ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 10, № 1 (2006) с. 24–28

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 10, No. 1 (2006) p. 24–28

ПРО МОДУЛЯЦІЙНУ НЕСТІЙКІСТЬ СТОКСОВИХ ХВИЛЬ У МЕЖАХ РОЗШИРЕНОЇ СИСТЕМИ НРШ ІЗ РІВНЯННЯМ ДЛЯ СЕРЕДНЬОЇ ТЕЧІЇ

Ю. В. Седлецький
Інститут фізики Національної академії наук України,
просп. Науки, 46, Київ, 03028, Україна

(Отримано 1 березня 2006 р.; в остаточному вигляді — 26 травня 2006 р.)

Для стоксових хвиль на поверхні шару ідеальної рідини система нелінійного рівняння Шредингера (НРШ) для обвідної першої гармоніки й рівняння для нульової гармоніки розширена з урахуванням повної лінійної дисперсії в обох рівняннях. Без традиційного припущення про рух середньої течії з груповою швидкістю на частоті швидкого заповнення виведено рівняння четвертого ступеня для частоти збурення й досліджено модуляційну нестійкість (МН) розглянутих хвиль. Продемонстровано взаємодію дисперсійних гілок, що відповідають чотирьом кореням цього рівняння, і виникнення смуг МН, які не описуються НРШ. З аналізу отриманих виразів випливає, що знайдена Бенджаменом і Фейром, а також Уіземом і потім Хасімото і Оно межа $kh = 1.363$, де h — глибина рідини, а k — хвильове число, для переходу між станами модуляційно стійкої та нестійкої рідини є такою тільки в окремому випадку малих амплітуди незбуреної хвилі та хвильових чисел хвилі збурення.

Ключові слова: нелінійне рівняння Шредингера, модуляційна нестійкість, Стоксові хвилі.

PACS number(s): 05.45.−a, 05.45.Yv, 47.35.+i

При поширенні імпульсу швидко осцилюючих хвиль по поверхні ідеальної рідини амплітуда A першої гармоніки обвідної вільної поверхні $\eta = \frac{1}{2}A\exp(i(kx-\omega t)) + \text{c.c.}$ і амплітуда Ψ нульової гармоніки потенціялу швидкости рідини в апроксимації $O(\varepsilon^3)$ задовольняють систему рівнянь [1–3]

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t} + c_g\frac{\partial A}{\partial x}\right) + p\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \widetilde{q}A^2\,\overline{A} - \left(k\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mu\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)A = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial}{\partial x}A\overline{A} = 0. \tag{2}$$

де ε — малий параметр, що характеризує малість і повільність зміни амплітуд A і Ψ. Тут позначено

$$c_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\omega}{k}C_g, \qquad C_g = \frac{1}{2} + \frac{1-\sigma^2}{2\sigma}k\,h,$$

$$c_0 \equiv \sqrt{gh} = \frac{\omega}{k}C_0, \quad C_0 = \sqrt{\frac{kh}{\sigma}},$$

$$\sigma = \tanh kh, \qquad p \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = \frac{\omega}{k^2}P,$$

$$P = \frac{1}{8\sigma^2}\Big((\sigma^2-1)\,(3\,\sigma^2+1)\,k^2h^2 - 2\,\sigma\,(\sigma^2-1)\,kh - \sigma^2\Big), \tag{3}$$

$$\widetilde{q} = \omega k^2\widetilde{Q}, \qquad \widetilde{Q} = \frac{1}{16\sigma^4}(2\sigma^6 - 13\sigma^4 + 12\sigma^2 - 9),$$

$$\mu = \frac{k^2}{\omega}M, \qquad M = \frac{1}{2}\,(\sigma^2-1\,),$$

$$\nu = \frac{\omega^3}{k}N, \qquad N = \frac{1}{2\sigma^2}\,[1 - MC_g],$$

$\omega = \sqrt{gk\sigma}$ — частота несучої хвилі і g — прискорення сили тяжіння.

Система (1)–(2) є моделлю взаємодії довгих і коротких хвиль у різних фізичних задачах [4], а її спрощений варіант розв'язаний методом оберненої задачі розсіювання [5]. У гідродинаміці її ще називають системою НРШ з рівнянням для середньої течії, системою Бенні і Роскеса [2], системою Деві і Стюартсона.

Першою особливістю цієї праці є відмова від поширеного припущення, що потенціял нульової гармоніки залежить від x і t тільки в комбінації $x - c_g t$, де $c_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ — групова швидкість на частоті першої гармоніки A. Це припущення особливо поширене під час отримання НРШ із системи (1)–(2). Деякі автори пов'язують його з переходом у систему координат, що рухається зі швидкістю c_g, інші арґументують індукуючою дією третього члена в (2), що дійсно змінюється в часі зі швидкістю c_g. (Відповідна література з отримання НРШ для стоксових хвиль методом багатьох масштабів з різними узагальненнями, включаючи НРШ вищого порядку, наведена в [3]). Це припущення зроблено побіжно в [6–7] і прямо в [1] — роботах, де принципово різними методами, але в близьких наближеннях слабкої нелінійности й малих хвильових чисел збурення показано, що обвідна пакета швидко осцилюючих хвиль на поверхні шару ідеальної рідини є нестійкою до малого поздовжнього збурення, якщо добуток хвильового числа швидких осцилляцій k на глибину рідини h більший, ніж 1.363.

Про необґрунтованість згаданого припущення йдеться в [8–10]. У [11] показано, що виниклі під час заміни $\xi = x - c_g t$ додаткові доданки необхідно враховувати в наступному наближенні по ε, одержуючи НРШ четвертого порядку.

Відмова від згаданого припущення призводить до неможливости заміни $\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -c_g\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, а тому до неможливости замикання системи (1)–(2) у НРШ, що ставить під сумнів справедливість межі kh=1.363, тому що саме під час застосування такої заміни (наприклад, у [1]) , (2) інтеґрується, похідна $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ з (2) підставлялася в (1), яке після цього переходило у звичайне НРШ

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t}+c_g\frac{\partial A}{\partial x}\right)+p\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+qA^2\overline{A}=0\,, \qquad (4)$$

де

$$q=\widetilde{q}+\frac{k^2}{\omega^3}\frac{2\sigma^2\nu^2}{c_0^2-c_g^2}=\omega k^2\left(\widetilde{Q}+\frac{2\sigma^2N^2}{C_0^2-C_g^2}\right). \qquad (5)$$

Оскільки q змінює знак із додатного на від'ємний при kh=1.363 і тому що НРШ має солітонні розв'язки за нульових граничних умов, коли $pq>0$, а $p<0$ для всіх kh, НРШ (4) не може мати солітонних розв'язків, якщо $kh<1.363$. Те, що стоксова гармонічна хвиля стійка при $kh<1,363$ (і отже, при збуренні не може перебудуватись у солітон), випливає також з виразу для інкремента МН, отриманого в [1] на основі (4),

$$\Im\Omega=\varkappa(2pqA_0^2-\varkappa^2p^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad (6)$$

і залежного від знака pq.

Відмову від припущення, що потенціял нульової гармоніки залежить від x і t у комбінації $x-c_gt$, використано в праці автора [12]. У ній додатково зроблено узагальнення системи (1)–(2) шляхом урахування в ній усіх лінійних членів. Таке включення природно міститься в рівняннях Захарова [13–14], а для системи (1)–(2) використовувалось у [15] для окремого випадку нескінченно глибокої рідини, причому нехтуючи похідною за часом в (2). Урахування всіх лінійних членів в (1)–(2) поряд з відмовою від зв'язку x і t у комбінації $x-c_gt$ під час опису МН стоксових хвиль для шару рідини є основною метою цієї статті.

Для першого рівняння системи (1)–(2) врахування всіх лінійних членів проведено шляхом заміни другого і третього доданків на нескінченну суму

$$\pounds A=ic_g\frac{\partial A}{\partial x}+p\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-i\frac{1}{6}\frac{\partial^3\omega}{\partial k^3}\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}-\frac{1}{24}\frac{\partial^4\omega}{\partial k^4}\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}+\ldots.$$

Для включення всіх лінійних членів поруч з доданком $c_0^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$ у другому рівнянні системи (1)–(2) будемо виходити з того, що рівняння (2) під час отримання (1)–(2) методом багатьох масштабів [3] є так званою умовою узгодженности. Згідно з альтернативою Фредгольма в апроксимації $O(\varepsilon^3)$ його можна записати у вигляді [8]

$$\frac{\partial^2\,\Phi}{\partial t^2}+g\int_{-h}^{0}\frac{\partial^2\,\Phi}{\partial x^2}dz-\nu\frac{\partial}{\partial x}A\overline{A}=0, \qquad (7)$$

причому важливо, що з продовженням асимптотичної процедури нарощуются тільки нелінійні члени, тобто повний облік лінійних членів (2) міститься в другому доданку (7). Тут Φ — весь потенціял нульової гармоніки, тоді як Ψ — потенціял нульової гармоніки лише першого порядку асимптотичної процедури методу багатьох масштабів [3]:

$$\Phi=\Psi+\varepsilon\Psi+\varepsilon^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(z+h)^2\,.$$

Після переходу до нової залежної змінної Φ замість Ψ розширена система (1)–(2) є такою:

$$i\frac{\partial A}{\partial t}+\pounds A+\widetilde{q}A^2\,\overline{A}-\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\mu\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)|_{z=0}\;A=0\,, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\int_{-h}^{0}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dz-\nu\frac{\partial}{\partial x}A\overline{A}=0. \qquad (9)$$

Вона має однорідий за x розв'язок, що описує незбурену хвилю Стокса

$$A=A_0\,e^{i\alpha\,t},\quad \Phi=0,$$

де

$$\alpha=\widetilde{q}A_0^2,$$

і амплітуда A_0 не залежить від координат і часу. Введемо збурення (a — комплексне, φ — дійсне)

$$A=(A_0+\epsilon\,a)\,e^{i\alpha\,t},\quad \Phi=\epsilon\,\varphi.$$

Система (8)–(9), лінеаризована за ϵ, має вигляд

$$i\frac{\partial a}{\partial t}+\pounds a+\widetilde{q}A_0^2(a+\overline{a})-\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)|_{z=0}\;A_0=0,$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\int_{-h}^{0}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dz-\nu A_0\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial\overline{a}}{\partial x}\right)=0. \qquad (10)$$

Подамо розв'язок лінійної системи інтеґро-диференціяльних рівнянь (10) так:

$$a=a_0\,e^{i\theta}+b_0e^{-i\theta},\quad \theta=\varkappa x-\Omega t,$$
$$\phi=\left(\psi_1e^{i\,\theta}+\psi_2e^{-i\theta}\right)\frac{\cosh\varkappa(z+h)}{\cosh\varkappa h}.$$

Підставляючи це в (10), одержимо систему алґебраїчних рівнянь

$$(\Omega-\omega(k+\varkappa)+\omega(k)+\widetilde{q}A_0^2)a_0+\widetilde{q}A_0^2b_0+$$
$$+i(\mu\Omega-k\varkappa)A_0\psi_1=0$$
$$(\Omega+\omega(k-\varkappa)-\omega(k)-\widetilde{q}A_0^2)b_0-\widetilde{q}A_0^2a_0+$$
$$+i(\mu\Omega-k\varkappa)A_0\psi_2=0$$
$$i\nu\varkappa A_0(a_0+b_0)+(\Omega^2-\omega^2(\varkappa))\psi_1=0$$
$$i\nu\varkappa A_0(a_0+b_0)-(\Omega^2-\omega^2(\varkappa))\psi_2=0.$$

Виключаючи ψ_1 і ψ_2, одержуємо

$$[\Omega-\omega(k+\varkappa)+\omega(k)+q(\Omega))A_0^2]a_0+q(\Omega))A_0^2b_0=0,$$
$$[\Omega+\omega(k-\varkappa)-\omega(k)-q(\Omega))A_0^2]b_0-q(\Omega))A_0^2a_0=0,$$

де

$$q(\Omega) = \widetilde{q} + \frac{k\varkappa - \mu\Omega}{\omega^2(\varkappa) - \Omega^2}\nu\varkappa. \tag{11}$$

Прирівнювання детермінанта до нуля дає шукане рівняння для частоти збурення Ω:

$$(\Omega - \delta)^2 = \Delta^2 - 2q(\Omega)A_0^2\,\Delta, \tag{12}$$

де

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[\omega(k+\varkappa) + \omega(k-\varkappa)\right] - \omega(k),$$
$$\delta = \frac{1}{2}\left[\omega(k+\varkappa) - \omega(k-\varkappa)\right].$$

За врахування тільки перших двох членів лінійної дисперсії на несучій частоті в (1) і першого члена лінійної дисперсії довгих хвиль у (2)

$$\delta \to c_g\varkappa, \quad \Delta \to p\varkappa^2, \ \omega(\varkappa) \to c_0\varkappa. \tag{13}$$

Рівняння (12) можна записати так:

$$[(\Omega - (\delta - \Delta)][(\Omega - (\delta + \Delta)][\omega(\varkappa) - \Omega][\omega(\varkappa) + \Omega]$$
$$= -2\left(\widetilde{q}(\omega^2(\varkappa) - \Omega^2) + (k\varkappa - \mu\Omega)\nu\varkappa\right)A_0^2\,\Delta, \tag{14}$$

що демонструє взаємодію дисперсійних гілок, які відповідають чотирьом кореням характеристичного рівняння (12). За малої нелінійности в правій частині (14) ці чотири корені відповідають гілкам 1, 2, 3, 4 на рис. 1, 2.

З огляду на (11) маємо

$$\begin{aligned} &\Omega^4 - 2\,\delta\,\Omega^3 - \\ &- \left(\Delta^2 - 2\,\widetilde{q}A_0^2\Delta + \omega^2(\varkappa) - \delta^2\right)\Omega^2 + \\ &+2\left(\delta\,\omega^2(\varkappa) + \varkappa\mu\nu\,A_0^2\Delta\right)\Omega + \\ &+ \left(\Delta^2 - 2\widetilde{q}A_0^2\,\Delta - \delta^2\right)\omega^2(\varkappa) - 2\,k\,\varkappa^2\nu\,A_0^2\Delta = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Зробимо безрозмірними параметри задачі

$$\widehat{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega},\ \widehat{\Delta} = \frac{\Delta}{\omega},\ \widehat{\delta} = \frac{\delta}{\omega},\ \widehat{\omega}(\widehat{\varkappa}) = \frac{\omega(\varkappa)}{\omega},$$
$$\widehat{\varkappa} = \frac{\varkappa}{k},\ \widehat{A}_0 = k_0A_0.$$

Результат числового роз'язку нормованого рівняння (15) показаний на рис. 1, 2. Ураховані в цій роботі два нові фактори приводять до таких особливостей на рис. 1, 2:

1) відмова від припущення, що потенціял нульової гармоніки залежить від x і t у комбінації $x - c_gt$, де $c_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ — групова швидкість на несучій частоті, веде до появи третього й четвертого множників у (14) із законом дисперсії, характерним для довгих хвиль і отже, (14) описує взаємодію не тільки 1 і 2 хвиль (за малих $\varkappa$ — нестабільність Бенджамена-Фейра), але й, наприклад, гілки 1 і 3 — ще однієї нестійкости. У зв'язку з цим відзначимо, що рівняння, подібне (12) для характеристичної швидкости $\Omega/\varkappa$, отримано методом усередненого лаґранжіяна [7, Eq. (56)].

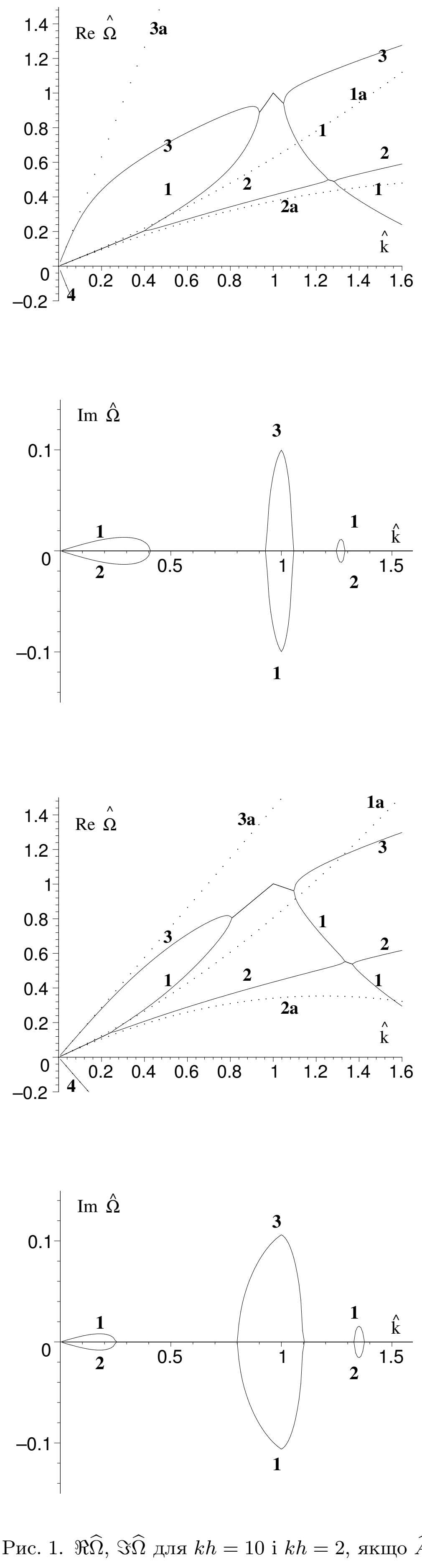

Рис. 1. $\Re\widehat{\Omega}$, $\Im\widehat{\Omega}$ для $kh = 10$ і $kh = 2$, якщо $\widehat{A}_0 = 0,2$.

Для спрощення аналізу розв'язків рівняння четвертого порядку за Ω у припущенні малих A_0 другий член рівняння (56) у [7] був знехтуваний, а в третій підставлене співвідношення $\Omega/\varkappa = c_g$. Отримане таким шляхом квадратне рівняння має розв'язок, уявна частина якого може існувати тільки за малих хвильових векторів збурення $\varkappa$, якщо $kh > 1.363$ і не існує для жодних $\varkappa$, якщо $kh < 1.363$. Отже, аналіз поведінки розв'язків характеристичного рівняння, проведений у [7], стосується тільки нескінченно малих A_0 і $\varkappa$ і не може бути застосований до пояснення появи МН у місці перетину гілок коренів 1 і 3;

2) урахування додаткових членів лінійної дисперсії в рівнянні для обвідної першої гармоніки і в рівнянні для нульової гармоніки приводить до правильної кривизни чотирьох кривих замість їх асимптотичної поведінки (13), показаної на рис. 1,2 пунктиром. Зокрема, такий хід кривих приводить до ще одного перетину коренів 1 і 2, що не передбачається НРШ і відповідає під час повного врахування дисперсії в лінійному випадку далеким краям вісімки Філіпса. Рівняння четвертого порядку (узагальнене на тривимірний випадок і з урахуванням поверхневого натягу) отримано варіяційним методом у [16], але без урахування всієї лінійної дисперсії. У такий спосіб його не можна застосувати для пояснення смуги МН у тому місці, де вдруге перетинаються криві 1 і 2 (а їхні асимптоти, показані пунктиром, перетинаються тільки за малих $\varkappa$, тобто описують тільки МН Бенджамена–Фейра).

Рівняння четвертого порядку для Ω отримано в [17] з рівнянь Захарова в ε^3 апроксимації, але при одержанні критерію МН було зведено в припущенні малих A_0 до рівняння другого порядку для малої величини відхилення Ω від кривої $\Delta = 0$, що не дає змоги описати середню смугу МН на рис. 1.

Таким чином, особливість цієї праці в тім, що характеристичне рівняння четвертого порядку, близьке до отриманого гамільтонівським методом у [17], виведено з узагальненої тут системи НРШ із середньою течією, а числовий розв'язок цього рівняння виявляє нову смугу МН (середня смуга на рис. 1, 2).

Для знаходження kh і $\widehat{\varkappa}$, за яких рівняння (15) має уявну частину, відмінну від нуля, вираз для частоти збурення $\widehat{\Omega} = \Re\widehat{\Omega} + i\Im\widehat{\Omega}$ підставлено в (15). Після поділу на дійсну й уявну частину отриманий результат системи двох нелінійних алґебраїчних рівнянь, що вийшла, і є шуканим рівнянням для $(\Im\widehat{\Omega})^2$. Утримуючи в ньому доданки зі ступенями не вище, ніж $\widehat{A}_0^2$ (тому що теорія є слабко нелінійна), можна одержати $(\Im\widehat{\Omega})^2$ і першу поправку за $\widehat{A}_0^2$. Обмежимося тільки основним доданком (поправка наведена в [12]):

$$(\Im\widehat{\Omega})^2 = -\left(\widehat{\Delta}^2 - 2\widehat{\Delta}\left(\widetilde{Q} + \frac{2\sigma^2 N^2}{\widehat{\omega}^2(\widehat{\varkappa}) - \widehat{\delta}^{\,2}}\right)\right), \quad (16)$$

Табуляція виразу для $\widehat{\Delta}$ залежно від kh і $\varkappa$ виявляє, що він може бути обох знаків, на відміну від урахування тільки перших членів лінійної дисперсії, коли $\widehat{\Delta} \to P\widehat{\varkappa}^2$ і $P < 0$ для всіх kh.

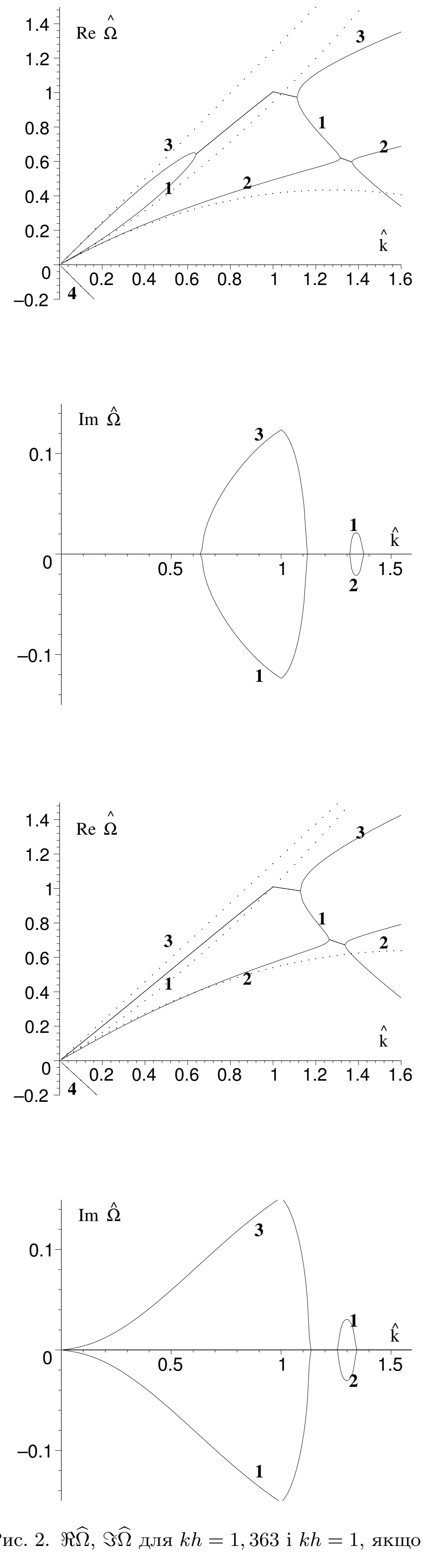

Рис. 2. $\Re\widehat{\Omega}$, $\Im\widehat{\Omega}$ для $kh = 1,363$ і $kh = 1$, якщо $\widehat{A}_0 = 0,2$.

ВИСНОВОК

При відмові від припущення про рух середньої течії зі швидкістю поширення c_g першої гармоніки і повному врахуванні лінійної дисперсії отримано рівняння четвертого порядку для залежности частоти збурювальної хвилі від її хвильового числа $\varkappa$. Чисельний аналіз уявної частини чотирьох коренів цього рівняння свідчить (рис. 2), що, крім МН Бенджамена–Фейра, при малих $\hat{\varkappa}$ існує ще одна смуга МН при $\hat{\varkappa} \simeq 1$. Ця МН не зникає при $kh < 1.363$ напротивагу МН Бенджамена–Фейра.

[1] H. Hasimoto, H. Ono, J. Phys. Soc. Jpn **33**, 805 (1972).
[2] D. J. Benney, G. J. Roskes, Stud. Appl. Math. **48**, 377 (1969).
[3] Ю. В. Седлецкий, Журн. эксп. теор. физ. **124**, 200 (2003).
[4] В. Е. Захаров, Журн. эксп. теор. физ. **62**, 1745 (1972).
[5] N. Yajima, M. Oikawa, Prog. Theor. Phys. **56**, 1719 (1976).
[6] T. B. Benjamin, Proc. R. Soc., London, Ser. A **299**, 59 (1967).
[7] G. B. Whitham, J. Fluid Mech. **27**, 399 (1967).
[8] U. Brinch-Nielsen, I. G. Jonsson, Wave Motion **8**, 455 (1986).
[9] В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Усп. физ. наук **167**, 1137 (1997).
[10] T. J. Bridges, Chaos **15**, 037113 (2005).
[11] Е. М. Громов, В. И. Таланов, Журн. эксп. теор. физ. **110**, вып. 1(7), 137 (1996).
[12] Yu. V. Sedletsky, Phys. Lett. A **243/4**, 293 (2005).
[13] В. Е. Захаров, Журн. прикл. мех. техн. физ. № 2, 86 (1968); Amer. Math. Soc. Transl. **182**, 167 (1998); Eur. J. Mech. B: Fluids **18**, 327 (1999).
[14] H. C. Yuen, B. M. Lake, Phys. Fluids. **18**, 956 (1975); H. C. Yuen, B. M. Lake, *Nonlinear Dynamics of Deep-Water Gravity Waves* (New York: Acad. Press, 1982).
[15] K. Trulsen, I. Kliakhandler, K. B. Dysthe, M. G. Velarde, Phys. Fluids **12**, 2432 (2000).
[16] T. J. Bridges, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A **354**, 533 (1996).
[17] В. Е. Захаров, В. Г. Харитонов, Журн. прикл. мех. техн. физ. № 5, 45 (1970).

ON MODULATION INSTABILITY OF STOKES WAVES WITHIN THE EXTENDED SET OF NLSE WITH THE MEAN FLOW EQUATION

Yu. Sedletsky
Institute of Physics, National Academy of Sciences of Ukraine,
46, Nauky Ave., Kyiv, 03028, Ukraine
e-mail: sedlets@iop.kiev.ua

For Stokes waves on the surface of ideal fluid layer, the set of non-linear Schrödinger equation (NLSE) for the by-pass first harmonics and equation for the zeroth harmonics is extended with full linear dispersion taken into account in both equations. Without traditional assumption about the motion of middle flow with the group velocity on the frequency of rapid filling, the 4-order equation for the perturbation frequency is derived and modulation instability (MI) of the waves under consideration is studied. The interaction is demonstrated for disperse branches corresponding to four roots of this equation. The appearence of MI bands remaining described within NLSE is also shown. It follows from the analysis of the obtained expressions that the limit $kh = 1.363$ (h is the fluid depth, k is the wave number) found by Benjamin, Feir, Whitham, Hasimoto and Ono for the transition between stable and instable fluid is such only in a particular case of small amplitude of unperturbed wave and wave numbers of the perturbing wave.