ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 10, № 1 (2006) с. 12–23

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 10, No. 1 (2006) p. 12–23

ЛІНІЙНА ФЛЮКТУАЦІЙНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

О. Й. Соколовський, А. А. Ступка
Дніпропетровський національний університет
вул. Наукова, 13, Дніпропетровськ, Україна, 49050
(Отримано 15 жовтня 2005 р.; в остаточному вигляді — 8 лютого 2006 р.)

З точністю до другого порядку за взаємодією досліджено електромагнетне поле, що слабко та повільно взаємодіє з нерелятивістською плазмою. Розгляд виконано на основі методу скороченого опису Боголюбова, який дав змогу побудувати зв'язану систему рівнянь для середнього поля та його бінарних кореляцій як нових незалежних змінних. У рівняннях Максвелла та відповідних часових рівняннях для кореляцій поля запроваджено нові матеріяльні коефіцієнти, які описують речовину в термінах тільки просторової дисперсії. Показано, що рівняння для кореляційних функцій поля відповідають гіпотезі Онзаґера. Одержані результати зіставлено з тими, що випливають із наближення самоузгодженого поля, побудованого на основі кінетичного рівняння Власова. Запропоновано процедуру перерахування ефектів часової дисперсії стандартних матеріяльних коефіцієнтів теорії самоузгодженого поля у просторову. Доведено тотожність обох підходів в основному наближенні за взаємодією. Установлено існування хвиль кореляцій поля, які не зводяться до хвиль квадратів середнього поля.

Ключові слова: метод скороченого опису, рівняння для кореляційних моментів, електромагнетне поле, поперечні плазмові хвилі.

PACS number(s): 05.40.−a, 41.90.+e, 52.35.Lv

I. ВСТУП

Теорія плазми й електродинаміка тяжіють до розгляду швидких процесів взаємодії поля та середовища порівняно з процесами в середовищі. Тоді є суттєвою часова нелокальність рівнянь — часова дисперсія. Коли ж, навпаки, основні процеси в середовищі є значно швидшими, ніж взаємодія з електромагнетним (ЕМ-) полем, можна вважати суттєвими для опису стану системи в якийсь час тільки значення змінних, узятих у цей самий час. Отже, можна вважати такі ЕМ процеси марковськими. Розгляньмо важливий приклад такої системи — класичну плазму без зіткнень та ЕМ-поле всередині неї. Тут характерним процесом середовища є вільний рух із тепловою швидкістю $v_T = \sqrt{3T/m}$, а за характерну частоту взаємодії слід узяти плазмову частоту $\Omega = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ (n — густина кількости частинок). Припустімо, що поле має характерне хвильове число k. Тоді характерною частотою середовища буде частота Черенкова kv_T, а умовою марковости процесів у системі — нерівність $kv_T \gg \Omega$. Зрозуміло, що для використання газового наближення потрібно перевищення кінетичної енерґії заряду над його енерґією в полі. Наше завдання полягає в тому, щоб у зазначеній ситуації побудувати повністю мікроскопічну теорію, спираючись на метод скороченого опису (МСО) нерівноважних станів Боголюбова [1,2] та квазірелятивістську квантову електродинаміку в калібровці Гамільтона $\varphi(x) = 0$. У такій калібровці не виникає потреби позбавлятися нединамічної змінної $\varphi(x)$, а рівняння Гамільтона природно відповідають рівнянням Максвелла. Водночас ми розширимо інформацію про ЕМ-поле, запровадивши як незалежні змінні кореляційні моменти поля, що є аналогічними до широковідомих змінних Ґлаубера [3]. Так побудуємо теорію, яку можна назвати флюктуаційною електродинамікою.

II. ГАМІЛЬТОНОВА МЕХАНІКА ЗАДАЧІ

Розгляньмо кінетику ЕМ-поля у класичному рівноважному середовищі із заряджених частинок (плазмі, термостаті), уважаючи процеси в системі низькоенерґетичними. Це дає змогу обрати функцію Гамільтона системи у стандартному вигляді [2]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \quad \hat{H}_0 = \hat{H}_s + \hat{H}_b,$$
$$\hat{H}_{\text{int}} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \tag{1}$$

де

$$\hat{H}_s = \frac{1}{8\pi}\int d^3x \left(\hat{E}^2(x) + \hat{B}^2(x)\right),$$
$$\hat{H}_1 = -\frac{1}{c}\int dx\, \hat{A}_n(x)\, \hat{j}_n(x),$$
$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2c^2}\int dx\, \hat{A}^2(x)\, \hat{\chi}(x). \tag{2}$$

Функцію Гамільтона термостата $\hat{H}_b$ слід уважати кінетичною енерґією частинок, взаємодія між якими відбувається через ЕМ-поле й описується внесками (2). Відповідно до сказаного у вступі вважаємо, що внески в гамільтоніян $\hat{H}_1$, $\hat{H}_2$ мають перший та другий порядок малости. У підході, який пропонується, немає різниці між класичним чи квантовим розумінням підсистеми ЕМ-поля. Але для загальности всі обчислення до усереднення проведемо у квантовій картині. У (2) входять оператори ЕМ-поля в гамільтоновій калібровці: $\hat{B} = \operatorname{rot}\hat{A}$, $\hat{E} = -\dot{\hat{A}}/c$, густина струму зарядів $\hat{j}_n(x)$ та допоміжний оператор $\hat{\chi}(x) = \sum_a e_a^2 \hat{n}_a(x)/m_a$ ($\hat{n}_a(x)$, m_a, e_a — оператор густини кількости частинок, маса й заряд частинок a-ої компоненти термостата ($e_a = z_a e, e > 0$); $\omega_k = ck$). Поперечне ЕМ-поле будемо описувати напруженістю електричного й індукцією магнетного полів $E_n(x,t)$, $B_n(x,t)$ та бінарними флюктуаціями цих полів $(E_n^x E_l^{x'})^t$, $(E_n^x B_l^{x'})^t$, $(B_n^x B_l^{x'})^t$, які визначено формулами

$$
\begin{aligned}
E_n(x,t) &= \operatorname{Sp}\rho(\eta(t))\,\hat{E}_n(x),\\
B_n(x,t) &= \operatorname{Sp}\rho(\eta(t))\,\hat{B}_n(x),\\
(a^x b^{x'})^t &= \operatorname{Sp}\rho(\eta(t))\left\{\hat{a}(x),\hat{b}(x')\right\}\\
&\quad - 2\operatorname{Sp}\rho(\eta(t))\,\hat{a}(x)\operatorname{Sp}\rho(\eta(t))\,\hat{b}(x'). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Тут $\hat{a}(x), \hat{b}(x)$ — довільні локальні оператори, $\{\hat{a}(x), \hat{b}(x')\} = \hat{a}(x)\hat{b}(x') + \hat{b}(x')\hat{a}(x)$ — антикомутатор, який запроваджено для врахування квантових властивостей. Усі наведені змінні позначаємо через $\eta_a(t)$ (a — номер змінної) і називаємо параметрами скороченого опису (ПСО) системи. Ніяких принципових ускладнень для опису системи вищими кореляційними моментами не існує, але для наочности обмежимось лише першими двома. Векторний потенціял $\hat{A}_n(x,t)$ як узагальнена координата ЕМ-поля й відповідний узагальнений імпульс $\hat{P}_n(x) = -\hat{E}_n(x)/4\pi c$ комутують за правилом

$$[\hat{A}_n(x), \hat{P}_l(x')] = i\hbar\delta(x-x')\delta_{nl}. \qquad (4)$$

Зрозуміло, що у випадку класичного поля комутатор квантовомеханічних операторів замінюється дужками Пуассона. Для усереднення динамічних змінних потрібний статистичний оператор (СО) системи $\rho(t)$, що задовольняє рівняння Ліувілля

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)] \equiv \mathbf{L}\rho(t) \qquad (5)$$

($\hat{H}$ — оператор Гамільтона, $\mathbf{L}$ — оператор Ліувілля). Він дає повний опис стану системи і визначає ПСО

$$\eta_a(t) = \operatorname{Sp}\rho(t)\hat{\eta}_a. \qquad (6)$$

Запишімо рівняння руху для ПСО на основі рівняння Ліувілля (5). Для цього нам простіше використати шредингерівські рівняння руху для операторів ЕМ-поля, які мають вигляд [1]

$$\dot{\hat{\mathbf{E}}} = c\operatorname{rot}\hat{\mathbf{B}} - 4\pi\hat{\mathbf{J}}, \quad \dot{\hat{\mathbf{B}}} = -c\operatorname{rot}\hat{\mathbf{E}}, \qquad (7)$$

де подовжений оператор струму $\hat{J}_n(x)$ визначається формулою

$$\hat{J}_n(x) \equiv \hat{j}_n(x) - \frac{1}{c}\hat{A}_n(x)\,\hat{\chi}(x). \qquad (8)$$

Використовуючи означення (6), приходимо до відповідних часових рівнянь для ПСО

$$\dot{\mathbf{E}} = c\operatorname{rot}\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}, \quad \dot{\mathbf{B}} = -c\operatorname{rot}\mathbf{E}, \qquad (9)$$

де позначено

$$J_n(x,t) = \operatorname{Sp}\rho(t)\hat{J}_n(x). \qquad (10)$$

Рівняння Максвелла (9) фактично є рівняннями Гамільтона для узагальненої координати $A_n(x,t)$ та відповідного узагальненого імпульсу $P_n(x,t)$. Рівняння для кореляційних моментів будуються на основі (7) множенням на відповідну кількість операторів, усередненням та центруванням. Наведемо результат для других центральних моментів

$$
\begin{aligned}
\partial_t(E_n^x E_l^{x'})^t &= c\operatorname{rot}_n(\mathbf{B}^x E_l^{x'})^t + c\operatorname{rot}'_l(E_n^x \mathbf{B}^{x'})^t - 4\pi\left\{(J_n^x E_l^{x'})^t + (E_n^x J_l^{x'})^t\right\},\\
\partial_t(E_n^x B_l^{x'})^t &= c\operatorname{rot}_n(\mathbf{B}^x B_l^{x'})^t - c\operatorname{rot}'_l(E_n^x \mathbf{E}^{x'})^t - 4\pi(J_n^x B_l^{x'})^t,\\
\partial_t(B_n^x E_l^{x'})^t &= -c\operatorname{rot}_n(\mathbf{E}^x E_l^{x'})^t + c\operatorname{rot}'_l(B_n^x \mathbf{B}^{x'})^t - 4\pi(B_n^x J_l^{x'})^t,\\
\partial_t(B_n^x B_l^{x'})^t &= -c\operatorname{rot}_n(\mathbf{E}^x B_l^{x'})^t - c\operatorname{rot}'_l(B_n^x \mathbf{E}^{x'})^t. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Щоб наповнити змістом рівняння (9) та (11), потрібні матеріяльні рівняння, які виражають середній струм та кореляційні функції поля зі струмом через ПСО. Для цього необхідно знайти конкретний вираз для $\rho(t)$, що стандартно буде проведено на основі МСО.

III. СТАТИСТИЧНА МЕХАНІКА ЗАДАЧІ

A. Метод скороченого опису

Згідно з ідеєю Боголюбова, за наявности в системі декількох характерних часів її еволюція проходить через відповідні етапи. На цих етапах для опису системи можна застосовувати відносно вузький набір параметрів $\eta_a(t)$. Припустімо, що цей скорочений опис є при $t \geq 0$. Тоді, згідно з функціональною гіпотезою Боголюбова, СО системи (розв'язок рівняння (5)) має структуру

$$\rho(t) = \rho(\eta(t)). \tag{12}$$

ПСО $\eta_a(t)$ задовольняють рівняння вигляду

$$\dot{\eta}_a(t) = L_a(\eta(t)), \quad L_a(\eta) \equiv -\operatorname{Sp}\rho(\eta)\,\mathbf{L}\hat{\eta}_a, \tag{13}$$

які аналогічні рівнянням (9) та (11). СО системи $\rho(\eta)$ треба шукати зі співвідношень

$$\sum_a \frac{\partial\rho(\eta)}{\partial\eta_a}L_a(\eta) = \mathbf{L}\rho(\eta), \quad \operatorname{Sp}\rho(\eta)\,\hat{\eta}_a = \eta_a, \tag{14}$$

перше з яких є рівнянням Ліувілля (5) на етапі скороченого опису, а друге — означенням ПСО.

Як показав Боголюбов, рівняння (14) не визначають однозначно $\rho(\eta)$. Їх треба доповнити граничною умовою, у якій йдеться про еволюцію системи в майбутнє. Як граничну умову оберемо функціональну гіпотезу, записану для довільного початкового стану ρ_0 і взяту в нульовому наближенні за взаємодією. Урахуємо, що в довільному початковому стані ρ_0 система має статистичний оператор $\rho(\eta(t))$ після перебігу деякого часу τ_0. Тому в нульовому наближенні за взаємодією, тобто для еволюції з основним внеском в оператор Гамільтона $\hat{H}_0$, з (1)маємо

$$e^{t\mathbf{L}_0}\rho_0 \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} e^{t\mathbf{L}_0}\rho^{(0)}\left(\eta^{(0)}(0)\right) = \rho^{(0)}\left(\eta^{(0)}(t)\right) \tag{15}$$

(оператор Ліувілля $\mathbf{L}_0$ відповідає гамільтоніянові $\hat{H}_0$). Тут $\rho^{(0)}(\eta)$ є розв'язком рівняння Ліувілля з гамільтоніяном H_0 та дає нульове із взаємодії наближення до $\rho(\eta)$, а $\eta_a^{(0)}(t)$ задовольняє рівняння

$$\dot{\eta}_a^{(0)}(t) = L_a^{(0)}\left(\eta^{(0)}(t)\right), \tag{16}$$

$$L_a^{(0)}(\eta) \equiv -\operatorname{Sp}\rho^{(0)}(\eta)\,\mathbf{L}_0\hat{\eta}_a,$$

яке випливає з (13). Зрозуміло, що $\eta_a^{(0)}(t)$ в (15) залежить від ρ_0. Розгляньмо далі модель Пелетмінського–Яценка [1], у якій оператори ПСО задовольняють умову

$$\mathbf{L}_0\hat{\eta}_a = -i\sum_a c_{ab}\hat{\eta}_b, \tag{17}$$

де c_{ab} — числові коефіцієнти. Тоді (16), очевидно, дає

$$\eta_a^{(0)}(t) = \sum_b e^{it\mathbf{c}}_{ab}\eta_b^{(0)}(0). \tag{18}$$

Початкову умову $\eta_a^{(0)}(0)$ можна знайти з (15), помножуючи його на $\hat{\eta}_a$ і беручи слід Sp від обох частин цієї формули

$$\eta_a^{(0)}(0) = \operatorname{Sp}\rho_0\hat{\eta}_a. \tag{19}$$

Отже, співвідношення (15) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} &e^{t\mathbf{L}_0}\rho_0 \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} e^{t\mathbf{L}_0}\rho^{(0)}(\operatorname{Sp}\rho_0\hat{\eta}) \\ &= \rho^{(0)}\left(e^{it\mathbf{c}}\operatorname{Sp}\rho_0\hat{\eta}\right), \end{aligned} \tag{20}$$

у які входить СО, що задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} &\sum_{a,b}\frac{\partial\rho^{(0)}(\eta)}{\partial\eta_a}ic_{ab}\eta_b = \mathbf{L}\rho^{(0)}(\eta), \\ &\operatorname{Sp}\rho^{(0)}(\eta)\,\hat{\eta}_a = \eta_a. \end{aligned} \tag{21}$$

Співвідношення (20) і є функціональною гіпотезою, узятою в нульовому наближенні теорії збурень для довільного початкового стану ρ_0. Ідучи за [1], будемо називати це співвідношення ергодичним. Еволюція в (20) з оператором Ліувілля $\mathbf{L_0}$, у який не входить взаємодія, не може довести систему до рівноваги, тому СО $\rho^{(0)}$ є квазірівноважним.

З (20) можна отримати граничну умову для рівняння (14) для $\rho(\eta)$, замінивши в ній ρ_0 на $\rho(\eta)$ та η на $e^{-it\mathbf{c}}\eta$

$$\lim_{\tau\to+\infty} e^{\tau\mathbf{L}_0}\rho\left(e^{-i\tau\mathbf{c}}\eta\right) = \rho^{(0)}(\eta). \tag{22}$$

Записуючи тепер це співвідношення в інтеґральній формі та враховуючи рівняння Ліувілля (14), звичайним шляхом [1] отримаємо таке інтеґральне рівняння для СО $\rho(\eta)$:

$$\rho(\eta) = \rho^{(0)}(\eta) + \int\limits_0^\infty d\tau e^{\tau \mathbf{L}_0} \times \left\{ \mathbf{L}_{\rm int}\rho(\eta) - \sum_f \frac{\partial \rho(\eta)}{\partial \eta_a} \tilde{L}_a(\eta) \right\}_{\eta \to e^{-i\tau \mathbf{c}}\eta}, \quad (23)$$

де позначено

$$\tilde{L}_a(\eta) = -\operatorname{Sp} \rho(\eta) \mathbf{L}_{\rm int} \hat{\eta}_a \quad (24)$$

(оператор Ліувілля $\mathbf{L}_{\rm int}$ відповідає $\hat{H}_{\rm int}$). Це рівняння розв'язується в теорії збурень за взаємодією, його вперше отримали Пелетмінський та Яценко (див. [1]).

B. Конкретизація для ЕМ-поля

Використовуючи операторні рівняння Максвелла для вільного поля, легко перевірити, що оператори ПСО $\hat{\eta}_a$

$$\hat{E}_n(x), \quad \hat{B}_n(x), \quad \left\{\hat{E}_n(x), \hat{E}_l(x')\right\},$$

$$\left\{\hat{E}_n(x), \hat{B}_l(x')\right\}, \quad \left\{\hat{B}_n(x), \hat{B}_l(x')\right\}$$

задовольняють умову (17), тобто зазначений скорочений опис можна розглянути в межах моделі Пелетмінського–Яценка. СО нульового наближення $\rho^{(0)}(\eta)$ з урахуванням (21) можна записати у вигляді

$$\rho^{(0)}(\eta) = \rho_q(\eta) w, \quad \operatorname{Sp}_s \rho_q(\eta) \hat{\eta}_a = \eta_a;$$
$$w = e^{\frac{F-H_b}{T}}, \qquad \operatorname{Sp} w = 1, \quad (25)$$

де w — рівноважний СО термостата, Sp_s — слід у просторі станів поля, а $\rho_q(\eta)$ — квазірівноважний СО вільного ЕМ-поля. Вираз для $\rho^{(0)}(\eta)$ (25) знаходимо відповідно до принципу просторового ослаблення кореляцій. Справді, формула (22) має вигляд граничної умови повного ослаблення кореляцій Боголюбова і враховує, що підсистема заряджених частинок перебуває в рівновазі, утворюючи термостат [2]. Це пояснюється тим, що вільна еволюція з оператором Гамільтона $\hat{H}_0$ руйнує кореляції між підсистемою ЕМ-поля й середовищем. Зауважимо також, що при розрахунку правих частин $L_a(\eta)$ рівнянь для ПСО до необхідного нам у цій праці другого порядку теорії збурень за взаємодією конкретний вираз для СО $\rho_q(\eta)$ не потрібен, оскільки достатньо використовувати другу формулу з (25)). Водночас відповідно до загального результату, доведеного в [1] для моделі Пелетмінського–Яценка,

$$\rho_q(\eta) = e^{\Omega(\eta) - \sum_a Z_a(\eta)\hat{\eta}_a}, \quad \operatorname{Sp} \rho_q(\eta) = 1, \quad (26)$$

де функції $Z_a(\eta)$ визначаються другою формулою.

Зрозуміло, що для обчислення середнього струму в (10) потрібний розв'язок інтеґрального рівняння (23). Обчислення з урахуванням (2) та (25) дають з точністю до внесків першого порядку малости включно

$$\rho(\eta) = \rho_q(\eta) w + \frac{i}{c\hbar} \int\limits_{-\infty}^0 d\tau \times \int dx \left[\hat{A}_n(x,\tau) \hat{j}_n(x,\tau), \rho_q(\eta) w\right], \quad (27)$$

де запроваджено такі оператори в картині взаємодії:

$$\hat{j}_n(x,\tau) \equiv e^{-\tau \mathbf{L}_0} \hat{j}_n(x), \; \hat{A}_n(x,\tau) = e^{-\tau \mathbf{L}_0} \hat{A}_n(x). \quad (28)$$

У (27) прийнято до уваги, що струм у рівновазі відсутній $\operatorname{Sp}_b w \hat{j}_n(x) = 0$ (Sp_b — слід у просторі станів термостата). Розгляньмо комутатор з (27)

$$\int\limits_{-\infty}^0 d\tau \int dx \left[\hat{A}_n(x,\tau) \hat{j}_n(x,\tau), \rho_q(\eta) w\right]$$
$$= \int\limits_{-\infty}^0 d\tau \int dx \left(\left[\hat{A}_n(x,\tau), \rho_q(\eta)\right] \hat{j}_n(x,\tau) w + \rho_q(\eta) \hat{A}_n(x,\tau) \left[\hat{j}_n(x,\tau), w\right] \right). \quad (29)$$

Другий у (29) комутатор зі СО Ґіббса дає похідну через запровадження інтеґрування [1]

$$\left[\hat{j}_n(x,\tau), w(H_0)\right] = \int\limits_{-1}^0 d\lambda\, w^\lambda \left[\hat{j}_n(x,\tau), \ln w\right] w^{1-\lambda} = -i\hbar\beta \int\limits_{-1}^0 d\lambda\, w^\lambda \frac{d\hat{j}_n(x,\tau)}{d\tau} w^{1-\lambda}, \quad (30)$$

($\beta = T^{-1}$). Тоді, інтеґруючи частинами та враховуючи, що з умови (20) нижня межа зникає, замість (27) маємо

$$\rho(\eta) = \rho_q(\eta)\,w + \frac{i}{c\hbar}\int_{-\infty}^{0} d\tau \int dx \left[\hat{A}_n(x,\tau), \rho_q(\eta)\right]\hat{j}_n(x,\tau)\,w$$

$$+\,\beta\int_{-\infty}^{0} d\tau \int dx \int_{-1}^{0} d\lambda \rho_q(\eta)\,\hat{E}_n(x,\tau)\,\hat{j}_n(x,\tau,\lambda)\,w + +\frac{\beta}{c}\int dx \int_{-1}^{0} d\lambda \rho_q(\eta)\,\hat{A}_n(x)\,\hat{j}_n(x,\lambda)\,w, \tag{31}$$

($\hat{A}(\lambda) \equiv w^{\lambda}\hat{A}w^{-\lambda}$).

Далі обмежимось випадком класичного середовища. Обчислення середнього струму (10) за допомогою (31) дає

$$J_n(x) \equiv \beta\int_{-\infty}^{0} d\tau \int dx' I_{nm}(x-x',\tau)\,\mathrm{Sp}_s\,\rho_q(\eta)\,\hat{E}_m(x',\tau) + \frac{\beta}{c}\int dx' I_{nm}(x-x',0)\,A_m(x') - \frac{1}{c}A_n(x)\,\chi,$$

де запроваджено кореляційну функцію струмів

$$I_{nl}(x,t) = \mathrm{Sp}_b\,w\hat{j}_n(0)\,\hat{j}_l(x,t)\,. \tag{32}$$

Легко переконатися, що для максвеллівської плазми фур'є-образ цієї функції (32) є таким:

$$I_{nm}(\mathbf{k},\mathbf{t}) = \sum_a e_a^2 \int d^3\upsilon \upsilon_n \upsilon_m f_a^0(\upsilon)\,e^{it\mathbf{k}\mathbf{v}}, \tag{33}$$

де

$$f_a^0 = n_a\left(\frac{m_a}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_a\upsilon^2}{2T}}.$$

Звідси видно, що

$$\beta I_{nm}(x,t=0) = \delta(x-x')\,\delta_{nm}\chi,$$

і матеріяльне рівняння для струму набирає вигляду

$$J_n(x) = \beta\int_{-\infty}^{0} d\tau$$

$$\times \int dx' I_{nm}(x-x',\tau)\,\mathrm{Sp}_s\,\rho_q(\eta)\,\hat{E}_m(x',\tau). \tag{34}$$

Використовуючи рівняння Максвелла для вільного ЕМ-поля, прийдемо до таких мікроскопічних виразів для полів у зображенні взаємодії:

$$\hat{A}_n(x,t) = e^{-t\mathbf{L}_0}\hat{A}_n(x) = \int dx'\left(\mu_{nl}(x-x',t)\hat{A}_l(x') + \nu_{nl}(x-x',t)\hat{E}_l(x')\right),$$

$$\mu_{nl}(k,t) = \tilde{k}_n\tilde{k}_l + \tilde{\delta}_{nl}\cos\omega_k t, \quad \nu_{nl}(k,t) = -\tilde{k}_n\tilde{k}_l ct - \tilde{\delta}_{nl}\frac{\sin\omega_k t}{k};$$

$$\hat{E}_l(x,t) = e^{-t\mathbf{L}_0}\hat{E}_l(x) = \int dx'\left(\lambda_{lm}(x-x',t)\hat{B}_m(x') + \mu_{lm}(x-x',t)\hat{E}_m(x')\right),$$

$$\lambda_{nl}(k,t) = i\varepsilon_{nlm}\tilde{k}_m\sin\omega_k t, \quad (\tilde{k}_n \equiv k_n/k, \quad \tilde{\delta}_{nl} \equiv \delta_{nl} - \tilde{k}_n\tilde{k}_l, \quad \omega_k = ck). \tag{35}$$

У цих позначеннях справедливі такі вирази для комутаторів полів:

$$[\hat{A}_n(x,\tau),\hat{E}_l(x')] = 4\pi i\hbar c\mu_{nl}(x-x',\tau),\ [\hat{A}_n(x,\tau),\hat{B}_l(x')] = 4\pi i\hbar c\lambda_{nl}(x-x',\tau), \tag{36}$$

а середній струм (34) з указанням часової залежности величин стає таким:

$$J_n\,(x,t) = \int dx'\,\{M_{nm}\,(x-x')\,E_m\,(x',t) + N_{nm}\,(x-x')B_m\,(x',t)\}. \tag{37}$$

Тут запроваджено нові матеріяльні коефіцієнти

$$M_{ln}\,(x) = \beta \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau \int dx' \mu_{lm}(x-x',\tau) I_{mn}\,(x-x',\tau), \tag{38}$$

$$N_{ln}\,(x) = \beta \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau \int dx' \lambda_{lm}(x-x',\tau) I_{mn}\,(x-x',\tau),$$

які визначають ЕМ-властивості середовища з урахуванням просторової дисперсії. Структуру таких залежних від хвильового вектора тензорів зручно описувати, поділяючи їх з урахуванням позначень (35) на поздовжню, поперечну та антисиметричну частини за прикладом

$$A_{mn}(k) = \tilde{k}_n \tilde{k}_m A^{\mathrm{l}}_k + \tilde{\delta}_{nm} A^{\mathrm{tr}}_k + i\varepsilon_{mln}\tilde{k}_l A^{\mathrm{a}}_k,$$

$$A^{\mathrm{l}}_k = \tilde{k}_n \tilde{k}_m A_{mn}(k), \quad A^{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{nm} A_{mn}(k),$$

$$A^{\mathrm{a}}_k = -\frac{i}{2}\varepsilon_{nlm}\tilde{k}_l A_{mn}(k). \tag{39}$$

Усереднення рівнянь для центральних моментів (11) дає і внески, незалежні від ПСО, що виникатимуть з другого доданка у СО (31) при врахуванні формул (36). Після відповідної симетризації моменти струм–поле набувають вигляду

$$(B^x_n J^{x'}_l) = \int dx' \{M_{lm}(x'-x'')(B^x_n E^{x''}_m)^t + N_{lm}(x'-x'')(B^x_n B^{x''}_m)^t\} + S_{nl}(x-x'),$$

$$(J^x_n B^{x'}_l) = \int dx' \{M_{lm}(x-x'')(E^{x''}_n B^{x'}_m)^t + N_{lm}(x-x'')(B^{x''}_m B^{x'}_l)^t\} + S_{nl}(x-x'),$$

$$(E^x_n J^{x'}_l) = \int dx' \{M_{lm}(x'-x'')(E^x_n E^{x''}_m)^t + N_{lm}(x'-x'')(E^x_n B^{x''}_m)^t\} + T_{nl}(x-x'),$$

$$(J^x_n E^{x'}_l) = \int dx' \{M_{lm}(x-x'')(E^{x''}_n E^{x'}_m)^t + N_{lm}(x-x'')(B^{x''}_m E^{x'}_l)^t\} + T_{nl}(x-x'). \tag{40}$$

Формули (40) містять у собі функції $S_{nl}(x,t)$, $T_{nl}(x,t)$, які з використанням (36), (38) можна звести до вигляду

$$S_{nl}(k) = -8\pi T N_{nl}(k), \quad T_{nl}(k) = -8\pi T M_{nl}(k). \tag{41}$$

Рівняння (37), (40) є матеріяльними рівняннями викладеної теорії. З них видно, що отримана система часових рівнянь (9), (11) у розглянутому наближенні є лінійною. Отже, ми одержали систему рівнянь лінійної флюктуаційної електродинаміки.

IV. ПОРІВНЯННЯ РОЗВИНУТОЇ ТЕОРІЇ З НАБЛИЖЕННЯМ САМОУЗГОДЖЕНОГО ПОЛЯ

A. Малі параметри та провідність плазми в теорії Власова

Порівняймо отримані результати з теорією класичної плазми Власова [4], яка відповідає наближенню самоузгодженого поля в динаміці системи. У цій теорії середовище описується кінетичним рівнянням Власова для одночастинкових функцій розподілу (ФР) зарядів та рівняннями Максвелла для ЕМ-поля. У наближенні самоузгодженого поля безпосередні кореляції між підсистемами не враховуються, але є їх взаємний вплив через силу Лоренца в кінетичному рівнянні та електричний струм у рівняннях Максвелла. Інакше кажучи, ця система рівнянь не описує системи так повно, як це ми зробили на основі МСО.

Малим параметром теорії Власова вважається так званий плазмовий параметр $e^2n^{1/3}/T \ll 1$, що вказує на малість енергії кулонівської взаємодії порівняно з енергією теплового руху. В термінах радіуса Дебая $r_{\rm D}$ ця умова еквівалентна нерівності

$$nr_{\rm D}^3 \gg 1, \quad \left(r_{\rm D} = \sqrt{T/4\pi e^2 n}\right), \tag{42}$$

що відповідає великій кількості частинок у ділянці з розміром $r_{\rm D}$. Окрім цього, частота зіткнень $\Omega = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ (плазмова частота) вважається малою порівняно з частотою, характерною для вільного руху в ЕМ-полі з хвильовим числом k, тобто $\Omega \ll k\upsilon_T$. Ця умова дозволяє нехтувати інтеґралом зіткнень у кінетичному рівнянні і може бути записана через радіус Дебая $r_{\rm D}$ у формі

$$kr_{\rm D} \gg 1. \tag{43}$$

Біля рівноваги матеріяльне рівняння теорії самоузгодженого поля, аналогічне нашому рівнянню (37), має вигляд

$$J_n\left(k,t\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_{nl}\left(k,t'\right) E_l\left(k,t-t'\right)dt', \tag{44}$$

де провідність з урахуванням частотної дисперсії дається формулою [4]

$$\sigma_{nl}\left(k,t\right) = -i\sum_a \frac{e_a^2}{m_a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \tag{45}$$

$$\times \int d^3\upsilon \frac{\partial f_a^0}{\partial \upsilon_l}\frac{\upsilon_n}{\omega - \mathbf{k}\boldsymbol{\upsilon} + i\,0}\,e^{-i\omega t} = \beta I_{nl}(k,t)\theta(t),$$

(див. також (32)).

Зауважимо, що нерівність (43) є не тільки умовою застосування рівняння Власова, але й умовою справедливости його розв'язку, який привів до результату (44), (45). Для доведення цього треба перейти в кінетичному рівнянні Власова та відповідних рівняннях Максвелла (9) до безрозмірних величин. Фізично зрозуміло, що одночастинкову ФР f потрібно вимірювати густиною середовища n. Характерним значенням швидкости υ_n слід уважати теплову $\upsilon_T = \sqrt{3T/m}$. Поля E_n, B_n, які мають однаковий порядок, оцінимо з умови $\hat{H}_b \sim \hat{H}_s$, що дає $E_n, B_n \sim \sqrt{Tn}$ ($H_b \sim nVT$, $H_s \sim VE^2$). За відсутности зіткнень адекватною характерною довжиною в кінетичному рівнянні є довжина хвилі поля. Тому для просторових та часових похідних від ФР треба використовувати оцінки $\nabla f \sim kn, \dot{f} \sim k\upsilon_T n$. У рівняннях Максвелла (9) характерною частотою є kc, і тому $\dot{E}_n \sim kcE_n$, $\operatorname{rot}\mathbf{B} \sim kB_n$, $J \sim en\upsilon_T$. Ураховуючи сказане, отримаємо таке кінетичне рівняння та рівняння Максвелла в термінах безрозмірних величин:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \upsilon_n\frac{\partial f_a}{\partial x_n} + \mu\, e_a\left(E_n + \beta[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{B}]\right)\frac{\partial f_a}{\partial p_n} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\mu\beta\mathbf{J}$$

$$(\mu = \Omega/k\upsilon_T = (r_{\rm D}k)^{-1} \ll 1). \tag{46}$$

Тут запроваджено позначення для малого параметра μ, пов'язаного з оцінкою (43), а також для параметра $\beta = \upsilon_T/c \ll 1$, малість якого необхідна для нерелятивістського розгляду. Входження в ці рівняння малих параметрів підтверджує адекватність теорії збурень, яка привела до формул (44), (45).

B. Перерахування часової дисперсії в просторову

Для порівняння теорії самоузгодженого поля з нашими результатами слід урахувати наявність малого параметра, що дав змогу розв'язувати інтеґральне рівняння (23) для СО теорії $\rho(\eta)$ в теорії збурень. Указана теорія збурень, відповідно до оцінок попереднього розділу, ґрунтується на тому, що $\mathbf{L}_b \sim k\upsilon_T$, $\mathbf{L}_s \sim kc$, $\mathbf{L}_{\rm int} \sim \Omega$. Це означає, що малим параметром теорії є параметр μ, визначений в (46), оскільки $\Omega/k\upsilon_T = \mu$, $\Omega/kc = \beta\mu$. Використаймо цей параметр, щоб перерахувати часову дисперсійну залежність у виразі для струму (44) у просторову та порівняти наші матеріяльні коефіцієнти (38) з (45). Зауважимо, що характерний час зміни провідности в (44) у нашому випадку $(k\upsilon_T)^{-1}$ є значно більшим за характерний час зміни поля $(kc)^{-1}$, і тому ми не можемо просто нехтувати t' в $E_l(k,t-t')$.

З урахуванням сказаного обчислимо поле $E_l(k,t-t')$ так:

$$E_n(k,t-t') = \operatorname{Sp}\rho(\eta(t-t'))\hat{E}_n(k) = \operatorname{Sp}e^{-t'\mathbf{L}}\rho(\eta(t))\hat{E}_n(k) = \operatorname{Sp}\rho(\eta(t))e^{t'\mathbf{L}}\hat{E}_n(k) \simeq \operatorname{Sp}\rho_q(\eta(t))e^{t'\mathbf{L_0}}\hat{E}_n(k) \tag{47}$$

$$= \operatorname{Sp}\rho_q(\eta(t))\hat{E}_n(k,-t') = \operatorname{Sp}\rho_q(\eta(t))\{\mu_{nl}(k,-t')\hat{E}_l(k) + \lambda_{nl}(k,-t')\hat{B}_l(k)\} = \mu_{nl}(k,-t')E_l(k,t) + \lambda_{nl}(k,-t')B_l(k,t)$$

(див. формули (35)). Окрім використання формули $\rho(\eta) \simeq \rho_q(\eta)$, тут ще було знехтувано в експоненті виразом $t'\mathbf{L}_{\text{int}} \sim (kv_T)^{-1}\Omega = \mu \ll 1$ порівняно з внеском $t'\mathbf{L}_0 \sim 1$, тобто відкинуто зайві степені μ.

Отже, з урахуванням (48) струм (44) можна записати у вигляді (37), запровадивши матеріяльні коефіцієнти $M_{ln}(k), N_{ln}(k)$ у наближенні самоузгодженого поля

$$M^{\text{sc}}_{ln}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \mu_{lm}(k,\tau)\sigma_{mn}(k,\tau)\,,$$

$$N^{\text{sc}}_{ln}(k) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \lambda_{lm}(k,\tau)\sigma_{mn}(k,\tau)\,. \tag{48}$$

Ці коефіцієнти ідентичні введеним у (38), що випливає з останньої рівности у (45).

C. Кореляції струм–поле в теорії Власова

Можна, застосовуючи підхід, що ґрунтується на наближенні самоузгодженого поля, отримати результати типу (40) для кореляційних функцій струм–поле. Зауважимо, що кінетичне рівняння Власова розглядається разом з відповідними рівняннями Максвела, які є динамічними рівняннями для ЕМ-поля. Кінетичне рівняння Власова є наближеним результатом підходу, у якому початкові значення координат та імпульсів зарядів вважаються випадковими. Для певної узгоджености цього підходу слід уважати випадковими й початкові значення ЕМ-поля. Указана невизначеність завжди є джерелом імовірнісного підходу в статистичній фізиці. Отже, спостережувані значення кореляцій можна одержати за допомогою рівняння Власова з додатковим усередненням по реалізаціях початкових значень поля, тобто вважається справедливою формула

$$\overline{A^{\text{sc}}(t)} = \operatorname{Sp}\rho(\eta(t))\hat{A}. \tag{49}$$

Тут риска позначає вказане додаткове усереднення, а $A^{\text{sc}}(t)$ є значенням у теорії самоузгодженого поля фізичної величини, якій відповідає оператор $\hat{A}$.

Шлях отримання середнього струму залишається незмінним і веде до формули (44), яка не міняє вигляду після додаткового усереднення. Вираз для кореляцій струм-поле одержуємо множенням (44) на поле з додатковим усередненням. Це веде до формул

$$(J^k_n E^{x'}_l)^t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\sigma_{nm}(k,t')\{\overline{E_m(k,t-t')E_l(x',t)} - \overline{E_m(k,t-t')E_l(x',t)}^{\text{eq}}\},$$

$$(J^k_n B^{x'}_l)^t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\sigma_{nm}(k,t')\{\overline{E_m(k,t-t')B_l(x',t)} - \overline{E_m(k,t-t')B_l(x',t)}^{\text{eq}}\}, \tag{50}$$

де віднімання рівноважного значення середнього пов'язано з тим, що в (44) йдеться про відхилення від рівноваги. Зрозуміло, що в такому вигляді теорія не містить засобів для визначення рівноважних величин. Подальшим кроком є врахування формул (48), (48), а також співвідношення (49), що, вочевидь, дає (40) з такими вільними членами:

$$S^{\text{sc}}_{nl}(k) = -M^{\text{sc}}_{nm}(k)(B_m E_l)^{\text{eq}}_k - N^{\text{sc}}_{nm}(k)(B_m B_l)^{\text{eq}}_k,$$

$$T^{\text{sc}}_{nl}(k) = -M^{\text{sc}}_{nm}(k)(E_m E_l)^{\text{eq}}_k - N^{\text{sc}}_{nm}(k)(E_m B_l)^{\text{eq}}_k. \tag{51}$$

Тут через $(E_m E_l)^{\text{eq}}_k$ позначено фур'є-компоненти рівноважної кореляційної функції $(E^{x-x'}_m E^0_l)^{\text{eq}} = (E^x_m E^{x'}_l)^{\text{eq}}$. Легко перевірити, що формули (41), (51) збігаються. Для цього достатньо використати вирази для рівноважних кореляційних функцій полів, отримані в останньому розділі (див. вирази (69), (71)), а також те, що функції $M^{\text{sc}}_{nl}(k)$ та $N^{\text{sc}}_{nl}(k)$ збігаються відповідно з функціями $M_{nl}(k)$ та $N_{nl}(k)$.

V. ОБЧИСЛЕННЯ ЗАПРОВАДЖЕНИХ МАТЕРІЯЛЬНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ У МАКСВЕЛЛІСЬКОМУ ВИПАДКУ

У розвинутій на основі МСО теорії застосовано матеріяльні коефіцієнти (38) $M_{nl}(k), N_{nl}(k)$, які описують плазму тільки в термінах просторової дисперсії. Зрозуміло, що можна ввести звичайним шляхом [4] і в цьому випадку узагальнені провідність $\sigma'_{nl}(k,\omega)$ та діелектричну проникність $\varepsilon'_{nl}(k,\omega)$ формулами

$$\sigma'_{nm}(k,\omega) = M_{nm}(k) + \varepsilon_{lmp}k_p\frac{c}{\omega}N_{nl}(k),$$

$$\varepsilon'_{nm}(k,\omega) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma'_{nm}(k,\omega)\,. \tag{52}$$

Це запроваджує інші форми матеріяльного рівняння (37) для струму та електричної індукції

$$
\begin{aligned}
J_n(k,\omega) &= \sigma'_{nl}(k,\omega)E_l(k,\omega), \\
D_n(k,\omega) &= \varepsilon'_{nl}(k,\omega)E_l(k,\omega). \qquad (53)
\end{aligned}
$$

У цих термінах рівняння Максвелла (9) набувають звичайного вигляду

$$\dot{\mathbf{D}} = c \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}. \qquad (54)$$

Після фур'є-перетворення та розділення відповідно до (39) діелектричної проникности отримаємо дисперсійні рівняння для поздовжніх та поперечних ЕМ-хвиль.

$$\varepsilon'^{\mathrm{l}}(k,\omega) = 0, \quad \varepsilon'^{\mathrm{tr}}(k,\omega) - \frac{k^2c^2}{\omega^2} = 0. \qquad (55)$$

Обчислімо матеріяльні коефіцієнти (38), використовуючи відразу k-представлення та поздовжні, поперечні й антисиметричні частини тензорів (39). Відповідно до (35), (39) поздовжній внесок в $M_{ln}(k)$ очевидно зникає

$$
\begin{aligned}
M_k^{\mathrm{l}} &= \beta \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau I^{\mathrm{l}}(k,\tau) \qquad (56) \\
&= \sum_a \frac{\pi\beta e_a^2}{k^2} \int d^3\upsilon f_a^0(\upsilon)(\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{k})^2 \delta(\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{k}) = 0.
\end{aligned}
$$

Аналогічно отримаємо такі вирази для поперечного внеску в $M_{ln}(k)$ та антисиметричного внеску в $N_{ln}(k)$:

$$
\begin{aligned}
M_k^{\mathrm{tr}} &= \beta \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau I^{\mathrm{tr}}(k,\tau) \cos\omega_k\tau \\
&= -\sum_a \frac{n_a e_a^2}{m_a\omega_k} \operatorname{Im} J_+\left(\frac{c}{\upsilon_{Ta}}\right), \qquad (57)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_k^{\mathrm{a}} &= -\beta \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau I^{\mathrm{tr}}(k,\tau) \sin\omega_k\tau \\
&= \sum_a \frac{n_a e_a^2}{m_a\omega_k} \operatorname{Re} J_+\left(\frac{c}{\upsilon_{Ta}}\right), \qquad (58)
\end{aligned}
$$

Тут запроваджено функцію

$$\int d^3\upsilon f_a^0(\upsilon) \frac{[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{k}]^2}{kc - \mathbf{k}\boldsymbol{\upsilon} + i\,0} = \frac{2\,n_a}{m_a\omega_k\beta} J_+\left(\frac{c}{\upsilon_{Ta}}\right), \qquad (59)$$

досліджену, наприклад, в [4]. У нерелятивістському наближенні, яке ми розглядаємо, $\upsilon_{Ta}/c \ll 1$, і тому $J_+(c/\upsilon_{Ta}) \simeq 1$. Отже, використання повного виразу (59) є перевищенням точности й остаточно маємо

$$
\begin{aligned}
&M_k^{\mathrm{tr}} \simeq 0, \quad M_k^{\mathrm{l}} = 0; \quad N^{\mathrm{a}} \simeq \sum_a \frac{\Omega_a^2}{4\pi kc} \\
&(\Omega_a = \sqrt{4\pi e_a^2 n_a/m_a}). \qquad (60)
\end{aligned}
$$

VI. РОЗВ'ЯЗКИ ОТРИМАНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ПОЛЯ ТА КОРЕЛЯЦІЙ

A. Електромагнетні хвилі

Систему рівнянь Максвелла (9) з матеріяльним рівнянням (37) розділяємо на поздовжню та поперечну частини (39) та розв'язуємо через фур'є-перетворення. Для поздовжнього поля маємо [2]

$$B_{nk}^{\mathrm{l}} = 0, \quad -i\omega E_{nk}^{\mathrm{l}} = -4\pi M_k^{\mathrm{l}} E_{nk}^{\mathrm{l}}, \qquad (61)$$

звідки знаходимо закон дисперсії поздовжніх хвиль

$$\omega^{\mathrm{l}}(k) = -4\pi i M_k^{\mathrm{l}}. \qquad (62)$$

Рівняння Максвелла для поперечного поля дають

$$
\begin{aligned}
&-i\omega B_{nk}^{\mathrm{tr}} = -ic\varepsilon_{nml}k_m E_{lk}^{\mathrm{tr}}, \\
&-i\omega E_{nk}^{\mathrm{tr}} = ci\varepsilon_{nml}k_m B_{lk}^{\mathrm{tr}} \qquad (63) \\
&-4\pi\left(M_k^{\mathrm{tr}}E_{nk}^{\mathrm{tr}} + N_k^{\mathrm{a}} i\varepsilon_{nml}\tilde{k}_m B_{lk}^{\mathrm{tr}}\right),
\end{aligned}
$$

звідки знаходимо закон дисперсії поперечних ЕМ-хвиль

$$
\begin{aligned}
\omega^{\mathrm{tr}}(k) = &-i2\pi M_k^{\mathrm{tr}} \\
&\pm \sqrt{c^2k^2 + 4\pi ckN_k^{\mathrm{a}} - (2\pi M_k^{\mathrm{tr}})^2}. \qquad (64)
\end{aligned}
$$

Використовуючи дисперсійні рівняння в термінах проникности (55), отримаємо теж (62), (64). З урахуванням виразів (60) для матеріяльних коефіцієнтів маємо

$$\omega^{\mathrm{l}}(k) = 0, \qquad (65)$$

тобто поздовжні ЕМ-хвилі у вивченому випадку (43) малих довжин хвиль $\lambda \ll r_{\mathrm{D}}$ відсутні. Як відомо [4], цей факт є наслідком зворотного ефекту Черенкова — інтенсивного поглинання хвиль на малих частотах. Аналогічно для поперечних ЕМ-хвиль у вивченому наближенні маємо

$$\omega^{\mathrm{tr}}(k) \simeq \pm\sqrt{c^2k^2+\Omega^2} \qquad (\Omega^2 \equiv \sum_a \Omega_a^2), \tag{66}$$

що відповідає хвилям без згасання.

Розв'язувати системи (9) та (11) зручніше, якщо запровадити, замість аксіяльного вектора $\mathbf{B}$, полярний [5]

$$\mathbf{Z} = \operatorname{rot}\mathbf{B}, \tag{67}$$

що прибере з розгляду тензор Леві–Чівіти і полегшить записи поперечних частин рівнянь. Наприклад (63), матиме вигляд

$$-i\omega Z^{\mathrm{tr}}_{nk} = -ck^2 E^{\mathrm{tr}}_{lk},$$
$$-i\omega E^{\mathrm{tr}}_{nk} = cZ^{\mathrm{tr}}_{nk} - 4\pi\{M^{\mathrm{tr}}_k E^{\mathrm{tr}}_{nk} + N^{\mathrm{a}}_k Z^{\mathrm{tr}}_{nk}/k\}. \tag{68}$$

B. Розв'язки системи рівнянь для кореляційних функцій

Розгляньмо два найцікавіші часткові розв'язки рівнянь (11). Спочатку знайдемо рівноважні кореляції ЕМ-поля. При цьому часові похідні в (11) обертаються на нулі, а кореляції залежать лише від різниці координат. Через ізотропію простору система лінійних рівнянь (11) розділяється на поздовжню та поперечну щодо єдиного хвильового вектора $\mathbf{k}$, тому зручно використовувати фур'є-представлення. У зв'язку з формулою (51) запроваджено такі позначення для рівноважних кореляційних функцій: $(E_nE_l)^{\mathrm{eq}}_k, (E_nB_l)^{\mathrm{eq}}_k, (B_nE_l)^{\mathrm{eq}}_k, (B_nB_l)^{\mathrm{eq}}_k$. Тепер зручно використовувати їхні поздовжні та поперечні частини, серед яких відмінні від нуля тільки $(EE)^{\mathrm{l}}_k, (EE)^{\mathrm{tr}}_k, (EB)^{\mathrm{tr}}_k = (BE)^{\mathrm{tr}}_k, (BB)^{\mathrm{tr}}_k$ ($\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$). При розгляді задачі в термінах поля $\mathbf{Z}$ (67) відмінними від нуля будуть додатково функції $(EZ)^{\mathrm{tr}}_k = (ZE)^{\mathrm{tr}}_k, (ZZ)^{\mathrm{tr}}_k$.

Поздовжня частина у трьох останніх рівняннях з (11) відсутня, а з першого, зважаючи на (40), (41), маємо

$$0 = M^{\mathrm{l}}_k\,(EE)^{\mathrm{l}}_k - 8\pi T M^{\mathrm{l}}_k.$$

Отже, поздовжні частини кореляторів поля даються формулами

$$(EE)^{\mathrm{l}}_k = 8\pi T, \quad (EB)^{\mathrm{l}}_k = 0,$$
$$(BE)^{\mathrm{l}}_k = 0, \quad (BB)^{\mathrm{l}}_k = 0. \tag{69}$$

Система рівнянь для поперечних частин кореляторів у термінах поля $\mathbf{Z}$ з (67), яка випливає з (11), (40), (41), має вигляд

$$0 = -ck^2(EZ)^{\mathrm{tr}}_k - ck^2(ZE)^{\mathrm{tr}}_k, \quad 0 = c(EZ)^{\mathrm{a}}_k,$$

$$0 = -ck^2(EE)^{\mathrm{tr}}_k + c\,(ZZ)^{\mathrm{tr}}_k - 4\pi\{M_k(ZE)^{\mathrm{tr}}_k + N^{\mathrm{a}}_k(ZZ)^{\mathrm{tr}}_k/k - 8\pi kTN_a\},$$

$$0 = c\,(ZE)^{\mathrm{tr}}_k + c\,(EZ)^{\mathrm{tr}}_k - 4\pi\{M_k(EE)^{\mathrm{tr}}_k + N^{\mathrm{a}}_k(ZE)^{\mathrm{tr}}_k/k + M_k(EE)^{\mathrm{tr}}_k + N_k(EZ)^{\mathrm{tr}}_k - 8\pi T M^{\mathrm{tr}}_k\}. \tag{70}$$

Звідси відразу знаходимо

$$(EE)^{\mathrm{tr}}_k = 8\pi T, \quad (EB)^{\mathrm{tr}}_k = 0, \quad (BE)^{\mathrm{tr}}_k = 0, \quad (BB)^{\mathrm{tr}}_k = 8\pi T, \tag{71}$$

де враховано, що відповідно до (67) $(ZZ)^{\mathrm{tr}}_k = k^2(BB)^{\mathrm{tr}}_k$, $(ZE)^{\mathrm{a}}_k = k(BE)^{\mathrm{tr}}_k$. Одержані вирази (69), (71) для рівноважних кореляцій поля збігаються з результатами, які дає класична теорія.

Розгляньмо тепер часові рівняння (11) для відхилень кореляцій від їхніх рівноважних значень, позначаючи їх кутовими дужками. Через їхню лінійність це дає

$$-i\omega\langle ZZ\rangle^{\omega kk'}_{nl} = c\,\{-k^2\langle EZ\rangle^{\omega kk'}_{nl} - k'^2\langle ZE\rangle^{\omega kk'}_{nl}\},$$

$$-i\omega\langle ZE\rangle^{\omega kk'}_{nl} = -ck_1^2\langle EE\rangle^{\omega kk'}_{nl} + c\langle ZZ\rangle^{\omega kk'}_{nl} - 4\pi\{M_{k'}\langle ZE\rangle^{\omega kk'}_{nl} + N_{k'}\langle ZZ\rangle^{\omega kk'}_{nl}\},$$

$$-i\omega\langle EZ\rangle_{nl}^{\omega kk'} = c\,\langle ZZ\rangle_{nl}^{\omega kk'} - ck'^2\langle EE\rangle_{nl}^{\omega kk'} - 4\pi\{M_k\langle EZ\rangle_{nl}^{\omega kk'} + N_k\langle ZZ\rangle_{nl}^{\omega kk'}\},$$

$$-i\omega\langle EE\rangle_{nl}^{\omega kk'} = c\langle ZE\rangle_{nl}^{\omega kk'} + c\langle EZ\rangle_{nl}^{\omega kk'}$$

$$-4\pi\{M_k\langle EE\rangle_{nl}^{\omega kk'} + N_k\langle ZE\rangle_{nl}^{\omega kk'} + M_{k'}\langle EE\rangle_{nl}^{\omega kk'} + N_{k'}\langle EZ\rangle_{nl}^{\omega kk'}\}. \quad (72)$$

Структура рівнянь (72) узгоджується з принципом Онзаґера, тобто ці рівняння відповідають формальному перемноженню рівнянь (68) у потрібному порядку. Інакше кажучи, якщо зробити заміну $\langle EE\rangle_{nl}^{kk'} \to E_n^k E_l^{k'}$ і т. д., отримаємо тотожність. Тоді сказане означає, що дисперсійні залежності для хвиль кореляцій ЕМ-поля мають вигляд

$$\omega(k,k') = \omega^{\alpha,\alpha'}(k) + \omega^{\alpha'}(k') \qquad (\alpha,\alpha' = l,\, tr). \quad (73)$$

Слід зазначити, що цей розв'язок принципово ширший, ніж просто добуток середніх значень напруженостей ЕМ-поля. Це найліпше можна бачити в однорідному та ізотропному станах поля. Тоді середні напружености ЕМ-поля відсутні, але часова залежність кореляцій залишиться. Розгляньмо поперечні кореляційні функції, що мають структуру $\langle EE\rangle_{nl}^{\rm tr} = (\delta_{nl} - \tilde{k}_n\tilde{k}_l)\langle EE\rangle^{\rm tr}$ і т. д. Тоді, згідно з (73), хвилі кореляцій матимуть гілки з частотами $2\,\omega^{\rm tr}(k)$ та 0. Отже, в цьому випадку спостерігаємо явище хвильової залежности парних кореляцій ЕМ-поля.

VII. ВИСНОВКИ

Наведений розгляд ЕМ-поля, що слабко та повільно взаємодіє із плазмою, повністю описує нерелятивістські ЕМ-процеси з точністю до другого порядку за взаємодією. Як ПСО обрано, поряд із стандартними напруженостями, кореляційні моменти ЕМ-поля, що дало змогу суттєво розширити отриману інформацію про систему. Із використанням потужного сучасного методу статистичної фізики — МСО — отримано часові рівняння для ПСО. Показано, що МСО правильно враховує кореляції середовища з полем та дає змогу розглядати будь-які кореляційні моменти як нові незалежні змінні. Доведено, що результати застосування МСО до опису ЕМ-поля та його кореляцій узгоджуються з результатами наближення самоузгодженого поля, якщо систему з кінетичного рівняння Власова та рівнянь Максвелла доповнити уявленням про випадковість початкових значень ЕМ-поля. При цьому запропоновано підхід до перерахування ефектів часової дисперсії в ефекти просторової дисперсії, який ґрунтується на використанні малого параметра задачі. У рівняннях Максвелла запроваджено нові кінетичні коефіцієнти при напружености електричного та індукції магнетного полів, що просто пов'язані зі стандартною провідністю. Продемонстровано, що рівняння для кореляційних моментів поля відповідають гіпотезі Онзаґера. Отримано відомі частоти поперечних хвиль ЕМ-поля, які для максвеллівської плазми не згасають. Показано, що для малих довжин хвиль (менше дебаївського радіуса) поздовжніх хвиль не існує, що пояснюється ефектом черенковського поглинання. Отримано рівноважний розв'язок для других кореляційних моментів, який відповідає значенням, що дає пряме обчислення рівноважних середніх. Для кореляторів поля знайдено розв'язки, що аналогічні до плоских хвиль у рівняннях Максвелла, але мають два хвильові вектори. Відкрито можливість існування поперечних хвиль центральних кореляційних моментів однорідного та ізотропного поля, що не зводяться до хвиль квадратів напруженостей.

Ця робота виконана при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень України (проєкт № 2.7/418).

[1] А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский *Методы статистической физики* (Наука, Москва, 1977).

[2] О. Й. Соколовський, А. А. Ступка, Вісник Харків. ун-ту. Сер. фіз. Вип. 2(24), 87 (2004).

[3] Р. Глаубер *Квантовая оптика и квантовая радиофизика* (Наука, Москва, 1966).

[4] А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе *Основы электродинамики плазмы* (Высшая школа, Москва, 1988).

[5] О. Й. Соколовський, А. А. Ступка, Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Фізика, Радіоелектроніка №10, 57 (2003).

ЛІНІЙНА ФЛЮКТУАЦІЙНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

LINEAR FLUCTUATION ELECTRODYNAMICS

A. Sokolovsky, A. Stupka
Dnipropetrov'k National University,
13 Naukova St., Dnipropetrovs'k, UA–49050, Ukraine

Electromagnetic field, which interacts weakly and slowly with non-relativistic plasma, has been investigated with an accuracy up to the second order in interaction. The investigation was performed on the basis of the Bogoliubov reduced description method that allowed to build a connected system of equations for average field and its binary correlations as new independent variables. In the Maxwell equations and in the corresponding equations for correlations of the field new material coefficients were introduced, which describe the medium only in the terms of spatial dispersion. It was shown that equations for correlations satisfy the Onsager principle. The obtained results are compared with results of self-consistent field approximation built on the basis of the Vlasov equation. A procedure of recalculation of frequency dispersion effects in standard material coefficients of the self-consistent field theory into spatial dispersion was proposed. An equivalence of the both approaches was proved in the leading approximation. Existence of correlation waves, which are not reduced to waves of square average field, was established.