3.32}$$

де $\mu, \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Як було показано вище, умова циліндричности в розглянутому симетричному випадку реалізується динамічно. Це означає, що величини V, $\acute{g}_{\mu\nu}$ у відповідній системі координат не залежать від координати Z. Тому після інтеґрування за z з дії (2.2) отримуємо

$$I^{(4)} = -\frac{1}{16\pi\kappa} \int \sqrt{-{}^{(4)}\acute{g}}\; V\, {}^{(4)}\acute{R}\; d^4x \,, \tag{3.33}$$

де $^{(4)}\acute{R}$ — скалярна кривина стосовно метрики $\acute{g}_{\mu\nu}$, $\kappa = \hat{\kappa}/L$ — редукована ґравітаційна стала, L — деяка константа розмірности довжини.

Метрика (3.31) належить до такого загального класу метрик [17]:

$$^{(5)}ds^2 = -\left(\frac{1 - \psi/\sqrt{6}}{1 + \psi/\sqrt{6}}\right)^2 dz^2 \tag{3.34}$$

$$+ \left(1 + \frac{\psi}{\sqrt{6}}\right)^2 {}^{(4)}ds^{\,2} \,,$$

де ψ — відповідне скалярне поле, $^{(4)}ds^{\,2} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ — фізична метрика простору-часу, а коефіцієнт $\sqrt{6}$ уведений для зручности. У цій параметризації дія (3.33) перетворюється в дію [17]

$$^{(4)}I = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-{}^{(4)}g}$$

$$\times \left\{ \left(1 - \frac{\psi^2}{6}\right) R - g^{\,\mu\nu} \psi_{,\,\mu} \psi_{,\nu} \right\} , \tag{3.35}$$

яка описує взаємодіючі ґравітаційне $g_{\mu\nu}$ та конформно-інваріянтне скалярне ψ поля. Рівняння руху нової системи мають вигляд

$$\left(\Delta - \frac{1}{6} R\right) \psi = 0 \,, \tag{3.36}$$

$$G_{\mu\nu} = 4\pi t_{\mu\nu}(\psi) \equiv 4\pi T_{\mu\nu}(\psi)$$

$$+ \frac{1}{6} \left(G_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \Delta\right) \psi^2 \,, \tag{3.37}$$

$$T_{\mu\nu}(\psi) = \frac{1}{4\pi}\left(\psi_\mu\psi_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\psi)^2\right), \qquad (3.38)$$

де $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, $R_{\mu\nu}$ — тензор Річчі, $t_{\mu\nu}$ — конформно-інваріянтний тензор енерґії-імпульсу скалярного поля ψ, $\Delta = \nabla^\mu\nabla_\mu$, і всі величини обчислюються щодо метрики $g_{\mu\nu}$.

Порівнюючи метрики (3.34) і (3.31), ми одержуємо скалярне поле й фізичну метрику

$$\psi = -\frac{\sqrt{6}}{4}\,\frac{G}{(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2}\,, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\,. \qquad (3.39)$$

Звідси випливає зміст сталої G. Вона визначає інтенсивність джерела конформно-інваріянтного скалярного поля, що еволюціонує на фоні плоского простору-часу. Надалі ми будемо трактувати цю сталу як заряд конформно-інваріянтного скалярного поля ψ.

Для розглянутої моделі фізичний простір-час є плоским $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, а конформний тензор енерґії-імпульсу для нетривіяльного скалярного поля ψ (3.39) обертається в нуль: $t_{\mu\nu}(\psi) = 0$. Якщо це рівняння розглядати як рівняння на власні значення оператора $\hat{t}_{\mu\nu}(\psi) \equiv t_{\mu\nu}(\psi)$, то скалярне поле ψ є власною функцією цього оператора, що відповідає нульовому власному значенню. Тому скалярне поле ψ можна інтерпретувати як класичну нульову моду конформно-інваріянтного тензора енерґії-імпульсу $\hat{t}_{\mu\nu}$ на фоні плоского простору-часу. Плоский простір, як простір нульової кривини, теж можна сприймати як нульову моду рівнянь Айнштайна. На основі цього лоренц-інваріянтний розв'язок рівнянь ЗТВ для взаємодіючих конформно-інваріянтного скалярного і ґравітаційного полів можна трактувати як нульову моду рівнянь ЗТВ або класичний вакуум ЗТВ.

Як було показано вище, $O(1,3)$-симетричний простір Калуци–Кляйна $V^{(5)}$ є $O(1,3)$-симетричною модою рівнянь п'ятивимірної ґравітації (без зовнішніх джерел). Ця модель після вимірної редукції й відповідних конформного відображення і калібрування зводиться до зазначеної чотиривимірної моделі вакууму з конформно-інваріянтним скалярним полем. Тому вакуум ЗТВ можна інтерпретувати як прояв конформно- і лоренц-інваріянтної моди рівнянь п'ятивимірної ґравітації (чи як їх класичну "нульову" моду).

IV. ГЕОМЕТРІЯ МОДЕЛІ ТА УМОВА ЗАМКНЕНОСТИ

Метрика (3.31) має особливість на світловому конусі $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = 0$. Ця особливість розділяє перетин $z = \mathrm{const}$ простору $V^{(5)}$ на дві ділянки: внутрішню частину світлового конуса, коли $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu > 0$, $\epsilon = 1$ (U-ділянка), і зовнішню частину, коли $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu < 0$, $\epsilon = -1$ (V-ділянка), де $\epsilon = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu/|\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu|$. Зазначена особливість має координатний характер. Справді, інваріянт кривини дорівнює

$$I = {}^{(5)}R_{ABCD}\,{}^{(5)}R^{ABCD} = 72G^2\left(u_\epsilon - \frac{\epsilon G}{4u_\epsilon}\right)^{-8}. \quad (4.1)$$

Звідси видно, що $\lim I = 0$, при $u^2 \to 0$ і $\lim I = 0$, при $u^2 \to \pm\infty$. Отже, на світловому конусі та на нескінченності метрики (3.30) і (3.31) є реґулярними. Тому метрики (3.30) з різними значеннями $\epsilon = \pm 1$ можна інтерпретувати як метрики ділянок $U \subset V^{(5)}$ і $V \subset V^{(5)}$, а метрику (3.31) — як аналітичне розширення метрик (3.30) на весь простір $V^{(5)}$.

Уведемо в ділянках U та V координати

$$u = \sqrt{u_{+1}^2} = \sqrt{\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}\,, \qquad (\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu > 0,\, \epsilon = 1)\,, \qquad (4.2)$$

$$v = \sqrt{-u_{-1}^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}\,, \qquad (\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu < 0,\, \epsilon = -1)\,. \qquad (4.3)$$

Тоді ділянку U можна розділити на підзони майбутнього U^+ ($u > 0$) і минулого U^- ($u < 0$). Ділянки U^+, U^-, своєю чергою, синґулярними просторовоподібними поверхнями

$$u^2 = \frac{|G|}{4} \qquad (4.4)$$

розділяються на підзони U^+_+, U^+_- і U^-_+, U^-_- так, що $U^+ = U^+_+ \cup U^+_-$ і $U^- = U^-_+ \cup U^-_-$. Ділянка V синґулярною часоподібною поверхнею

$$v^2 = \frac{|G|}{4} \qquad (4.5)$$

поділяється на підзони V_- і V_+ так, що $V = V_- \cup V_+$. Характер особливости цих поверхонь залежить від знака величини ϵG. Таким чином, маємо такі підзони перетину $z = \mathrm{const}$ простору $V^{(5)}$:

$$U_-^+ = \{u : 0 < u < \sqrt{|G|}/2\}\,, \quad U_+^+ = \{u : \sqrt{|G|}/2 < u < \infty\}\,,$$

$$U_+^- = \{u : -\sqrt{|G|}/2 < u < 0\}\,, \; U_-^- = \{u : -\infty < u < -\sqrt{|G|}/2\}\,,$$

$$V_- = \{v : 0 < v < \sqrt{|G|}/2)\}\,, \quad V_+ = \{v : \sqrt{|G|}/2 < v < \infty\}\,.$$

Відзначимо, що метрики (3.30) і (3.31), так само, як метрика де Сітера (1.12), інваріянтні при інверсії

$$x^\mu = \frac{|G|}{4}\frac{\tilde{x}^\mu}{\tilde{u}^2}\,, \quad u = \frac{|G|}{4\tilde{u}}\,, \quad \tilde{u}^2 = \eta_{\mu\nu}\tilde{x}^\mu\tilde{x}^\nu > 0\,, \quad (4.6)$$

$$x^\mu = \frac{|G|}{4}\frac{\tilde{x}^\mu}{\tilde{v}^2}\,, \quad v = \frac{|G|}{4\tilde{v}}\,, \quad \tilde{v}^2 = -\eta_{\mu\nu}\tilde{x}^\mu\tilde{x}^\nu > 0 \quad (4.7)$$

щодо синґулярних чотиривимірних гіперболоїдів (4.4) і (4.5) відповідно. Ці інверсії індукують відображення ділянок простору $V^{(5)}$

$$U_+^+ \Leftrightarrow U_-^+\,, \quad U_+^- \Leftrightarrow U_-^-\,, \quad (4.8)$$

$$V_+ \Leftrightarrow V_-\,. \quad (4.9)$$

У координатах $\{u,\, z\}$ U-ділянка, згідно з (3.30), описується метрикою

$$^{(5)}ds^2 = -\left(\frac{1 + G/4u^2}{1 - G/4u^2}\right)^2 dz^2 \quad (4.10)$$
$$+ \left(1 - \frac{G}{4u^2}\right)^2 (du^2 - u^2 d\Omega_+^2)\,.$$

Ми вважаємо, що координата u змінюється в ділянці $-\infty < u < \infty$. Гіперболоїди $u^2 = G/4$ є особливостями розглянутої метрики, характер яких залежить від знака скалярного заряду G. При $G < 0$ маємо поверхню екстремальної кривини $I_{\max} = 72/G^2$, а при при $G > 0$ — поверхню синґулярної кривини $\lim I \to \infty$, коли $u^2 \to G/4$.

Перейдімо тепер від координати u до координати T за формулою

$$T = u - \frac{G}{4u}\,. \quad (4.11)$$

Для оберненого перетворення маємо

$$u = \frac{1}{2}\left(T \pm \sqrt{T^2 + G}\,\right)\,. \quad (4.12)$$

У нових координатах $\{z,\, T\}$ метрика (4.10) набирає вигляду

$$^{(5)}ds^2 = -\left(1 + \frac{G}{T^2}\right) dz^2 \quad (4.13)$$
$$+ \left(1 + \frac{G}{T^2}\right)^{-1} dT^2 - T^2\, d\Omega_+^2\,.$$

Уведені координати $\{z,\, T\}$ є аналогом координат кривин розв'язку Шварцшільда ЗТВ у T-ділянці.

Функція $T = T(u)$, відповідно до (4.11), є однозначною функцією параметра u, тоді, як $u = u(T)$ (4.12) — двозначна функція T. Звідси легко бачити, що, якщо $G > 0$, то кожній з ділянок U^+, U^- у координатах $\{z,\, u\}$ відповідає та ж сама ділянка $(-\infty < T < \infty)$ у координатах $\{z,\, T\}$. Отже, ділянки U^+, U^- у координатах $\{z,\, T\}$ ототожнюються.

При $G > 0$ вираз (4.11) щодо інверсії (4.6) змінює знак. Тому відображення ділянок (4.8) супроводжується зміною знака часової координати T. Крім того, підзони U_+^+ і U_-^+, так само, як і підзони U_+^- та U_-^-, міняються місцями. Справжня особливість метрики (4.13) настає в момент часу $T = 0$ ($u = \pm\sqrt{G}/2$) й інваріянтна щодо інверсії (4.6).

Якщо $G < 0$, то вираз (4.11) інваріянтний щодо інверсії (4.6), тому відображення ділянок (4.9) відбувається без зміни знака та значення часової координати T. При відображенні (4.11) ділянки U_-^+ і U_+^+ переходять у ту ж саму ділянку $\sqrt{|G|} < T < \infty$ у координатах $\{z,\, T\}$, в результаті чого відбувається їх накладання. Аналогічно ділянки U_+^- і U_-^- переходять у ділянку $-\infty < T < -\sqrt{|G|}$, що також приводить до їх накладання. Реґулярним поверхням $u = \pm\sqrt{|G|}/2$ відповідають екстремальні значення часу $T = \pm\sqrt{|G|}$ та інваріянта кривини $I = 72/G^2$. Зазначимо, що 3-сфери S^3, які відповідають моментам часу $T = \pm\sqrt{|G|}$ щодо п'ятивимірної метрики (4.13) є ізотропними поверхнями й аналогічні горизонтові подій метрики Шварцшільда. Однак перехід у ділянку $|T| < \sqrt{|G|}$, аналогічний до переходу в T-ділянку розв'язку Шварцшільда ЗТВ, є класично забороненим. Це пов'язано з тим, що зміст координат при цьому змінюється так, що ми повинні зробити заміну $z \to T$, $T \to z$. У цьому випадку метрика залежатиме від п'ятої координати z, що не відповідає умові задачі.

У координатах $\{v,\, z\}$ V-ділянка, відповідно до (3.30), описується метрикою

$$^{(5)}ds^2 = -\left(\frac{1 - G/4v^2}{1 + G/4v^2}\right)^2 dz^2 \quad (4.14)$$

$$- \left(1 + \frac{G}{4v^2}\right)^2 (dv^2 + v^2 d\Omega_-^2)\,.$$

Ми вважаємо, що координата v, яка має просторовий характер, змінюється в ділянці $0 < v < \infty$. Точка $v = 0$ є реґулярною точкою, тоді як гіперболоїди $v^2 = G/4$ є особливими поверхнями розглянутого простору. Характер особливости цих поверхонь залежить від знака скалярного заряду G. При $G > 0$ маємо поверхню екстремальної кривини $I_{\max} = 72/G^2$, а при при $G < 0$ — поверхню синґулярної кривини $\lim I \to \infty$, коли $v^2 \to -G/4$.

Перейдімо від координати v до координати R за формулою

$$R = v + \frac{G}{4v}\,. \tag{4.15}$$

Для оберненого перетворення маємо

$$v = \frac{1}{2}\left(R \pm \sqrt{R^2 - G}\,\right). \tag{4.16}$$

У нових координатах $\{z,\, R\}$ метрика (4.14) набирає вигляду

$$^{(5)}ds^2 = -\left(1 - \frac{G}{R^2}\right) dz^2 - \left(1 - \frac{G}{R^2}\right)^{-1} dR^2 - R^2\, d\Omega_-^2\,. \tag{4.17}$$

Уведені координати $\{z,\, R\}$ є аналогом координат кривин розв'язку Шварцшільда ЗТВ у R-ділянці. Координата R має зміст радіуса тривимірної псевдосфери $S(1,2)$ з індукованою метрикою $R^2 d\Omega_-^2$, що визначається формулою (1.11).

При $G > 0$ формула (4.15) інваріянтна щодо інверсії (4.7), тому відображення ділянок (4.9) відбувається без зміни значення радіяльної координати R. При перетворенні (4.15) відбувається накладання ділянок V_- і V_+, оскільки вони відображаються в ту ж саму ділянку $\sqrt{G} \le R < \infty$. При цьому мінімальне значення радіуса $R = \sqrt{G}$ псевдосфери $S(1,2)$ відповідає реґулярній поверхні $v = \sqrt{G}/2$ з екстремальним значенням інваріянта кривини $I_{\max} = 72/G^2$. Стосовно п'ятивимірної метрики (4.17) псевдосфера $R = \sqrt{G}$ є ізотропною й аналогічною до горизонту подій метрики Шварцшільда.

Ділянка $R < \sqrt{G}$ в координатах кривин $\{z,\, R\}$ є нефізичною через порушення сиґнатурних умов. Таким чином, ми маємо ізотропну горловину радіуса $R = \sqrt{G}$ у просторі, що описується метрикою (4.17). Ділянка $R < \sqrt{G}$ випадає з ділянки визначення розглянутого простору, що характерно для так званої топологічної текстури [18]. У цьому випадку існують 3-сфери, які не можна стиснути в точку. Зазначимо, що для нашої моделі ми маємо екзотичний випадок 3-псевдосфер $S(1,2)$, що не стягуються в точку.

Якщо $G < 0$, то вираз (4.15) при інверсії (4.7) змінює знак. Тому відображення ділянок (4.9) супроводжується зміною знака просторової координати R. Крім того, підзони V_- і V_+ міняються місцями. Ділянка зміни $0 < v < \infty$ змінної v відповідає ділянці $-\infty < R < \infty$ зміни координати R. При цьому "центр" $R = 0$ для метрики (4.17) відповідає поверхні $v = \sqrt{|G|}/2$ для метрики (4.14) і є справжньою особливістю, інваріянтною щодо інверсії (4.7).

Розгляньмо умови реґулярности п'ятивимірної метрики (4.17) простору $V^{(5)}$ на сфері $R = \sqrt{G}$ $(G > 0)$. Для цього в ділянці $R > \sqrt{G}$ уведемо нову координату

$$\rho = \sqrt{G\,(1 - G/R^2)}\,. \tag{4.18}$$

Тоді метрику (4.17) можна переписати так:

$$^{(5)}ds^2 = -\left\{\frac{\rho^2}{G}\, dz^2 + \left(\frac{R^2}{G}\right)^3 d\rho^2\right\} - R^2\, d\Omega_-^2\,. \tag{4.19}$$

В околі сфери $R = \sqrt{G}$ перетини $y^i = \mathrm{const}$ мають метрику

$$ds^2 = \rho^2\, d\alpha^2 + d\rho^2\,, \tag{4.20}$$

де $\alpha = z/\sqrt{G}$. Для того, щоб уникнути конічної синґулярности при $\rho = 0$ (або при $R = \sqrt{G}$), ми повинні вимагати, щоб α змінювалася в межах $0 \le \alpha < 2\pi$. Це приводить до того, що розглянутий простір повинен бути замкнений за координатою z. Причому, значення z належать інтервалові $0 \le z < 2\pi\sqrt{G}$. Таким чином, умова реґулярности перетину $y^i = \mathrm{const}$ на "горизонті" $R = \sqrt{G}$ зумовлює умову замкнености простору $V^{(5)}$ із періодом $L = 2\pi\sqrt{G}$ за п'ятою координатою z. У цьому випадку природно перейти до кутової координати α за формулою

$$z = \alpha\sqrt{G} \qquad (0 \le \alpha < 2\pi)\,. \tag{4.21}$$

Тоді метрики (4.17) і (4.14) можна записати так:

$$^{(5)}ds^2 = -\left(1 - \frac{G}{R^2}\right) G\, d\alpha^2 - \left(1 - \frac{G}{R^2}\right)^{-1} dR^2 + R^2\, d\Omega_-^2\,, \tag{4.22}$$

$$^{(5)}ds^2 = -\left(\frac{1 - G/4v^2}{1 + G/4v^2}\right)^2 G\, d\alpha^2 \tag{4.23}$$

$$- \left(1 + \frac{G}{4v^2}\right)^2 (dv^2 - v^2 d\Omega_-^2)\,.$$

З нашого розгляду випливає, що при $G > 0$ метрика (4.17) перетину $y^i = \text{const}$ $(i = 0, 1, 2)$ простору $V^{(5)}$ являє собою метрику напівнескінченної конічної поверхні обертання. Ця конічна поверхня має гладко закруглену вершину і відкрита на нескінченності. Радіус цієї конічної поверхні, згідно з (4.22), дорівнює $r_R = \sqrt{G(1 - G/R^2)}$ і є в ділянці значень $0 < r_R < r_\infty = \sqrt{G}$ при зміні координати R в межах $\sqrt{G} < R < \infty$. Максимальне значення $r_c = r_\infty = \sqrt{G}$ можна трактувати як радіус компактифікації r_c п'ятивимірного простору $V^{(5)}$.

Оскільки множини $v^2 = -u^2 > 0$ і $u^2 > 0$ є підзонами одного й того ж простору $V^{(5)}$ з метриками (4.10) і (4.14) або (3.30), то умова (4.21) повинна виконуватися для всього простору $V^{(5)}$. Тому, згідно з (3.31), при $G > 0$ можна покласти

$$^{(5)}ds^2 = -\left(\frac{1 + G/4u^2}{1 - G/4u^2}\right)^2 G\, d\alpha^2 \qquad (4.24)$$

$$+ \left(1 - \frac{G}{4u^2}\right)^2 \eta_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu\,,$$

де $u^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ и $0 \le \alpha < 2\pi$.

Розглянутий простір $V^{(5)}$ при $G > 0$ топологічно еквівалентний $R^2 \times S(1, 2)$. Він описує лоренц-інваріантну космологічну модель п'ятивимірної ґравітації, для якої умови циліндричности й замкнености виконуються динамічно. Отже, простір Калуци–Кляйна з метрикою (4.24) є лоренц-інваріантною модою вакуумних рівнянь п'ятивимірної ґравітації. Ця модель після вимірної редукції зводиться до конфіґурації ЗТВ з конформно-інваріантним скалярним полем, що має нульовий конформно-інваріантиний тензор енерґії-імпульсу на фоні плоского простору-часу. Тому отриманий розв'язок описує модель вакуумоподібної конфіґурації ЗТВ без космологічної сталої. Отже, вакуум ЗТВ можна трактувати як прояв лоренц-інваріантної моди п'ятивимірної ґравітації. Модель не є альтернативою до стандартної моделі вакууму з космологічною сталою. У зв'язку з цим виникає задача побудови й дослідження "композиції" цих моделей, яка буде розглянута в наступних працях.

[1] А. Д. Чернин, Усп. физ. наук **171**, 1153 (2001).
[2] V. Sahni, A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D **9**, 373 (2000).
[3] Я. Б. Зельдович, Усп. физ. наук **95**, 209 (1968).
[4] Э. Б. Глинер, Журн. эксп. теор. физ. **49**, 542 (1965); ДАН СССР **192**, 771 (1970).
[5] Э. Б. Глинер, И. Г. Дымникова, Письма Астрон. журн. **1**, 7 (1975).
[6] В. Д. Гладуш, Теор. мат. физ. **136**, 480 (2003).
[7] B. Karliga, Contributions to Algebra and Geometry **37**, 329 (1996).
[8] А. З. Петров, *Новые методы в общей теории относительности* (Наука, Москва, 1966).
[9] Ф. Гюрши, *Введение в теорию групп. В кн.: Теория групп и элементарные частицы*, под ред. Д. Иваненко (Мир, Москва, 1967).
[10] М. Б. Менский, *Метод индуцированных представлений* (Наука, Москва, 1976).
[11] J. M. Overduin, P. S. Wesson, Phys. Rept. **283**, 303 (1997).
[12] Д. Крамер, Х. Штефани, М. Мак-Каллум, Э. Херльт, *Точные решения уравнений Эйнштейна*, под ред. Э. Шмутцера (Энергоиздат, Москва, 1982).
[13] V. P. Frolov, I. D. Novikov, *Black Hole Pysics: Basic Concepts and New Developments* (Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic, 1998).
[14] C. W. Misner, D. H. Sharp, Phys. Rev. B **136**, 571 (1964).
[15] W. C. Hernandes and G. C. Misner, Astrophys. J. **143**, 452 (1968);
M. E. Cahill and G. C. McVittie, J. Math. Phys. **11**, 1382 (1970).
[16] E. A. Martinez, J. W. York, Jr., Phys. Rev. D **40**, 2124 (1989).
[17] В. Д. Гладуш, Изв. вузов, физика **11**, 58 (1979).
[18] A. Gangui, preprint astro-ph/0110285, (2001).

THE MODEL OF THE VACUUM CONFIGURATION AND THE KALUZA–KLEIN SPACE

V. D. Gladush, M. V. Galadgyi
Dnipropetrovsk National University, 13 Naukova St.,
Dnipropetrovsk 49050, Ukraine

Within the framework of the five-dimensional gravity the Lorentz invariant cosmological model is constructed. It is proved that the Kaluza–Klein conditions are fulfilled by virtue the vacuum equations of the five-dimensional gravity. Consequently, the Kaluza–Klein space is implemented dynamically as the Lorentz invariant mode of the five-dimensional gravity. After the dimensional reduction and conformal map the model is reduced to the 4-dimensional configuration with the conformal scalar field, which has the vanishing conformally invariant energy-momentum tensor on the flat space-time background. We can treat this zero mode of the equations of the interacting conformally invariant scalar and gravitational fields as vacuum configuration of General Relativity without the cosmological constant. Thus, one can treat the vacuum of General Relativity as manifestation of the conformally and Lorentz invariant mode of the five-dimensional gravity and, naturally, Kaluza–Klein theory.