

## РОЗРАХУНОК КОНФІГУРАЦІЇ ПРОТОПЛАНЕТНОГО ДИСКА ЗА РІВНЯННЯМ ЛЕЙНА–ЕМДЕНА–ФАУЛЛЕРА

М. В. Ваврух, В. В. Чвак

*Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра астрофізики  
вул. Кирила і Мефодія, 8, Львів, 79005, Україна*

(Отримано 22 грудня 2005 р.; в остаточному вигляді — 29 червня 2006 р.)

За допомогою рівняння Лейна–Емдена–Фаулера (ЛЕФ) досліджено рівноважний розподіл матерії в моделі, що описує початкову фазу формування планетної системи із протопланетного диска, який обертається, у наближенні політропної залежності між тиском і густиною. Знайдено новий клас розв'язків рівняння ЛЕФ, що мають характер солітонних. На цій основі побудовано загальний, неперервний і додатний розв'язок цього рівняння, що описує розподіл матерії фрагментованого диска відповідно до закону Тіціуса–Боде.

**Ключові слова:** протопланетний газопиловий диск, закон Тіціуса–Боде, рівняння Лейна–Емдена–Фаулера, локалізовані розв'язки.

PACS number(s): 96.10.+i, 97.82.Jw

### ВСТУП

Проблему зародження, будови й еволюції Сонячної системи завжди трактували як одну з найважливіших у науці. Увага до неї загострилась протягом останнього десятиліття у зв'язку з відкриттям планет навколо інших зір [1–5]. Виявлено подібність у структурі планетних орбіт відомих на сьогодні планетних систем (Сонячна система і 15 планетних систем навколо зір-сусідів Сонця) [6], що узгоджується із законом Тіціуса–Боде. Хоча цей закон є наближеним, подібність структури орбіт у різних планетних системах свідчить про його універсальність. Спробам обґрунтувати цей закон присвячено чимало робіт, зокрема праці таких відомих фізиків і астрономів, як Вайцеккер, Альфвен, Берлаге, Біркеланд, Койпер, Шмідт, Доул та ін. (див. [7]). Однак досі немає загально визнаної теорії планетоутворення й пояснення закону Тіціуса–Боде. Згідно з сучасними уявленнями, утворення зорі й системи вторинних тіл навколо неї відбувається в межах диного процесу, що починається з фрагментації протопланетного диска. Гіпотеза про існування протопланетних дисків й утворення планетних систем у сучасну епоху підтверджена спостереженнями. Зокрема лише в газопиловому комплексі Оріона виявлено близько 150 протопланетних дисків [8]. Гіпотеза про синхронність процесів утворення центральної зорі та її планетної системи дає змогу використати для опису фрагментації диска той самий математичний апарат, яким описують внутрішню структуру зір.

Застосувавши системи рівнянь механічної та енергетичної рівноваги до опису газопилової хмари, можна було б одержати як структуру зорі, так і системи вторинних тіл. Оскільки на ранніх стадіях еволюції процеси енергообміну поза центральною ділянкою хмари не є визначальними, то в першому наближенні можна обмежитись рівнянням механічної рівноваги газопилової хмари, що є основним наближенням небуляр-

них теорій [7]. Такий підхід відповідає стадії еволюції хмари, коли під впливом гравітації та обертання виникає фрагментація зовнішніх шарів. Утворення планетозімалей у них, об'єднання їх і утворення планет відбуваються на пізніших етапах еволюції, які в межах такого підходу не розглядаються.

У цій статті ми розглядаємо модель тонкого газопилового диска, що обертається. Для опису рівноважного розподілу матерії диска за рівнянням Лейна–Емдена–Фаулера (ЛЕФ), використано політропну залежність між тиском і густиною. Знайдено новий клас розв'язків рівняння ЛЕФ, що описують відокремлені згустки матерії. На цій основі побудовано загальний, неперервний і додатний розв'язок рівняння ЛЕФ, що описує розподіл матерії фрагментованого диска відповідно до закону Тіціуса–Боде.

### I. РІВНЯННЯ ЛЕФ ІЗ УРАХУВАННЯМ ОБЕРТАННЯ

Використаймо неінерційну систему відліку, вісь  $OZ$  якої збігається з віссю обертання протопланетного диска. Розподіл матерії в диска визначається рівнянням механічної рівноваги, яке у вибраній системі координат має такий вигляд:

$$\nabla P(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r}), \quad (1)$$

де  $P(\mathbf{r})$  — тиск,  $\rho(\mathbf{r})$  — густина матерії в точці простору, яка визначається радіус-вектором  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , а

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_{\text{гп}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{відц}}(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{2} \omega^2(\mathbf{r}) [x^2 + y^2] \quad (2)$$

є повним потенціалом, що має гравітаційний складник та відцентровий, зумовлені обертанням диска. Ми розглядаємо політропну модель, для якої

$$P(\mathbf{r}) = C\rho^\nu(\mathbf{r}), \quad (3)$$

де параметри  $C$  та  $\nu$  є сталими й визначаються за характеристиками зорі. Відзначимо, що політропне

наближення широко використовується в теорії внутрішньої будови зір для одержання аналітичних чи напіваналітичних розв'язків (див., напр. [9]). Кутову швидкість  $\omega(\mathbf{r})$  надалі вважатимемо заданою функцією відстані від осі обертання  $\xi = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .

Використовуючи співвідношення (2), (3) та діючи оператором градієнта на рівняння (1), зведемо його до такого вигляду:

$$C(1+n)\nabla^2(\rho(\mathbf{r}))^{1/n} = -4\pi G\rho(\mathbf{r}) + 2\omega^2(\xi) + \beta(\xi), \quad (4)$$

$$\beta(\xi) \equiv \xi^2 \left( \frac{d\omega(\xi)}{d\xi} \right)^2 + \omega(\xi) \xi^2 \frac{d^2\omega(\xi)}{d\xi^2} + 5\omega(\xi) \xi \frac{d\omega(\xi)}{d\xi},$$

де  $n = (\nu - 1)^{-1}$ . Уведемо підстановку  $\rho(\mathbf{r}) = U^n(\mathbf{r})$  і перейдемо до циліндричної системи координат  $(\mathbf{r} = (\xi, z, \varphi))$ . У цій статті ми обмежимося азимутально-симетричними розв'язками, коли  $U(\mathbf{r}) = U(\xi, z)$ . Уведемо також безрозмірні змінні  $\xi^* \equiv \xi/\lambda, z^* \equiv z/\lambda$  і безрозмірну функцію  $y(\xi^*, z^*) = U(\xi, z)/U_0$ . Масштабний фактор  $\lambda$  визначимо з умови

$$C(1+n) = 4\pi G\lambda^2 U_0^{n-1}, \quad (5)$$

причому  $U_0 \equiv U(0, 0)$ . У нових змінних рівняння (4) набуває безрозмірної форми рівняння в частинних похідних

$$\left\{ \frac{1}{\xi^*} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left( \xi^* \frac{\partial}{\partial \xi^*} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \right\} y(\xi^*, z^*) + y^n(\xi^*, z^*) = \Omega(\xi^*), \quad (6)$$

$$\Omega(\xi^*) \equiv \left\{ \omega^2(\xi^* \lambda) + \frac{1}{2} \beta(\xi^* \lambda) \right\} (2\pi G U_0^n)^{-1}.$$

Для часткового випадку кеплерівського обертання, коли  $\omega(\xi) = \omega_0 \left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^{3/2}$ , функція  $\Omega(\xi^*)$  є монотонною додатною функцією змінної  $\xi^*$ , а саме  $\Omega(\xi^*) = (8\pi G U_0^n)^{-1} \omega^2(\xi^* \lambda)$ . Згідно з означенням  $y(\xi^*, z^*) \geq 0, y(0, 0) = 1$ , через те з рівняння (6) випливають такі граничні умови на похідні:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*} y(\xi^*, z^*)|_{\xi^*=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z^*} y(\xi^*, z^*)|_{z^*=0} = 0. \quad (7)$$

У теорії внутрішньої будови зір традиційно розглядають сферично-симетричну модель зорі без обертання, а рівняння

$$(r^*)^{-2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left\{ (r^*)^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \right\} y(r^*) + y^n(r^*) = 0 \quad (8)$$

( $r^* = |\mathbf{r}|\lambda^{-1}$ ) і називають власне рівнянням ЛЕФ. Рівняння (8) має знакозмінні розв'язки при  $n < 5$  і додатні монотонно спадні розв'язки при  $n \geq 5$ , але остання область — нефізична (зоря не має скінченної границі). У фізичній області відомі аналітичні розв'язки при  $n = 0$  ( $y(r^*) = 1 - \frac{1}{6}(r^*)^2$ ) і  $n = 1$  ( $y(r^*) = \frac{\sin r^*}{r^*}$ ). У ділянці  $0 \leq n \leq 5$  функція  $y(r^*)$  є додатною й монотонно спадною на інтервалі  $0 \leq r^* \leq r_n^*$ , де вона змінюється від 1 до 0. При цьому  $r_n^*$  є монотонно зростаючою функцією індексу  $n$  і змінюється від  $\sqrt{6}$  до  $\infty$  зі зростанням  $n$  від 0 до  $5 - \delta$  ( $\delta \rightarrow +0$ ). При цьому  $\lambda r_n^* = R_n$  визначає радіус зорі-політропи. За граничних умов  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  розв'язок рівняння (8) має таку асимптотику, якщо  $r \ll r_n$  [10]:

$$y(r^*) = 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{r^*}{2} \right)^2 + \frac{32}{15} n \left( \frac{r^*}{4} \right)^4 - \frac{108}{35} n(8n-5) \left( \frac{r^*}{6} \right)^6 + \dots \quad (9)$$

При  $r^* \rightarrow r_n^*$  функція  $y(r^*)$  має лінійну залежність від  $r_n^* - r^*$ ,

$$y(r^*) \rightarrow \alpha_n \left[ \frac{1}{r^*} - \frac{1}{r_n^*} \right] \simeq \alpha_n (r_n^* - r^*) (r^*)^{-2}, \quad (10)$$

де  $\alpha_n = (r_n^*)^2 \left| \left( \frac{dy}{dr^*} \right)_{r^*=r_n^*} \right|$  є монотонно спадною функцією параметра  $n$ . У двовимірному випадку без урахування обертання, коли  $y(\xi^*, z^*) \equiv y(\xi^*)$ , розв'язки ЛЕФ мають подібні властивості, зокрема  $y(\xi^*)$  є монотонно спадною додатною функцією з такою асимптотикою:

$$y(\xi^*) \rightarrow \begin{cases} 1 - \left( \frac{\xi^*}{2} \right)^2 + 4n \left( \frac{\xi^*}{4} \right)^4 - n(3n-2) \frac{81}{4} \left( \frac{\xi^*}{6} \right)^6 + \dots & \text{при } \xi^* \ll \xi_n^*, \\ \beta_n \ln \frac{\xi_n^*}{\xi^*} + \dots \simeq \frac{\beta_n}{\xi_n^*} (\xi_n^* - \xi^*) + \dots & \text{при } \xi^* \rightarrow \xi_n^*, \end{cases} \quad (11)$$

де  $\xi_n^*$  — точка обертання розв'язку в нуль, яка визначає радіус моделі (диска),  $\beta_n = \xi_n^* \left| \left( \frac{dy}{d\xi^*} \right)_{\xi^*=\xi_n^*} \right|$ .

## II. ЛОКАЛІЗОВАНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ЛЕФ

Рівняння (6) при  $n > 1$  є нелінійним двовимірним рівнянням у частинних похідних, а тому знаходження його аналітичних розв'язків є складною математичною задачею. У цій статті ми використовуємо наближений метод. Нас цікавить передусім залежність функції  $y(\xi^*, z^*)$  від змінної  $\xi^*$ , а для моделі тонкого диска, яку ми розглядаємо, виконується умова  $z^* \ll \xi^*$ . У зв'язку з цим залежність  $y(\xi^*, z^*)$  від змінної  $z^*$  ми врахуємо наближено, використовуючи відомий у теорії акреційних дисків спосіб оцінки товщини тонких дисків [11]. У циліндричній системі координат векторне рівняння (1) можна наближено зобразити систе-

мою двох скалярних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &\simeq -\rho(\xi, z) \frac{z}{r^3} GM(\xi, z), \\ \frac{dP}{d\xi} &\simeq -\rho(\xi, z) \left\{ \frac{\xi}{r^3} GM(\xi, z) - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} [\xi^2 \omega^2(\xi)] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

При записі рівнянь (12) враховано, що основна маса протопланетного диска зосереджена в центрі конфігурації, тому гравітаційний потенціал близький до  $-GM(\xi, z)r^{-1}$  ( $r = [\xi^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$ ). Для тонкого диска  $M(\xi, z) \simeq M(\xi, 0)$  має слабку залежність від змінної  $\xi$ , при цьому  $M(\xi, 0)$  є неспадною функцією  $\xi$ . Виконаймо наближене інтегрування першого з рівнянь (12):

$$\int_{\rho(\xi, 0)}^{\rho(\xi, h)} \rho^{-1} dP \simeq -GM(\xi, 0) \int_0^h \frac{z dz}{(z^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (13)$$

Тут  $h \equiv h(\xi)$  є максимальним значенням змінної  $z$  при заданому  $\xi$  (значення  $z$ -координати, при якому  $\rho(\xi, h) = 0$ ). Якщо в рівнянні (3)  $\nu > 1$ , то з рівняння (13) одержуємо співвідношення

$$(n+1)C [\rho(\xi, 0)]^{\frac{1}{n}} \simeq GM(\xi, 0) \left\{ \xi^{-1} - [\xi^2 + h^2(\xi)]^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (14)$$

або ж

$$(n+1)CU_0 y(\xi, 0) \{GM(\xi, 0)\}^{-1} \simeq \xi^{-1} - [\xi^2 + h^2(\xi)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Для тонкого диска, коли  $h(\xi) \ll \xi$ , звідси знаходимо

$$h^*(\xi^*) = \lambda^{-1} h(\xi) = \{(\xi^*)^3 y(\xi^*, 0)\}^{\frac{1}{2}} \{M^*(\xi^*)\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

де

$$M^*(\xi^*) \equiv M(\xi, 0) \{8\pi\lambda^3 U_0^n\}^{-1} \quad (17)$$

— безрозмірна маса.

Формула (16) визначає напівтовщину диска на до- стій великій відстані від осі обертання. Фізичний зміст мають такі розв'язки  $y(\xi^*, 0)$ , при яких  $h^*(\xi^*)$  є незростаючою функцією змінної  $\xi^*$ , тобто в середньому товщина диска є сталою або ж зменшується

вздовж радіуса. Звичайно, у тих місцях, де  $y(\xi^*, 0)$  досягає мінімуму,  $h^*(\xi^*)$  теж є мінімальним.

Одержана залежність товщини диска від  $\xi^*$  дає змогу спростити рівняння (6). З цієї метою запишемо  $y(\xi^*, z^*)$  у вигляді добутку двох функцій,

$$y(\xi^*, z^*) = \chi(\xi^*)\varphi_{\xi^*}(z^*), \quad (18)$$

а  $\varphi_{\xi^*}(z^*)$  змодельємо пробними функціями, що мають такі властивості:

$$\varphi_{\xi^*}(z^*) > 0 \quad \text{при} \quad |z^*| < h^*(\xi^*),$$

$$\varphi_{\xi^*}(z^*) = 0 \quad \text{при} \quad |z^*| \geq h^*(\xi^*),$$

$$\varphi_{\xi^*}(0) = 1, \quad \frac{d}{dz^*}\varphi_{\xi^*}(z^*) = 0 \quad \text{при} \quad z^* = 0, \quad (19)$$

$$\frac{d^2}{(dz^*)^2}\varphi_{\xi^*}(z^*) \leq 0.$$

У цьому наближенні рівняння (6) зводиться до рівняння для  $y(\xi^*, 0) = \chi(\xi^*)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\chi}{d\xi^{*2}} + \frac{1}{\xi^*} \frac{d\chi}{d\xi^*} + \chi^n(\xi^*) \\ & = \Omega(\xi^*) + \chi(\xi^*) \left| \frac{d^2\varphi_{\xi^*}}{dz^{*2}} \right|_{z^*=0}. \end{aligned} \quad (20)$$

Якщо  $\varphi_{\xi^*}(z^*)$  вибрати у вигляді безрозмірної функції змінної  $z^*/h^*(\xi^*)$ , то, згідно з умовами (19),

$$\left. \frac{d^2\varphi_{\xi^*}}{d(z^*)^2} \right|_{z^*=0} = -\gamma (h^*(\xi^*))^{-2}, \quad (21)$$

де  $\gamma$  — додатне число порядку одиниці.

Відповідно до формул (17), (18)

$$\chi(\xi^*) \left| \frac{d^2\varphi_{\xi^*}}{d(z^*)^2} \right|_{z^*=0} = \frac{\gamma M^*(\xi^*)}{(\xi^*)^3}. \quad (22)$$

Для кеплерівського закону обертання

$$\tilde{\Omega}(\xi^*) = \Omega(\xi^*) + \chi(\xi^*) \left| \frac{d^2\varphi_{\xi^*}}{d(z^*)^2} \right|_{z^*=0} \quad (23)$$

$$= \Omega(\xi^*) + \frac{\gamma M^*(\xi^*)}{(\xi^*)^3}. \quad (24)$$

Для пробної функції

$$\varphi_{\xi^*}(z^*) = \cos \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{z^*}{h^*(\xi^*)} \right\} \quad (25)$$

$\gamma = (\pi/2)^2$ , для функції

$$\varphi_{\xi^*}(z^*) = 1 - \left[ \frac{z^*}{h^*(\xi^*)} \right]^2 \quad (26)$$

$\gamma = 2$  і т. д. Отже, двовимірне нелінійне рівняння (6) наближено зводиться до одновимірного рівняння (20) з перенормованим неоднорідним членом.

Ми будемо цікавитись розв'язками одержаного рівняння за межами зорі в околі досить далекої точки  $\xi_0^*$ , уводячи заміну  $x = \xi^* - \xi_0^*$  та функцію  $f(x) = \chi(\xi_0^* + x)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2}f(x) + \frac{1}{\xi_0^* + x} \frac{d}{dx}f(x) \\ & = \tilde{\Omega}(\xi_0^* + x) - f^n(x). \end{aligned} \quad (27)$$

При  $\xi_0^* \gg 1$  у цьому рівнянні біля першої похідної фігурує малий параметр, тому розв'язок (26) близький до розв'язку рівняння нульового наближення

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \Omega_0 - f^n(x); \quad (28)$$

$$\Omega_0 = \tilde{\Omega}(\xi_0^*).$$

Як випливає з рівняння (27), при  $f(x) > 0$  і довільних  $\Omega_0 \leq 0$  завжди існує ділянка змінної  $x$ , у якій  $\frac{d^2f}{dx^2} < 0$ , що є ознакою локалізованого розв'язку. Якщо  $\Omega_0 > 0$ , то рівняння (13) має локалізований розв'язок при досить малих значеннях  $\Omega_0$ , принаймі при  $f^n(x) > \Omega_0$ . Розв'язок рівняння (27) можна записати у квадратурах, оскільки воно належить до типу рівнянь, у яких не фігурує явно змінна  $x$ . Перейдемо до змінної  $f = f(x)$  за правилом

$$p = \frac{df(x)}{dx}, \quad (29)$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{dp}{df}p,$$

зводячи рівняння (27) до нелінійного рівняння першого порядку

$$p \frac{dp}{df} = \Omega_0 - f^n. \quad (30)$$

Інтегруючи його, одержуємо співвідношення

$$\frac{p^2}{2} = f\Omega_0 - \frac{f^{n+1}}{n+1} + C_n, \quad (31)$$

де  $C_n$  — стала інтегрування. Розгляньмо рівняння (27) в ділянці  $-x_1 \leq x \leq x_2$  при таких граничних умовах:

$$f(0) \equiv f_{\max}, \quad f'(0) = 0; \quad (32)$$

$$f(-x_1) \equiv f_{\min}^{(1)} \geq 0, \quad f(x_2) \equiv f_{\min}^{(2)} \geq 0; \quad (33)$$

$$f'(-x_1) = f'(x_2) = 0. \quad (34)$$

З умови  $f'(0) = 0$  ( $p = 0$ ) знаходимо сталу інтегрування

$$C_n = (n+1)^{-1} f_{\max}^{n+1} - f_{\max}\Omega_0. \quad (35)$$

Розв'язуючи рівняння (30) щодо  $p$  та інтегруючи його, одержуємо неявно заданий розв'язок у квадратурах:

$$x = \pm \left( \frac{n+1}{2} \right)^{1/2} \int_f^{f_{\max}} df \left\{ (f_{\max}^{n+1} - f^{n+1}) - (f_{\max} - f) \Omega_0 (n+1) \right\}^{-1/2}. \quad (36)$$

З умови (32) визначаємо ділянку існування розв'язку:

$$x_{1,2} = \left( \frac{n+1}{2} \right)^{1/2} \int_{f_{\min}^{(1,2)}}^{f_{\max}} df \left\{ (f_{\max}^{n+1} - f^{n+1}) - (f_{\max} - f) \Omega_0 (n+1) \right\}^{-1/2}. \quad (37)$$

Тотожним перетворенням за допомогою підстановки  $t = f/f_{\max}$  приведемо вираз (36) до такого вигляду:

$$x_{1,2} = \left( \frac{n+1}{2} \right)^{1/2} f_{\max}^{\frac{1}{2}(1-n)} \int_{a_{1,2}}^1 dt (1-t)^{-1/2} \left\{ \sum_{i=0}^n t^i - f_{\max}^{-n} \Omega_0 (n+1) \right\}^{-1/2}, \quad (38)$$

де  $a_{1,2} \equiv f_{\min}^{(1,2)} f_{\max}^{-1}$ . З умови, щоб підкореневий вираз був додатним для всіх значень  $t$  (або ж дорівнював нулеві на нижній межі інтегрування), отримуємо співвідношення між параметрами  $f_{\min}^{1,2}$ ,  $\Omega_0$ ,  $f_{\max}$ :

$$1 + \sum_{i=1}^n \left\{ f_{\min}^{(1,2)} f_{\max}^{-1} \right\}^i \geq \Omega_0 (n+1) f_{\max}^{-n}. \quad (39)$$

Покладаючи  $f_{\min}^{(1,2)} = 0$  або  $f_{\min}^{(1,2)} = f_{\max}$ , бачимо, що  $\Omega_0 f_{\max}^{-n}$  змінюється від нуля до деякого значення, яке лежить у межах від  $(n+1)^{-1}$  до одиниці залежної від величини  $f_{\min}^{(1,2)}/f_{\max}$ .

Рисунок 1 ілюструє характер розв'язку (35) для  $n = 3$  та  $f_{\max} = 0.6$  при різних значеннях параметра  $\Omega_0$  ( $\Omega_0 f_{\max}^{-3} = 1/4$  (крива 1),  $3/8$  (крива 2),  $1/2$  (крива 3),  $3/4$  (крива 4),  $1$  (крива 5)). За умови  $f_{\min}^{(1,2)} = 0$  знаходимо такий зв'язок між величиною ділянки існування розв'язку та значенням його в максимумі:

$$x_1 = x_2 = f_{\max}^{(1-n)/2} I_n, \quad (40)$$

$$I_n = \sqrt{2} (n+1)^{1/2} \int_0^1 dt (1-t^{2n})^{-1/2}.$$

Як видно з означення,  $I_n$  є монотонно зростаючою функцією  $n$  ( $I_1 = \pi$ ,  $I_2 = 3.2114$ ,  $I_3 = 3.4346$ , ...).

На рисунку 2 подано чисельний розв'язок рівняння (26) в околі точки  $\xi_0^*$  при різних значеннях цього параметра ( $\xi_0^* = 10$  (крива 1),  $20$  (крива 2),  $50$  (крива 3),  $100$  (крива 4)), якщо мінімальне значенні частоти ( $\Omega_0 f_{\max}^{-3} = \frac{1}{4}$ ;  $f_{\max} = 0.6$ ). Як видно з порівняння кривої 1 рисунка 1 і кривої 4 рисунка 2, при досить великих значеннях  $\xi_0^*$  розв'язки рівнянь (26) і (27) близькі між собою. Це дає змогу використовувати аналітичні розв'язки рівняння (27) для того, щоб сконструювати неперервний додатний розв'язок рівняння (26) в усій периферійній ділянці  $\xi^* \geq \xi_0^*$ , “зшиваючи” розв'язки (35), центровані в сусідніх точках  $\xi_0^*$ .

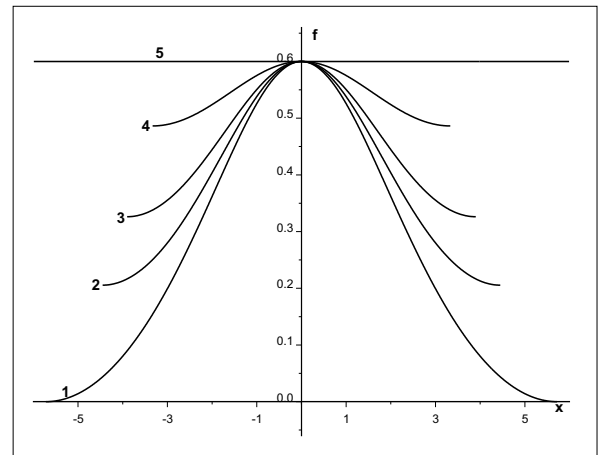


Рис. 1. Розв'язок (35) для  $n = 3$  та  $f_{\max} = 0.6$  при різних значеннях параметра  $\Omega_0$  ( $\Omega_0 f_{\max}^{-3} = 1/4$  (крива 1),  $3/8$  (крива 2),  $1/2$  (крива 3),  $3/4$  (крива 4),  $1$  (крива 5)).

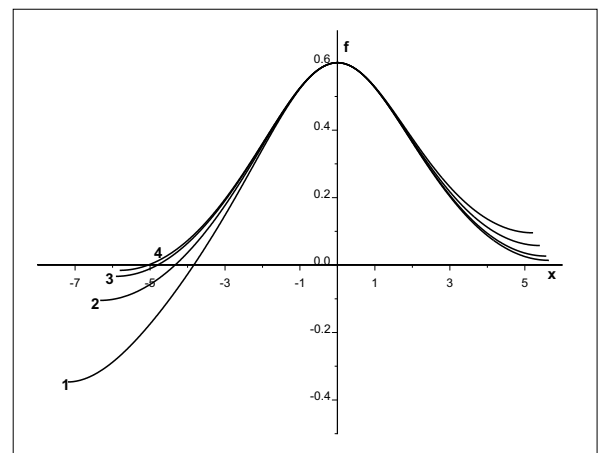


Рис. 2. Чисельний розв'язок рівняння (26) в околі точки  $\xi_0^*$  при різних значеннях цього параметра ( $\xi_0^* = 10$  (крива 1),  $20$  (крива 2),  $50$  (крива 3),  $100$  (крива 4)), якщо мінімальне значення частоти ( $\Omega_0 f_{\max}^{-3} = \frac{1}{4}$ ;  $f_{\max} = 0.6$ ).

Нехай  $\xi_0^*(m)$  — центр  $m$ -го “солітона”, що описується співвідношенням (35),  $x_1(m)$  та  $x_2(m)$  — межі ділянки, зайнятої цим “солітоном”,  $f_{\max}(m)$  — максимальне значення функції  $f(x)$  у цій ділянці. “Зшиваючи”  $m$ -й та  $(m+1)$ -й розв’язки при умові, що  $f_{\min}(x_1(m)) = f_{\min}(x_2(m+1)) = 0$ , знаходимо співвідношення:

$$\begin{aligned} \xi_0^*(m+1) &= \xi_0^*(m) + x_2(m) + x_1(m+1) \\ &= \xi_0^*(m) + I_n \{ f_{\max}^{-1}(m) + f_{\max}^{-1}(m+1) \}. \end{aligned} \quad (41)$$

Якщо кутова швидкість  $\omega(\xi)$  пропорційна до  $\xi^{-k/2}$ , то

$$\frac{\Omega_0(m)}{\Omega_0(m+1)} = \left\{ \frac{\xi_0^*(m+1)}{\xi_0^*(m)} \right\}^k. \quad (42)$$

З іншого боку, згідно з формулою (38),

$$\frac{\Omega_0(m)}{\Omega_0(m+1)} = \left\{ \frac{f_{\max}(m)}{f_{\max}(m+1)} \right\}^n. \quad (43)$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь (41) та (42), одержуємо рівняння

$$f_{\max}^{-1}(m+1) = f_{\max}^{-1}(m) \left\{ \frac{\xi_0^*(m+1)}{\xi_0^*(m)} \right\}^{k/n}. \quad (44)$$

Згідно з формулою (41), відношення  $\alpha = \xi_0^*(m+1)/\xi_0^*(m)$  задовольняє рівняння:

$$\alpha = \{1 + \delta_n(m)\} \left\{ 1 - \delta_n(m) \alpha^{\frac{k}{n}-1} \right\}^{-1}; \quad (45)$$

$$\delta_n(m) = I_n \{ \xi_0^*(m) f_{\max}(m) \}^{-1}.$$

Згідно з формулою (23)

$$\tilde{\Omega}(\xi^*) = \frac{M^*(\xi^*)}{(\xi^*)^3} \left\{ 4 \left( 1 - \frac{k}{2} \right)^2 + \gamma \right\} \sim (\xi^*)^{-k}, \quad (46)$$

а тому за умовою (38)

$$f_{\max}(m) \sim (\xi_0^*(m))^{-k/n}. \quad (47)$$

Відповідно до формули (16) товщина диска буде сталою за умови, що

$$f_{\max}(m) \sim (\xi_0^*(m))^{-k}. \quad (48)$$

Із порівняння двох останніх формул виходить, що  $n = 1$ . З умови, щоб  $\delta_n(m)$  не залежало від  $\xi_0^*$ , знаходимо співвідношення

$$f_{\max}(m) \sim (\xi_0^*(m))^{-1}, \quad (49)$$

звідки видно, що  $k = 1$ . Тому з рівняння (44), якщо  $n = k = 1$ , знаходимо

$$\alpha = \{1 + \delta_1(m)\} \{1 - \delta_1(m)\}^{-1}. \quad (50)$$

При  $\delta_1(m) = 1/4$  одержуємо  $\alpha = 5/3$ . Це значення забезпечує  $f_{\max}(m) \simeq 1/3$ ,  $\xi_0^*(m) \simeq 38$ . Одержане значення  $\alpha$  відповідає розподілові центрів локалізації  $\xi_0^*(m)$  відповідно до закону Тіцуса–Боде.

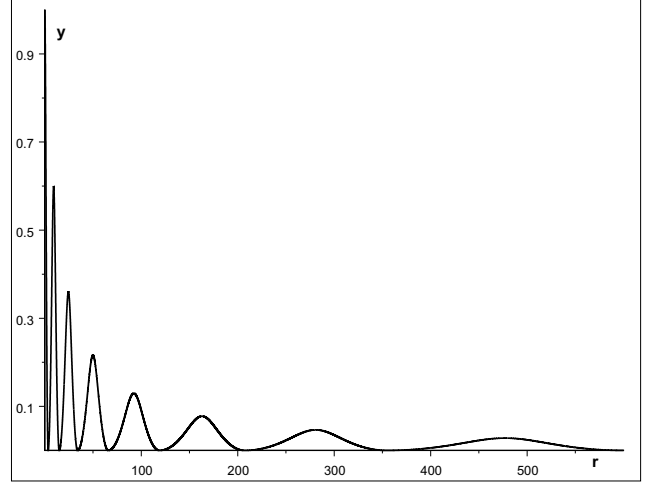


Рис. 3. Неперервний розв’язок рівняння (27), одержаний методом “зшивання”.

На рисунку 3 подано сконструйований за допомогою чисельної процедури “зшивання” неперервний додатний розв’язок рівняння (27). При цьому використано наближення постійного мінімального значення  $\Omega_0(m)$  на  $m$ -му інтервалі від  $\xi_0^*(m) - x_1(m)$  до  $\xi_0^*(m) + x_2(m)$ , що відповідає умовам  $f_{\min}(x_{1,2(m)}) = 0$ , а також  $n = k = 1$ . Як видно з рисунка,  $\Delta \xi_0^*(m) = \xi_0^*(m+1) - \xi_0^*(m)$  зростає зі збільшенням  $m$ , причому величина  $\alpha(m)$  є монотонно спадною функцією числа  $m$ , яка прямує до межі 1.68... у периферійній ділянці. Розподіл матерії диска в загальних рисах відповідає законові Тіцуса–Боде.

### III. РОЗВ’ЯЗКИ РІВНЯННЯ ЛЕФ ПРИ $n = 1$

При  $n = 1$  рівняння (6) є лінійним неоднорідним рівнянням у частинних похідних. Уводячи змінну  $x = \xi^* - \xi_0^*$ , запишемо його в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\xi_0^* + x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} y(\xi_0^* + x, z) \\ + y(\xi_0^* + x, z) = \Omega(\xi_0^* + x). \end{aligned} \quad (51)$$

Тут і далі знак (\*) біля змінної  $z$  опущено. Розглянемо наближений розв’язок цього рівняння на великих відстанях від початку координат, коли  $(\xi_0^*)^{-1}$  є малим параметром. У нульовому наближенні це дозволяє знехтувати членом із похідною  $\frac{\partial}{\partial x}$ , а  $\Omega(\xi_0^* + x)$  замінити сталою величиною  $\Omega_0 = \Omega(\xi_0^*)$ . Функція

$$F(x, z) = y(\xi_0^* + x, z) - \Omega_0 \quad (52)$$

задовольняє двовимірне рівняння Гельмгольца [12]

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} F(x, z) + F(x, z) = 0. \quad (53)$$

Накладемо такі граничні умови:

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= y(\xi_0^*, 0) - \Omega_0; \\ \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x, z=0} &= 0; \quad \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{x, z=0} = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Рівняння (52) допускає стандартне розділення змінних, а його частинний розв'язок записуємо у вигляді:

$$\begin{aligned} F_\lambda(x, z) &= X_\lambda(x)Z_{1-\lambda}(z), \\ X_\lambda(x) &= C_{(\lambda)}\cos(x\sqrt{\lambda}) + \tilde{C}_{(\lambda)}\sin(x\sqrt{\lambda}), \\ Z_{1-\lambda}(z) &= C_{(1-\lambda)}\cos(z\sqrt{1-\lambda}) + \tilde{C}_{(1-\lambda)}\sin(z\sqrt{1-\lambda}), \end{aligned} \quad (55)$$

де  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $C_{(\lambda)}, \dots, \tilde{C}_{(1-\lambda)}$  — сталі інтегрування. Загальний розв'язок рівняння (52), що задовольняє умови (53), є суперпозицією розв'язків (54),

$$F(x, z) = \int_0^1 d\lambda C_{(\lambda)}C_{(1-\lambda)}\cos(x\sqrt{\lambda})\cos(z\sqrt{1-\lambda}). \quad (56)$$

$F(x, z)$  є симетричною функцією змінних  $x, z$ , яка близька до функції Бесселя нульового порядку  $J_0(R)$  [13], де  $R = (x^2 + z^2)^{1/2}$ . Справді, якщо вибрати сталі інтегрування  $C_{(\lambda)}$  у вигляді

$$C_{(\lambda)}^{(1)} = C_0^{1/2}(\pi\lambda)^{-1/2}, \quad (57)$$

то в цьому випадку

$$\begin{aligned} F^{(1)}(x, z) &= \frac{C_0}{\pi} \int_0^1 d\lambda \{\lambda(1-\lambda)\}^{(-1/2)} \cos(x\sqrt{\lambda}) \cos(z\sqrt{1-\lambda}) = C_0 \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos(x \cos \varphi) \cos(z \sin \varphi) \\ &= C_0 J_0(R) \end{aligned} \quad (58)$$

(тут використано підстановку  $\lambda = \cos^2 \varphi$ ).

Якщо вибрати сталі  $C_{(\lambda)}$  незалежними від  $\lambda$  ( $C_{(\lambda)} = C_0^{1/2}$ ), тоді

$$\begin{aligned} F^{(2)}(x, z) &= C_0 \Psi(x, z), \\ \Psi(x, z) &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin \varphi \cos \varphi \cos(x \cos \varphi) \cos(z \sin \varphi). \end{aligned} \quad (59)$$

Згідно з формулами (51), (57), (58)

$$C_0 = F^{(1)}(0, 0) = F^{(2)}(0, 0) = y(\xi_0^*, 0) - \Omega_0. \quad (60)$$

Таким чином, одержуємо, що

$$\begin{aligned} y^{(1)}(\xi_0^* + x, z) &= \Omega_0 + \{y(\xi_0^*, 0) - \Omega_0\} J_0(R), \\ y^{(2)}(\xi_0^* + x, z) &= \Omega_0 + \{y(\xi_0^*, 0) - \Omega_0\} \Psi(x, z). \end{aligned} \quad (61)$$

Фізичний зміст мають лише додатні значення  $y(\xi_0^* + x, z)$ , тому умова

$$\Omega_0 + \{y^{(1)}(\xi_0^*, 0) - \Omega_0\} J_0(R_0) = 0 \quad (62)$$

визначає радіус поперечного (радіяльного) перерізу тора  $R_0$ . Оскільки в ділянці між першим і другим нулями функція  $J_0(R)$  задовольняє нерівність  $|J_0(R)| \leq 0,42$ , то розв'язок  $y^{(1)}(\xi_0^* + x, z)$  існує при досить малих значеннях параметра  $\Omega_0$ , а саме при

$$y(\xi_0^*, 0) \geq 3,5\Omega_0. \quad (63)$$

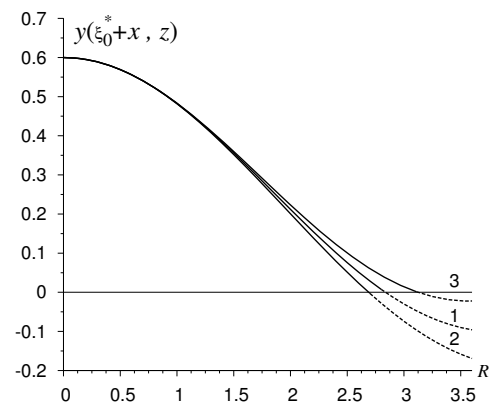


Рис. 4.  $y(\xi_0^* + x, z) = F(x, z) + \Omega_0$  ( $y(\xi_0^*, 0) = 0,6$ ,  $\Omega_0 = 0,1$ ), де  $F(x, z)$  — розв'язок рівняння (52). Крива 1 відповідає  $y^{(1)}(\xi_0^* + x, z)$ , крива 2 —  $y^{(2)}(\xi_0^* + x, 0)$ , крива 3 —  $y^{(2)}(\xi_0^* + x, x)$ .

На рисунку 4 наведено розв'язки  $y^{(1)}(\xi_0^* + x, z)$ ,  $y^{(2)}(\xi_0^* + x, z)$  при  $y(\xi_0^*, 0) = 0,6$ ,  $\Omega_0 = 0,1$  як функції від змінної  $R = (x^2 + z^2)^{1/2}$ . При цьому крива 1 відповідає  $y^{(1)}(\xi_0^* + x, z)$ , крива 2 —  $y^{(2)}(\xi_0^* + x, z)$  при  $z = 0$ , крива 3 —  $y^{(2)}(\xi_0^* + x, z)$  при  $z = x$ . Як вид-

но з рисунка, функції  $y^{(1)}(\xi_0^* + x, z)$  та  $y^{(2)}(\xi_0^* + x, z)$  близькі між собою, а їх відхилення є суттєвим лише в ділянці, де  $y(\xi_0^* + x, z)$  зануляється. Оптимальний вибір сталих інтегрування  $C_{(\lambda)}$  можна здійснити, використавши додаткові фізичні умови, наприклад, умови мінімуму гравітаційної енергії моделі тощо. Однак робити це має сенс у межах точнішого розв'язку рівняння (6), урахувавши член  $(\xi_0^* + x)^{-1} \frac{\partial}{\partial x}$  та відхилення  $\Omega(\xi_0^* + x) - \Omega(\xi_0^*)$  як збурення.

## ВИСНОВКИ Й ОБГОВОРЕННЯ

Обертання зір і протопланетних дисків є атрибутом їх існування. Однак питання про вплив обертання на еволюцію протопланетної хмари все ще дискусійне [9]. Ця задача пов'язана з фрагментацією газопилової хмари, утворенням кратних зір і планетних систем. Ранні числові розрахунки у межах гідродинамічного підходу давали суперечливі результати. У більшості праць приймалося, що початкові конфігурації мають сталу густину і сталу кутову швидкість. Поява піка густини в центрі та скупчення речовини в кільцеподібній ділянці на периферії одержано в працях Ларсона. Утворення кільцевої структури всередині протозорі підтверджено незалежними числовими розрахунками Блека й Боденгаймера. Однак у числових розрахунках Чарнутаера поява кільцевої структури не була підтверджена (відсутність фрагментації диска). Пізніше Боденгаймер і Чарнутаер повідомили, що їхні цілком різні програми приводять до подібних, хоч і не ідентичних результатів [14]. Головний їхній висновок

— утворення кільцеподібних структур у колапсуючих хмарах справді спостерігається. У роботі [15] показано, що утворення кільцевої структури неможливе при твердотільному обертанні, а лише при диференціальному. Цей висновок був підтверджений у праці [16].

У межах рівняння ЛЕФ ми встановили можливість фрагментації в моделі протопланетного диска, основна доля маси якого зосереджена в центрі, що відповідає початковій фазі утворення планетної системи навколо окремої зорі. Умовою існування локалізованого розв'язку, а надто розвинутої кільцевої структури є диференціальне обертання з невеликою кутовою швидкістю, яка монотонно спадає вздовж радіуса диска. Кільцева структура диска узгоджується із законом Тіцуса–Бодє за умови, що кутова швидкість змінюється за законом  $\omega(\xi) \sim \xi^{-\frac{1}{2}}$ , що вимагає використання політропи з індексом  $n = 1$ . Одержані результати підтверджують основні висновки робіт [14–16], виконаних у межах гідродинамічного підходу. Фрагментація в розглянутій моделі газопилового диска відповідає спостережуваним даним щодо існування супутників у зір спектральних класів, старших за F5, структури планет у Сонячній системі й позасонячних системах, структури супутникових орбіт біля планет-гігантів. Ми одержали наближені аналітичні розв'язки рівняння ЛЕФ, замінюючи величину  $\Omega(\xi^*)$  в рівнянні (6) її середнім значенням  $\Omega(\xi_0^*)$ . Точніше врахування залежності  $\Omega(\xi)$  на характер розв'язків можна виконати або за теорією збурень, або ж розв'язання рівнянням (6) числовими методами, використовуючи одержані вище аналітичні розв'язки як нульове наближення.

- 
- [1] R. P. Butler, S. S. Vogt, G. W. Marcy, D. A. Fischer, G. W. Henry, K. Apps, *Astrophys. J.* **545**, 504 (2000).
  - [2] R. P. Butler, S. S. Vogt, G. W. Marcy, D. A. Fischer, C. G. Tinney, H. R. Jones, A. J. Penny, K. Apps, <http://exoplanets.org/stats2000.ps>.
  - [3] G. W. Marcy, *Extrasolar Planets Catalog* (<http://exoplanets.org>), 2006.
  - [4] J. Schneider, *C. R. Acad. Sci. Paris* **327**, 621 (1999).
  - [5] J. Schneider, *Extrasolar Planets Encyclopedia* (<http://exoplanets.org>), 2006.
  - [6] М. В. Ваврух, Н. Л. Тишко, *Журн. фіз. дослідж.* **6**, 414, (2002).
  - [7] М. М. Ньето, *Закон Тіцуса–Бодє*. (Мир, Москва, 1976).
  - [8] А. Баранский, *Вселенная, пространство, время* №1, 40 (2004).
  - [9] Ж.-Л. Тассуль, *Теория вращающихся звезд* (Мир, Москва, 1982).
  - [10] Ш. Чандрасекхар, *Введение в учение о строении звезд* (Изд-во. иностр. лит., Москва, 1950).
  - [11] С. Шапиро, С. Тьюколски, *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Т. 1* (Мир, Москва, 1985).
  - [12] Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (Наука, Москва, 1977).
  - [13] *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица, И. Стигана (Наука, Москва, 1979).
  - [14] P. Bodenheimer, W. Tscharnuter, *Astron. Astrophys.* **74**, 288 (1979).
  - [15] Y. Kamiya, *Progr. Theor. Phys.* **58**, 802 (1977).
  - [16] M. L. Norman, J. R. Wilson, R. T. Barton, *Astrophys. J.* **239**, 968 (1980).



**THE COMPUTATION OF THE PROTOPLANET DISC CONFIGURATION  
VIA LANE–EMDEN–FOWLER EQUATION**

M. V. Vavrukh, V. V. Chvak

*Department for Astrophysics, Ivan Franko National University of Lviv,  
8 Kyryla i Mefodija St., Lviv, UA–79005, Ukraine*

We investigated the equilibrium distribution of the matter for the model of the rotating protoplanet gas-dusty disc using the Lane–Emden–Fowler (LEF) equation in the approach of the polytropic dependence between pressure and density. We obtained a new kind of solutions of the LEF equation that are similar to solitons. On this groundwork we constructed general, continuous and positive solutions of the LEF equation that described the distribution of the fragmented disc matter via Titius–Bode’s law.