ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 10, № 4 (2006) с. 290–314

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 10, No. 4 (2006) p. 290–314

ЗАСТОСУВАННЯ ДВОЧАСТИНКОВОГО РІВНЯННЯ ДІРАКА У СПЕКТРОСКОПІЇ МЕЗОНІВ

А. Дувіряк
Інститут фізики конденсованих систем НАН України,
вул. Свєнціцького, 1, Львів, UA–79011, Україна
(Отримано 16 січня 2007 р.)

Двочастинкове рівняння Дірака із загальним локальним потенціялом зведено до пари звичайних диференційних рівнянь 2-го порядку для радіяльних компонент хвильової функції. Знайдено клас спеціяльних потенціялів, для яких рівняння допускає точні розв'язки. Для інших випадків запропоновано псевдопертурбативний метод розкладів за $1/j$. Побудовано кілька моделей легких мезонів, обчислено точні та наближені спектри енерґій. Вони порівнюються з експериментальними даними.

Ключові слова: двочастинкове рівняння Дірака, псевдопертурбативний метод, траєкторії Редже.

PACS number(s): 03.65.Pm, 03.65.Ge, 12.39.Pn

I. ВСТУП

Двочастинкове рівняння Дірака (2ЧРД) все частіше використовують у релятивістській задачі про зв'язані стани. Окрім двох діраківських вільночастинкових членів, воно містить оператор, що описує взаємодію двох ферміонів зі спіном 1/2. Як приклади згадаємо потенціял Брайта [1, 2] або інші версії електромагнетного потенціялу (простіші [3–5] чи складніші [6–8]), а також його узагальнення, що використовують для опису міжкваркової [9–16] чи міжнуклонної [17, 18] взаємодій[1]. Усі ці потенціяли є локальними в координатному представленні; вони виводяться з класичної [6–8] та напівквантової [5, 21–23] теорії поля або підбираються феноменологічно[2].

Тривалий час 2ЧРД розглядали лише в межах теорії збурень — квазірелятивістських наближень і/або розкладів за константою взаємодії. Для електромагнетної взаємодії тільки таке тлумачення рівняння Брайта (і то лише в 1-му наближенні) має фізичний сенс [2]. У задачах із сильним зв'язком використання теорії збурень є необґрунтованим. До 2ЧРД з різноманітними локальними потенціялами стали застосовувати непертурбативні методи, які полягалали у зведенні його шляхом розділення змінних (на радіяльну і спін-кутові) до системи звичайних диференційних рівнянь (так звана *радіяльна редукція*) з подальшим аналітичним або чисельним інтеґруванням [5, 7–9, 11–15, 17, 18, 22].

І одразу непертурбативний розгляд 2ЧРД виявляє притаманні цьому рівнянню патологічні особливості. У багатьох фізично цікавих випадках радіяльно редукована система має залежні від енерґії нефізичні полюси при скінченних відстанях між частинками [22, 29, 30]. Така краєва задача у строгому математичному сенсі виявляється некоректною або невідповідною її фізичному змістові. Це спонукало авторів у цій галузі до модифікації крайової задачі [11], самих рівнянь [13, 14] або використання залежних від енерґії потенціялів [30].

Попри значну кількість розглянених часткових прикладів, загальний вигляд радіяльно зредукованого 2ЧРД, структура нефізичних патологій та шляхи їх уникнення в літературі майже не обговорювали.

У цій роботі здійснено радіяльну редукцію 2ЧРД із загальним двоферміонним потенціялом, локальним у координатному представленні. Такий потенціял, що включає всі згадані вище приклади як часткові, отримали Нікітін та Фущич [31] з вимоги обертової інваріянтности рівняння[3]. З фізичних міркувань ми обмежуємо цей потенціял до ермітового і явно параметризуємо 48-ма дійсними скалярними функціями відстані між частинками.

Радіяльну редукцію 2ЧРД з таким потенціялом

[1] Дещо інший підхід, який теж називають двочастинковими рівняннями Дірака (вживаючи, однак, термін "рівняння" у множині), запропонували Сазджан [19] та Кратер і ван Алстін [20]. На відміну від рівняння типу Брайта, тут систему двох частинок описано не одним, а двома рівняннями типу Дірака, структура яких передусім зумовлена математичною вимогою сумісности, а вже потім — фізичним змістом взаємодії. Таких рівнянь тут не розглядаємо.

[2] У рівняннях квантово-польового походження, таких, як рівняння Бете–Салпетера [2, 24, 25] або квазіпотенціяльні [26–28], взаємодію описують складним інтеґральним оператором в імпульсному представленні.

[3] Обертова інваріянтність є залишковою симетрією після переходу в систему відліку центра мас.

здійснено за відомою схемою [5, 22] (див. також [7–9, 11, 13, 15, 17, 18]), яка приводить до системи 8-ми диференційних рівнянь 1-го порядку. Подальша низка перетворень — спочатку до системи 4-х диференційних рівнянь 1-го порядку, а потім — до пари рівнянь 2-го порядку — дає змогу явно простежити появу нефізичних синґулярностей і звести задачу до зручного для аналізу вигляду.

Так знаходимо клас потенціялів, для яких одержана система рівнянь не є патологічною, а серед них — точно розв'язувані випадки, що є узагальненнями відомих у літературі дiраківських осциляторів [32–34].

Для решти випадків пропонуємо псевдопертурбативний метод розв'язування 2ЧРД із використанням розкладів за $1/j$ (де j — квантове число повного моменту імпульсу системи), який застосовний до сильного зв'язку і нечутливий до існування особливих точок краєвої задачі. Метод узагальнює техніку розкладів за $1/N$ [35–37] або $1/\ell$ [38, 39] на випадок двох зв'язаних рівнянь із нелінійною залежністю від спектрального параметра.

Результати точного та псевдопертурбативного аналізу 2ЧРД застосовано до опису спектрів легких мезонів. Спочатку будуємо точно розв'язувану модель із потенціялом, що є суперпозицією лінійного та кулонівського членів зі складною спіновою структурою. Далі методом $1/j$ розглядаємо кілька моделей із різними лінійними потенціялами скалярного типу і кулонівськими — векторного типу. Отримані точні та наближені спектри аналізуємо і порівнюємо із реальними спектрами легких мезонів.

II. ЗАГАЛЬНА СТРУКТУРА ПОТЕНЦІЯЛУ

У системі відліку центра інерції 2ЧРД має вигляд:

$$\{h_1(\mathbf{p}) + h_2(-\mathbf{p}) + U(\mathbf{r}) - E\}\,\Phi(\mathbf{r}) = 0, \tag{2.1}$$

де $\Phi(\mathbf{r})$ є 16-компонентною хвильовою функцією (діраківським 4×4-біспінором), залежною від відносного радіус-вектора $\mathbf{r}$,

$$h_a(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\alpha}_a \cdot \mathbf{p} + m_a\beta_a \equiv\; -\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_a \cdot \boldsymbol{\nabla} + m_a\beta_a,\quad a = 1, 2, \tag{2.2}$$

є діраківськими гамільтоніянами вільних частинок із масами m_a, $a = 1, 2$, $\mathbf{p} = -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}$, а $U(\mathbf{r})$ — потенціял взаємодії. Якщо скористатися 4×4-матричним представленням для $\Phi(\mathbf{r})$, то оператори $\boldsymbol{\alpha}_a$ та β_a діють так: $\boldsymbol{\alpha}_1\Phi = \boldsymbol{\alpha}\Phi$, $\boldsymbol{\alpha}_2\Phi = \Phi\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ і т. д., де $\boldsymbol{\alpha}$ та β — матриці Дірака.

Потенціял $U(\mathbf{r})$ є мультиплікативним оператором у координатному представленні, інваріянтним щодо просторових поворотів та інверсій. У [31] подано найзагальніший вигляд такого потенціялу:

$$U(\mathbf{r}) = \sum\nolimits_{A=1}^{48} U_A(r)\Gamma_A. \tag{2.3}$$

Він параметризується 48-ма довільними (взагалі кажучи, комплексними) функціями $U_A(r)$ відстані між частинками $r = |\mathbf{r}|$ (будемо називати їх парціяльними потенціялами), а матриці Γ_A будуються в термінах матриць Дірака та одиничного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

У цій роботі будемо вимагати, щоби потенціял U був ермітовим у скалярному добутку

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \int d^3r\,\mathrm{Tr}(\,\Psi^{\dagger}(\mathbf{r})\,\Phi(\mathbf{r})), \tag{2.4}$$

а, отже, рівняння (2.1) — гамільтоновим. Вимога ермітовости зменшує довільність загального потенціялу до 48-ми дійсних довільних парціяльних потенціялів.

Нижче ми пропонуємо ермітів базис для матриць Γ, що входять у загальний потенціял. Скористаймось для матриць Дірака співвідношенням $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^5\boldsymbol{\sigma}$, де компоненти σ_i $(i = 1, 2, 3)$ вектора $\boldsymbol{\sigma}$ можна розуміти або як 2×2-матриці Паулі, або як блок-діягональні 4×4-матриці $\mathrm{diag}(\sigma_{\mathrm{i}}, \sigma_{\mathrm{i}})$ (що не повинно привести до непорозумінь). Цим самим $\boldsymbol{\alpha}$ умовно розділено на два множники, один з яких діє на "частинково-античастинкові" ступені вільности, а інший — на власне спінові ступені вільности. Назвімо умовно ці множники *діраківським* та *спіновим* відповідно. Подібно можна вчинити і з іншими матрицями Дірака чи їх добутками. Тепер, враховуючи, що при поворотах та інверсіях β поводиться як скаляр, γ^5 — як псевдоскаляр, $\mathbf{n}$ — як вектор, $\boldsymbol{\sigma}$ — як псевдовектор, зручно побудувати шуканий базис у вигляді добутку діраківського та спінового множників:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{ee} = \{I,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_1\beta_2\} \times S,\\
&\Gamma_{oo} = \gamma_1^5\gamma_2^5 \times \Gamma_{ee}, &(2.5)\\
&\Gamma_{eo} = \{I,\ \beta_1,\ \mathrm{i}\beta_2,\ \mathrm{i}\beta_1\beta_2\} \times \gamma_2^5 \times T,\\
&\Gamma_{oe}\ :\ 1 \leftrightarrow 2, &(2.6)
\end{aligned}$$

де I — одиничний оператор,

$$S = \{S_{(i)},\ i = 1, 2, 3\} \equiv \{I,\ \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2,\ (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n})\} \tag{2.7}$$

— множина скалярних, а

$$T = \{T_{(i)},\ i = 1, 2, 3\} \equiv \{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n},\ \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n},\ (\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2)\} \tag{2.8}$$

— псевдоскалярних спінових множників. Матриці Γ в (2.5)–(2.6) згруповано, згідно з класифікацією Храпливого [40], у парно-парні оператори Γ_{ee}, непарно-непарні Γ_{oo}, парно-непарні Γ_{eo} та непарно-парні Γ_{oe}. Усі інші O(3)-інваріянтні ермітові матриці, побудовані в термінах матриць Дірака та вектора $\mathbf{n}$, виражаються через (2.5)–(2.6). Відповідно, і в потенціялі (2.3) можна виділити 4 доданки U_{ee}, U_{oo}, U_{eo} та U_{oe}.

Зручно перейти від матричного до блок-векторного представлення хвильової функції, розгорнувши у вектор її "частинково-античастинкові" ступені вільности:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} s(\mathbf{r}) & t(\mathbf{r}) \\ u(\mathbf{r}) & v(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad \dashrightarrow \quad \begin{bmatrix} s(\mathbf{r}) \\ t(\mathbf{r}) \\ u(\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) \end{bmatrix}; \tag{2.9}$$

тут $s(\mathbf{r})$ — 2×2-спінорна матриця, що є велико-великою компонентою хвильової функції (згідно з термінологією Храпливого [40]), а $t(\mathbf{r})$, $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$ — відповідно велико-мала, мало-велика й мало-мала компоненти $\Phi(\mathbf{r})$.

У цьому представленні структуру загального потенціялу (2.3) можна описати компактніше, зібравши 48 парціяльних потенціялів $U_A(r)$ у меншу кількість матричних діраківських мультиплетів — парно-парних, парно-непарних і т. д. Кожен такий мультиплет містить парціяльні потенціяли, що мають спільний спіновий множник:

$$
\begin{aligned}
U &= U_{ee} + U_{oo} + U_{eo} + U_{oe} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left\{ \left(\mathbf{\Delta}_{ee}^{(i)} + \mathbf{\Delta}_{oo}^{(i)} \right) S_{(i)} + \left(\mathbf{\Omega}_{eo}^{(i)} + \mathbf{\Omega}_{oe}^{(i)} \right) T_{(i)} \right\}, \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

де (упускаючи індекс i)

$$
\mathbf{\Delta}_{ee} = \begin{bmatrix} U_{11} & & & \\ & U_{22} & & 0 \\ & & U_{33} & \\ 0 & & & U_{44} \end{bmatrix}, \qquad (2.11)
$$

$$
\mathbf{\Delta}_{oo} = \begin{bmatrix} 0 & & & W_{14} \\ & & W_{23} & \\ & \overset{*}{W}_{23} & & \\ \overset{*}{W}_{14} & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.12)
$$

$$
\mathbf{\Omega}_{eo} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & & \\ \overset{*}{W}_{12} & 0 & & 0 \\ & & 0 & W_{34} \\ 0 & & \overset{*}{W}_{34} & 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.13)
$$

$$
\mathbf{\Omega}_{oe} = \begin{bmatrix} 0 & & W_{13} & 0 \\ & & 0 & W_{24} \\ \overset{*}{W}_{13} & 0 & & \\ 0 & \overset{*}{W}_{24} & & 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.14)
$$

де матричні елементи $U_{\alpha\beta}$ є дійсними, а $W_{\alpha\beta}$ — комплексними фунціями від r (зірочка “ $*$ ” позначає комплексне спряження), і мається на увазі, що кожен елемент множиться на одиничний спіновий оператор I. З огляду на структуру діраківських множників потенціяли U_{ee} і U_{oo} (та їх суперпозиції) будемо називати *власними*, а U_{eo} і U_{oe} — *невласними*.

Щоб переконатися в еквівалентності представлень (2.3) і (2.10) потенціялу U, зауважимо, що діраківські множники $\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta}_{ee} + \mathbf{\Delta}_{oo}$ і $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_{eo} + \mathbf{\Omega}_{oe}$ повинні бути ермітовими матрицями, причому власний множник $\mathbf{\Delta}$ — скаляром, а невласний $\mathbf{\Omega}$ — псевдоскаляром щодо просторової інверсії. Дія перетворення інверсії на діраківські множники $\mathbf{\Delta}$ і $\mathbf{\Omega}$ визначається оператором $\beta_1\beta_2$, який у такому представленні має вигляд:

$$
\beta_1\beta_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & & & \\ & -\mathrm{I} & & 0 \\ & & -\mathrm{I} & \\ 0 & & & \mathrm{I} \end{bmatrix}; \qquad (2.15)
$$

тут I — одинична 2×2 матриця. Легко переконатися, що $\beta_1\beta_2\mathbf{\Delta}\beta_1\beta_2 = \mathbf{\Delta}$, $\beta_1\beta_2\mathbf{\Omega}\beta_1\beta_2 = -\mathbf{\Omega}$. Оскільки сума $\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Omega}$ є ермітовою 4×4-матрицею загального вигляду, то $\mathbf{\Delta}$ є найзагальнішою ермітовою 4×4-матрицею скалярного типу, а $\mathbf{\Omega}$ — псевдо-скалярного типу. Кожна з матриць (2.11)–(2.14) містить по 4 дійсні або 2 комплексні довільні функції r, і таких квадруплетів у виразі (2.10) міститься $4\times 3 = 12$, що еквівалентно наявності 48-ми парціяльних потенціялів у (2.3).

Розгляньмо нерелятивістське наближення 2ЧРД (2.1) з загальним потенціялом (2.3), застосувавши перетворення Фолді–Вайтгаузена–Храпливого [40]. У результаті отримаємо гамільтоніян: $H_{\rm nr} = \sum_{a=1}^{2} \beta_a \left(m_a + \mathbf{p}^2/2m_a \right) + U_{ee}$, який після проєктування на додатно-енерґетичні стани приводить до рівняння Шредингера з потенціялом

$$
\begin{aligned}
U_{\rm nr}(\mathbf{r}) &= U_{11}^{(i)}(r) S_{(i)} \qquad (2.16) \\
&= U_{11}^{(1)}(r) + U_{11}^{(2)}(r) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + U_{11}^{(3)}(r) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}).
\end{aligned}
$$

Таким чином, із 48-ми парціяльних потенціялів, що містяться у виразах (2.10)–(2.14), у нерелятивістській межі виживає 3.

Найцікавішими з фізичного погляду є потенціяли, що допускають теоретико-польову інтерпретацію взаємодії. Зокрема потенціяли, що відображають векторну структуру взаємодії, використовуються в задачах електродинаміки, скалярна структура з'являється в потенціяльних моделях гадронів і т. д.

III. РАДІЯЛЬНА РЕДУКЦІЯ 2ЧРД

Здійснімо радіяльну редукцію 2ЧРД, подібно до робіт [5, 22]. Виберім $F(\mathbf{r})$ власною функцією квадрата $\mathbf{j}^2$ і компоненти j_3 повного моменту імпульсу системи $\mathbf{j} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} + \mathbf{s} = -\mathrm{i}\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$ та парности P і представмо її у блок-векторному вигляді:

$$
\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \mathrm{i}s_1(r)\phi^A(\mathbf{n}) + \mathrm{i}s_2(r)\phi^0(\mathbf{n}) \\ t_1(r)\phi^-(\mathbf{n}) + t_2(r)\phi^+(\mathbf{n}) \\ u_1(r)\phi^-(\mathbf{n}) + u_2(r)\phi^+(\mathbf{n}) \\ \mathrm{i}v_1(r)\phi^A(\mathbf{n}) + \mathrm{i}v_2(r)\phi^0(\mathbf{n}) \end{bmatrix} \qquad (3.1)
$$

для парности $P = (-)^{j\pm 1}$, та

$$
\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \mathrm{i}s_1(r)\phi^-(\mathbf{n}) + \mathrm{i}s_2(r)\phi^+(\mathbf{n}) \\ t_1(r)\phi^A(\mathbf{n}) + t_2(r)\phi^0(\mathbf{n}) \\ u_1(r)\phi^A(\mathbf{n}) + u_2(r)\phi^0(\mathbf{n}) \\ \mathrm{i}v_1(r)\phi^-(\mathbf{n}) + \mathrm{i}v_2(r)\phi^+(\mathbf{n}) \end{bmatrix} \qquad (3.2)
$$

для парности $P = (-)^j$. Тут біспінорні гармоніки $\phi^A(\mathbf{n})$ відповідають повному спінові $s = 0$ та орбітальному моментові $\ell = j$, а $\phi^0(\mathbf{n})$, $\phi^-(\mathbf{n})$, $\phi^+(\mathbf{n})$ відповідають триплетові з $s = 1$ та $\ell = j, j+1, j-1$. Явний вигляд та властивості біспінорних гармонік подано в Додатку А. Тоді для $j > 0$ задача на власні стани (2.1) зводиться до системи 8-ми диференційних рівнянь 1-го порядку із шуканими функціями $s_1(r)\dots v_2(r)$ та власним значенням енергії E.

Представмо цю систему в матричному вигляді, означивши 8-вимірну вектор-функцію $\mathbf{\Phi}(r) = \{s_1(r), s_2(r), t_1(r), \dots, v_2(r)\}$:

$$\left\{\mathbf{H}(j)\frac{d}{dr} + \mathbf{V}(r,E,j)\right\}\mathbf{\Phi}(r) = 0. \tag{3.3}$$

Тут 8×8-матриці $\mathbf{H}(j)$ та

$$\mathbf{V}(r,E,j) = \mathbf{G}(j)/r + \mathbf{m} + \mathbf{U}(r,j) - E\mathbf{I} \tag{3.4}$$

мають властивості: $\mathbf{H}$ — дійсна, $\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{H}$; V — ермітова: $\mathrm{V}^\dagger = \mathrm{V}$; $\mathbf{I}$ — одинична 8×8 матриця; діагональна матриця

$$\mathbf{m} = \mathrm{diag}(m_+\mathrm{I}, m_-\mathrm{I}, -m_-\mathrm{I}, -m_+\mathrm{I}) \tag{3.5}$$

(тут $m_\pm = m_1 \pm m_2$, а I — одинична 2×2 матриця) та j- і P-залежні матриці $\mathbf{H}(j)$, $\mathbf{G}(j)$ є сталими (тобто незалежними від r), а $\mathbf{U}(r,j)$ представляє потенціял (2.3). Оператор у лівій частині (3.3) є ермітовим щодо скалярного добутку:

$$\langle\mathbf{\Psi}|\mathbf{\Phi}\rangle = \int_0^\infty dr\, \left(\mathbf{\Psi}^\dagger(r)\mathbf{\Phi}(r)\right), \tag{3.6}$$

індукованого (2.4). У випадку $j = 0$ компоненти $s_2 = t_2 = u_2 = v_2 = 0$, так що вимірність задачі (3.3) зменшується з 8 до 4.

Усі згадані вище матриці зручно подати у блокматричному вигляді. Для цього біспінорні гармоніки об'єднаємо у два дублети з різними парностями:

$$\hat{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix}\phi^A\\ \phi^0\end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix}\phi^-\\ \phi^+\end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

так що хвильові функції (3.1), (3.2) запишуться як:

$$\mathit{\Phi} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix}\mathrm{i}(s,\hat{\mathrm{o}})\\ (t,\hat{\mathrm{e}})\\ (u,\hat{\mathrm{e}})\\ \mathrm{i}(v,\hat{\mathrm{o}})\end{bmatrix} \;\text{ для } P = (-)^{j\pm 1},$$
$$\mathit{\Phi} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix}\mathrm{i}(s,\hat{\mathrm{e}})\\ (t,\hat{\mathrm{o}})\\ (u,\hat{\mathrm{o}})\\ \mathrm{i}(v,\hat{\mathrm{e}})\end{bmatrix} \;\text{ для } P = (-)^{j}; \tag{3.8}$$

тут $(s,\hat{\mathrm{o}}) = s_1\phi^A + s_2\phi^0$ і т. д. Тепер, ураховуючи властивості біспінорних гармонік (див. [5, 22] та Додаток А) і означивши величини:

$$A = \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}, \quad B = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}, \quad C = \sqrt{j(j+1)}, \tag{3.9}$$

та 2×2-матриці:

$$\sigma_\uparrow = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \sigma_3) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$
$$\sigma_\downarrow = \frac{1}{2}(\mathrm{I} - \sigma_3) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

$$\tau = \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathrm{R} = \begin{bmatrix}A & B\\ -B & A\end{bmatrix} \quad (\mathrm{R} \in \mathrm{O}(2)), \tag{3.11}$$

отримаємо в цих термінах:

$$\mathbf{G} = -\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{R}(j{+}\sigma_\uparrow) & \mathrm{R}^{\mathrm{T}}(j\sigma_3{+}\sigma_\uparrow) & 0\\ (j{+}\sigma_\uparrow)\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & (j\sigma_3{+}\sigma_\uparrow)\mathrm{R}\\ (j\sigma_3{+}\sigma_\uparrow)\mathrm{R} & 0 & 0 & (j{+}\sigma_\uparrow)\mathrm{R}^{\mathrm{T}}\\ 0 & \mathrm{R}^{\mathrm{T}}(j\sigma_3{+}\sigma_\uparrow) & \mathrm{R}(j{+}\sigma_\uparrow) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{R}\sigma_3 & -\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & 0\\ \sigma_3\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \mathrm{R}\\ \mathrm{R} & 0 & 0 & \sigma_3\mathrm{R}^{\mathrm{T}}\\ 0 & -\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & -\mathrm{R}\sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^{j\pm 1} \tag{3.13}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & (j{+}\sigma_\uparrow)\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & (j\sigma_3{+}\sigma_\uparrow)\mathrm{R} & 0\\ \mathrm{R}(j{+}\sigma_\uparrow)\sigma_3 & 0 & 0 & \mathrm{R}^{\mathrm{T}}(j\sigma_3{+}\sigma_\uparrow)\\ \mathrm{R}^{\mathrm{T}}(j\sigma_3{+}\sigma_\uparrow) & 0 & 0 & \mathrm{R}(j{+}\sigma_\uparrow)\\ 0 & (j\sigma_3{+}\sigma_\uparrow)\mathrm{R} & (j{+}\sigma_\uparrow)\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_3\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & -\mathrm{R} & 0\\ \mathrm{R}\sigma_3 & 0 & 0 & \mathrm{R}^{\mathrm{T}}\\ \mathrm{R}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \mathrm{R}\sigma_3\\ 0 & -\mathrm{R} & -\sigma_3\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^{j}. \tag{3.15}$$

Щоб описати потенціял взаємодії (2.10)–(2.14) у матричному представленні, залишається обчислити дію спінових операторів на біспінорні дублети. Для власних потенціялів одержимо:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathrm{S} & & & \\ & \Sigma & & \text{\huge 0} \\ \text{\huge 0} & & \Sigma & \\ & & & \mathrm{S} \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad P = (-)^{j\pm 1}, \tag{3.16}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \Sigma & & & \\ & \mathrm{S} & & \text{\huge 0} \\ \text{\huge 0} & & \mathrm{S} & \\ & & & \Sigma \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad P = (-)^{j}, \tag{3.17}$$

де 2×2-блоки S та Σ є такими:

i	1	2	3
$S_{(i)}$	I	$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$	$(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n})$
$\mathrm{S}_{(i)}$	I	τ	$-\sigma_3$
$\Sigma_{(i)}$	I	I	$-\mathrm{R}\sigma_3\mathrm{R}^{\mathrm{T}}$

(3.18)

Для невласних потенціялів маємо:

$$\mathbf{T} = \mathrm{i} \begin{bmatrix} \mathrm{T} & & & \\ & -\mathrm{T}^{\dagger} & & \text{\huge 0} \\ \text{\huge 0} & & -\mathrm{T}^{\dagger} & \\ & & & \mathrm{T} \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad P = (-)^{j\pm 1}, \tag{3.19}$$

$$\mathbf{T} = \mathrm{i} \begin{bmatrix} \mathrm{T}^{\dagger} & & & \\ & -\mathrm{T} & & \text{\huge 0} \\ \text{\huge 0} & & -\mathrm{T} & \\ & & & \mathrm{T}^{\dagger} \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad P = (-)^{j}, \tag{3.20}$$

де $2{\times}2$-блок T є таким:

i	1	2	3
$T_{(i)}$	$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}$	$\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}$	$(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2)$
$\mathrm{T}_{(i)}$	R	$-\mathrm{R}\sigma_3$	$-2\mathrm{i}\mathrm{R}\sigma_{\uparrow}$

(3.21)

Отже, загальний потенціял має вигляд:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{3} \left(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \mathbf{S}_{(i)} + \boldsymbol{\Omega}^{(i)} \mathbf{T}_{(i)} \right). \tag{3.22}$$

Нагадаємо, що матриці $\boldsymbol{\Delta}^{(i)}$ і $\boldsymbol{\Omega}^{(i)}$ виду:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} U_{11} & 0 & 0 & W_{14} \\ 0 & U_{22} & W_{23} & 0 \\ 0 & \overset{*}{W}_{23} & U_{33} & 0 \\ \overset{*}{W}_{14} & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} & 0 \\ \overset{*}{W}_{12} & 0 & 0 & W_{24} \\ \overset{*}{W}_{13} & 0 & 0 & W_{34} \\ 0 & \overset{*}{W}_{24} & \overset{*}{W}_{34} & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.24}$$

де $U_{\alpha\beta}$ — довільні дійсні, а $W_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} + \mathrm{i}Y_{\alpha\beta}$ — комплексні функції r, становлять 3 власні і 3 невласні октети дійсних парціяльних потенціялів.

Якщо $j = 0$, то в усіх $2{\times}2$-блоках, що входять у матриці системи (3.3), слід залишити лише лівий верхній елемент, поклавши в ньому $j = 0$.

IV. РЕДУКЦІЯ РАДІЯЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДО РІВНЯНЬ 2-ГО ПОРЯДКУ

Виявляється, що $\operatorname{rank} \mathbf{H} = 4$ (2, якщо $j = 0$). Інакше кажучи, лише 4 з 8-ми рівнянь (3.3) (2 з 4-х) є диференційними, решта — алґебраїчні співвідношення. Їх можна розділити з допомогою ортогонального перетворення (з групи O(8)):

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{O}\boldsymbol{\Phi}, \qquad \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{O}\mathbf{H}\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \qquad \text{і т. д.,} \tag{4.1}$$

що очевидно зберігає скалярний добуток (3.6) і явно виділяє нетривіяльний мінор матриці $\mathbf{H}$. Запропонована в Додатку В матриця $\mathbf{O}$ зводить $\mathbf{H}$ до незалежного від парности P канонічного вигляду:

$$\bar{\mathbf{H}} = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

де $\mathbf{J}^{(2)}$ — симплектична 4×4-матриця

$$\mathbf{J}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Вигляд інших перетворених матриць подано також у Додатку В. Тут лише зазначимо, що матриця загального потенціялу $\bar{\mathbf{U}}$ набирає діягонально-блочної форми:

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathrm{U}_{11} & \mathrm{W}_{12} & \mathrm{W}_{13} & \mathrm{W}_{14} \\ \overset{*}{\mathrm{W}}_{12} & \mathrm{U}_{22} & \mathrm{W}_{23} & \mathrm{W}_{24} \\ \overset{*}{\mathrm{W}}_{13} & \overset{*}{\mathrm{W}}_{23} & \mathrm{U}_{33} & \mathrm{W}_{34} \\ \overset{*}{\mathrm{W}}_{14} & \overset{*}{\mathrm{W}}_{24} & \overset{*}{\mathrm{W}}_{34} & \mathrm{U}_{44} \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

де $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ — дійсні, а $\mathrm{W}_{\alpha\beta}$ — комплексні діягональні $2{\times}2$-блоки, узагалі кажучи, різні для різних парностей. Загальна кількість дійсних парціяльних потенціялів — 32 для $P = (-)^{j\pm 1}$ і 32 для $P = (-)^{j}$, однак серед них лише 48 незалежні.

Надалі зручно 8-вимірні вектори та матриці подавати в термінах 4-вимірних блоків:

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{\Phi}}_2 \end{bmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_{11} & \bar{\mathbf{V}}_{12} \\ \bar{\mathbf{V}}_{21} & \bar{\mathbf{V}}_{22} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

і т. д. (що вже фактично здійснено в (4.2)). У цих термінах система (3.3) набирає вигляду:

$$2\,\mathbf{J}^{(2)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_1' + \bar{\mathbf{V}}_{11}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_1 + \bar{\mathbf{V}}_{12}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_2 = 0, \tag{4.6}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{21}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_1 + \bar{\mathbf{V}}_{22}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_2 = 0. \tag{4.7}$$

Виключивши $\bar{\boldsymbol{\Phi}}_2$ з (4.6) за допомогою (4.7), отримаємо систему диференційних рівнянь для 4-вектора $\bar{\boldsymbol{\Phi}}_1$:

$$\left\{\mathbf{J}^{(2)}\frac{d}{dr}+\mathbf{V}^{\perp}(r,E,j)\right\}\bar{\mathbf{\Phi}}_1(r)=0, \tag{4.8}$$

де

$$\mathbf{V}^{\perp}=(\bar{\mathbf{V}}_{11}-\bar{\mathbf{V}}_{12}\mathbf{\Lambda}\bar{\mathbf{V}}_{21})/2, \qquad \mathbf{\Lambda}=\left[\bar{\mathbf{V}}_{22}\right]^{-1}, \tag{4.9}$$

а 4-вектор $\bar{\mathbf{\Phi}}_2$ визначається тоді з алґебраїчного співвідношення $\bar{\mathbf{\Phi}}_2=-\mathbf{\Lambda}\bar{\mathbf{V}}_{21}\bar{\mathbf{\Phi}}_1$.

Тепер представляємо 4-вектор $\bar{\mathbf{\Phi}}_1$ у 2+2-блочному записі:

$$\bar{\mathbf{\Phi}}_1(r)=\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^{\perp}=\begin{bmatrix}\mathrm{V}_{11} & \mathrm{V}_{12}\\ \mathrm{V}_{21} & \mathrm{V}_{22}\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12}\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}\end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

виключаємо Φ_2 і приходимо до системи диференційних рівнянь 2-го порядку для 2-вектора Φ_1:

$$\begin{aligned}&\mathrm{L}_1(E)\Phi_1 \qquad\qquad (4.11)\\ &=\left\{\left(\frac{d}{dr}+\mathrm{V}_{12}\right)[\mathrm{V}_{22}]^{-1}\left(\frac{d}{dr}-\mathrm{V}_{21}\right)+\mathrm{V}_{11}\right\}\Phi_1=0.\end{aligned}$$

З означення матриці $\mathbf{V}^{\perp}$ (4.10), (4.9) та вигляду її складових (B.7), (B.8) і (4.5) випливає, що її блок V_{22} є діягональним. Це дає змогу спростити систему (4.11) до шредингероподібного вигляду, зручного в застосуваннях. Для цього насамперед покладімо:

$$\tilde{\Phi}_1=\Phi_1\Big/\sqrt{\mathrm{V}_{22}}\,, \qquad \tilde{\mathrm{L}}_1(E)=\sqrt{\mathrm{V}_{22}}\mathrm{L}_1(E)\sqrt{\mathrm{V}_{22}}, \tag{4.12}$$

де квадратний корінь із матриці обчислюється поелементно. Рівняння (4.11) набирає вигляду $\tilde{\mathrm{L}}_1(E)\tilde{\Phi}_1=0$, де

$$\tilde{\mathrm{L}}_1(E)=\left(\frac{d}{dr}+\mathrm{M}\right)\left(\frac{d}{dr}-\mathrm{M}^{\dagger}\right)+\mathrm{Z}, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}&=\sqrt{\mathrm{V}_{22}}\mathrm{V}_{11}\sqrt{\mathrm{V}_{22}}+\\ &+\frac{1}{2}\left(\mathrm{M}\frac{\mathrm{V}_{22}'}{\mathrm{V}_{22}}+\frac{\mathrm{V}_{22}'}{\mathrm{V}_{22}}\mathrm{M}^{\dagger}\right)+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{V}_{22}''}{\mathrm{V}_{22}}-\frac{3}{4}\left(\frac{\mathrm{V}_{22}'}{\mathrm{V}_{22}}\right)^2,\\ \mathrm{M}&=\sqrt{\mathrm{V}_{22}}\mathrm{V}_{12}\Big/\sqrt{\mathrm{V}_{22}}\end{aligned} \tag{4.14}$$

Представимо тепер перший член оператора (4.13) так:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{dr}+\mathrm{M}\right)\left(\frac{d}{dr}-\mathrm{M}^{\dagger}\right)\\ &=\left(\frac{d}{dr}+\mathrm{A}\right)^2-\mathrm{B}^2-\mathrm{B}'-[\mathrm{A},\mathrm{B}]\,,\end{aligned} \tag{4.15}$$

де A та B — відповідно антиермітова та ермітова частини M:

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}(\mathrm{M}-\mathrm{M}^{\dagger})=-\mathrm{A}^{\dagger}, \qquad \mathrm{B}=\frac{1}{2}(\mathrm{M}+\mathrm{M}^{\dagger})=\mathrm{B}^{\dagger}. \tag{4.16}$$

Якщо M ермітова, то оператор (4.13) не містить 1-ї похідної. В іншому разі спробуймо усунути її перетворенням:

$$\bar{\Phi}_1=\mathrm{C}^{-1}\tilde{\Phi}_1, \qquad \bar{\mathrm{L}}_1=\mathrm{C}^{-1}\tilde{\mathrm{L}}_1\mathrm{C}, \tag{4.17}$$

таким, що

$$\mathrm{C}^{-1}\left(\frac{d}{dr}+\mathrm{A}\right)\mathrm{C}\equiv\frac{d}{dr}+\mathrm{C}^{-1}\left(\mathrm{C}'+\mathrm{AC}\right)=\frac{d}{dr}. \tag{4.18}$$

Звідси отримуємо рівняння на C:

$$\mathrm{C}'+\mathrm{AC}=0, \tag{4.19}$$

що має розв'язок:

$$\mathrm{C}=\mathrm{T}\exp\left(-\int dr\mathrm{A}\right)=\mathrm{T}\exp\left(-\frac{1}{2}\int dr(\mathrm{M}-\mathrm{M}^{\dagger})\right). \tag{4.20}$$

З антиермітовости A випливає унітарність C.

Тепер оператор

$$\bar{\mathrm{L}}_1(E)=\frac{d^2}{dr^2}-\mathrm{W}, \tag{4.21}$$

$$\mathrm{W}=\mathrm{C}^{\dagger}\left(\mathrm{B}^2+\mathrm{B}'+[\mathrm{A},\mathrm{B}]-\mathrm{Z}\right)\mathrm{C} \tag{4.22}$$

має матрично-двочленний вигляд, як і відповідне рівняння.

Якщо замість Φ_2 із системи (4.8) виключити Φ_1, прийдемо до системи для 2-вектора Φ_2:

$$\begin{aligned}&\mathrm{L}_2(E)\Phi_2 \qquad\qquad (4.23)\\ &=\left\{\left(\frac{d}{dr}-\mathrm{V}_{21}\right)[\mathrm{V}_{11}]^{-1}\left(\frac{d}{dr}+\mathrm{V}_{12}\right)+\mathrm{V}_{22}\right\}\Phi_2=0.\end{aligned}$$

Оскільки блок V_{11}, узагалі кажучи, не є діягональним (на відміну від V_{22}), то система (4.23) виявляється складнішою, ніж (4.11). Вона, однак, теж може бути корисною в застосуваннях.

V. ПОШУКИ ТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНИХ МОДЕЛЕЙ

Система 2-го порядку (4.11) є зручною для пошуку потенціялів, що допускають точні розв'язки 2ЧРД. Кілька випадків, розв'язуваних при певних значеннях j і P, вказано в [17]; два цілком розв'язувані приклади — 2-частинкові діраківські осцилятори [33,34] з лінійним за $\mathbf{r}$ потенціялом. Нас цікавлять їх узагальнення.

Зауважимо, що у вільночастинковому випадку матриця V_{22}, що входить у ліву частину системи (4.11), є сталою. Будемо вимагати, щоб і у випадку взаємодії V_{22} не залежала від r (інакше система (4.11) дуже ускладнюється). Достатніми для цього умовами на блок-матричні елементи потенціялу (4.4) є:

$$\mathrm{U}_{22}=\mathrm{U}_{33}=\mathrm{W}_{23}=\mathrm{W}_{24}=\mathrm{W}_{34}=0. \tag{5.1}$$

Ураховуючи розклад потенціялу $\mathbf{U}$ на октети (3.22)–(3.24), (B.9)–(B.18), знаходимо найзагальніший його вигляд, коли умови (5.1) виконуються для всіх P. Він параметризується 8-ма дійсними парціяльними потенціялами U_α ($\alpha=1,\ldots,8$) та 5-ма комплексними $W^{(i)}$ ($i=1,2,3$), W_2 і W_4, пов'язаними з потенціялами (B.11) і (B.16) так:

$$\begin{array}{llll}
U_\alpha^{(1)} = U_\alpha, & U_\alpha^{(2)} = -U_\alpha, & U_\alpha^{(3)} = 0, & \alpha = 1, \ldots, 8, \\
W_1^{(i)} = W^{(i)}, & & & i = 1, 2, 3, \\
W_2^{(1)} = -\mathrm{i} W_2, & W_2^{(2)} = \mathrm{i} W_2, & W_2^{(3)} = W_1, & \\
W_3^{(1)} = -W^{(2)}, & W_3^{(2)} = -W^{(1)}, & W_3^{(3)} = W^{(3)}, & \\
W_4^{(1)} = \mathrm{i} W_1, & W_4^{(2)} = -\mathrm{i} W_1, & W_4^{(3)} = -W_2. &
\end{array} \tag{5.2}$$

Розклавши комплексні потенціяли на дійсні та уявні частини: $W = X + \mathrm{i}Y$, отримаємо 18 дійсних парціяльних потенціялів, що параметризують повний потенціял U. У термінах матриць Дірака він має таку форму:

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} &\{U_1(1 + \beta_1\beta_2) + U_2(1 - \beta_1\beta_2) + U_3(\beta_1 + \beta_2) + U_4(\beta_1 - \beta_2) \\
&+ [U_5(1 + \beta_1\beta_2) + U_6(1 - \beta_1\beta_2) \, - \, U_7 \mathrm{i}(\beta_1 + \beta_2) + U_8 \mathrm{i}(\beta_1 - \beta_2)] \, \gamma_1^5\gamma_2^5\} \, (1 - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \\
&+ \left\{X^{(1)} + Y^{(1)} \mathrm{i}\beta_1\beta_2 - \left[X^{(2)} + Y^{(2)} \mathrm{i}\beta_1\beta_2\right] \gamma_1^5\gamma_2^5\right\} (\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) \cdot \mathbf{n} + \left\{X^{(3)} + Y^{(3)} \mathrm{i}\beta_1\beta_2\right\} (\gamma_1^5 + \gamma_2^5)(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{n} \\
&- \mathrm{i} \left\{[X_1 + Y_1 \mathrm{i}\beta_1\beta_2] \, \beta_2\gamma_2^5 + [X_2 + Y_2 \mathrm{i}\beta_1\beta_2] \, \beta_1\gamma_1^5\right\} (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2 + \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_2) \cdot \mathbf{n},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

а в матричному представленні (4.4):

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix}
u_1\sigma_\uparrow & \mathfrak{f} & w_1\sigma_\uparrow & w_2\sigma_\uparrow \\
\overset{*}{\mathfrak{f}} & 0 & 0 & 0 \\
\overset{*}{w}_1 \, \sigma_\uparrow & 0 & 0 & 0 \\
\overset{*}{w}_2 \, \sigma_\uparrow & 0 & 0 & u_2\sigma_\uparrow
\end{bmatrix}, \tag{5.4}$$

де $\mathfrak{f} = f_\uparrow\sigma_\uparrow + f_\downarrow\sigma_\downarrow$,

$$\begin{array}{ll}
u_1 = 4(U_1 + U_5), & u_2 = 4(U_1 - U_5), \\
w_1 = 4(W_1 - W_2), & w_2 = 4(U_3 + \mathrm{i}U_7), \\
f_\uparrow = 4W^{(3)} - 2\mathrm{i}(W^{(1)} - W^{(2)}), & \\
f_\downarrow = -2\mathrm{i}(W^{(1)} + W^{(2)}) & \text{для } P = (-)^{j\pm1}, \\
 & \\
u_1 = 4(U_2 + U_6), & u_2 = 4(U_2 - U_6), \\
w_1 = 4(\overset{*}{W}_1 + \overset{*}{W}_2), & w_2 = 4(U_4 + \mathrm{i}U_8), \\
f_\uparrow = -4 \, \overset{*}{W}{}^{(3)} + 2\mathrm{i}(\overset{*}{W}{}^{(1)} - \overset{*}{W}{}^{(2)}), & \\
f_\downarrow = 2\mathrm{i}(\overset{*}{W}{}^{(1)} + \overset{*}{W}{}^{(2)}) & \text{для } P = (-)^j.
\end{array} \tag{5.5}$$

Тепер систему (4.11) можна записати так:

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{F} - \overset{*}{\mathrm{F}}\right)\frac{d}{dr} + \frac{1}{4}\left(E - \frac{\nu^2}{E}\right)\left[E - \frac{\mu^2}{E} - \left(u_1 + \frac{|w_1|^2 - \mu^2}{E} + \frac{|w_2 + \mu|^2}{E - u_2}\right)\sigma_\uparrow \, - \frac{2C}{Er}\left(w_1\sigma_+ + \overset{*}{w}_1 \, \sigma_-\right)\right]\right. \\
&\left. -\frac{1}{4}|\mathrm{F}|^2 - \frac{1}{2}\,\overset{*}{\mathrm{F}}{}' - \frac{1}{2r}\left(F_\uparrow + \overset{*}{F}_\uparrow\right)\sigma_\uparrow - \frac{C^2}{r^2} + \frac{\nu C}{2Er}\left[\left(F_\uparrow + \overset{*}{F}_\downarrow\right)\sigma_+ + \left(F_\downarrow + \overset{*}{F}_\uparrow\right)\sigma_-\right]\right\}\Phi_1 = 0,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

де $\mu = m_\pm$ і $\nu = m_\mp$ для $P = \mp(-)^j$, а всі операції (диференціювання, комплексне спряження тощо) над діягональною матрицею

$$\mathrm{F} = F_\uparrow\sigma_\uparrow + F_\downarrow\sigma_\downarrow = \mathfrak{f} + \frac{\nu}{E} w_1\sigma_\uparrow \tag{5.7}$$

здійснюються поелементно. Підстановка

$$\Phi_1 = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int dr\left(\mathrm{F} - \overset{*}{\mathrm{F}}\right)\right\}\Psi \tag{5.8}$$

усуває 1-ші похідні з рівнянь (5.6) і зводить їх до системи

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{4}\left[\left(E - \frac{\nu^2}{E}\right)\left(E - u_1 - \frac{y_1^2}{E} - \frac{|w_2 + \mu|^2}{E - u_2}\right) - g_\uparrow^2 \, - 2\,\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) g_\uparrow + 2\frac{\nu}{E}\left(g_\uparrow + \frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) x_1 - x_1^2\right]\sigma_\uparrow\right. \\
&+\frac{1}{4}\left[\left(E - \frac{\nu^2}{E}\right)\left(E - \frac{\mu^2}{E}\right) - g_\downarrow^2 - 2\frac{d}{dr} g_\downarrow\right]\sigma_\downarrow - \frac{C^2}{r^2} \, - \frac{C}{2r}\left[x_1 - \frac{\nu}{E}\left(g_\uparrow + g_\downarrow + \mathrm{i}(h_\uparrow - h_\downarrow)\right)\right]\sigma_+ \\
&\left. - \frac{C}{2r}\left[x_1 - \frac{\nu}{E}\left(g_\uparrow + g_\downarrow - \mathrm{i}(h_\uparrow - h_\downarrow)\right)\right]\sigma_-\right\}\Psi = 0;
\end{aligned} \tag{5.9}$$

тут функції (5.5) зображено через їхні дійсні та уявні частини:

$$f = g + \mathrm{i}h, \qquad w = x + \mathrm{i}y. \tag{5.10}$$

Потенціяли u, x, y, g і h по-різному означені для різних парностей. Надалі величини, що стосуються $P = (-)^{j\pm1}$, позначатимемо індексом "+", а для $P = (-)^j$ — індексом "−" (якщо ж розглядається довільний випадок або парність не суттєва, ці індекси упускатимуться). Тоді серед 20-ти функцій $u_{i\pm}$, $x_{i\pm}$, $y_{i\pm}$ $(i = 1, 2)$, $g_{\updownarrow\pm}$ і $h_{\updownarrow\pm}$ лише 18 є незалежними, оскільки, згідно з (5.5) і (5.10), $g_{\downarrow+} = g_{\downarrow-} \equiv g_\downarrow$ і $h_{\downarrow+} = -h_{\downarrow-} \equiv h_\downarrow$. Ці функції еквівалентно представляють 18 парціяльних потенціялів U, X і Y, що входять у вираз (5.3), і саме їх зручно підбирати, будуючи точно розв'язувані моделі. При цьому будемо прагнути до однієї з двох можливостей: коли система (5.9) розщеплюється на два незалежні рівняння або коли її можна діягоналізувати.

А. Сім'я гармонічних осциляторів

Покладімо:

$$u_1 = u_2 = w_1 = w_2 = 0, \tag{5.11}$$

що з урахуванням співвідношень (5.5) дає:

$$U_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, 8, \tag{5.12}$$

$$W_1 = W_2 = 0. \tag{5.13}$$

Отже, власна частина потенціялу (5.4) зникає, а невласна — частково обмежується. Додатково обмежимо її умовою:

$$g_\uparrow^2 = g_\downarrow^2, \tag{5.14}$$

що дає 4 можливості:

$$\begin{array}{llll} \text{Ia).} & g_\downarrow = g_{\uparrow+} = g_{\uparrow-}, & \text{Ib).} & g_\downarrow = g_{\uparrow+} = -g_{\uparrow-}, \\ \text{Ic).} & g_\downarrow = -g_{\uparrow+} = g_{\uparrow-}, & \text{Id).} & g_\downarrow = -g_{\uparrow+} = -g_{\uparrow-}. \end{array} \tag{5.15}$$

Почнімо з можливости Ia. З рівностей (5.5) отримаємо умови:

$$\text{Ia).} \qquad Y^{(1)} \equiv Y, \qquad Y^{(2)} = X^{(3)} = 0, \tag{5.16}$$

де Y а також решта парціяльних потенціялів $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ і $Y^{(3)}$ можуть бути довільними функціями. Покладімо тепер:

$$Y = ar, \qquad X^{(2)} = br, \qquad Y^{(3)} = cr, \tag{5.17}$$

де a, b і c — сталі.

Це відповідає повному потенціялові:

$$U = \left\{ X^{(1)}/r - b\gamma_1^5\gamma_2^5 + [\mathrm{i}\,a + c(1 + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2)]\,\beta_1\beta_2 \right\} (\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) \cdot \mathbf{r}. \tag{5.18}$$

Тоді система (5.9) набирає вигляду:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{4}\left(E - \frac{m_+^2}{E}\right)\left(E - \frac{m_-^2}{E}\right) - \mathrm{D} - a^2r^2 - \frac{C^2}{r^2} \right\} \Psi = 0, \tag{5.19}$$

де сталу ермітову матрицю

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 3a & -2\dfrac{m_\mp C}{E}[a + \mathrm{i}(c \pm b)] \\ -2\dfrac{m_\mp C}{E}[a - \mathrm{i}(c \pm b)] & a \end{bmatrix} \text{ для } P = \mp(-)^j \tag{5.20}$$

можна очевидно діягоналізувати до власних значень

$$\text{Ia).} \qquad \begin{matrix} d_{\uparrow\pm} \\ d_{\downarrow\pm} \end{matrix} = 2a \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \operatorname{sgn} a \sqrt{a^2 + 4\frac{m_\mp^2 C^2}{E^2}[a^2 + (b \pm c)^2]}. \tag{5.21}$$

Тепер система (5.19) розщеплюється на два рівняння гармонічних осциляторів, і спектр визначається співвідношеннями (5.21) та

$$\frac{1}{4}\left(E - \frac{m_+^2}{E}\right)\left(E - \frac{m_-^2}{E}\right) - d_{\updownarrow\pm} = |a|(2n + 3), \qquad n = j + 2n_r, \tag{5.22}$$

де $n_r = 0, 1, \ldots$ — радіяльне квантове число. Для заданих j та n_r маємо 4 рівняння, що дають 4 додатні значення енергії $E_{\updownarrow\pm}$.

Аналогічно можна розглянути й решту можливостей Ib)–Id), указаних у (5.15). У цих випадках парціяльні потенціяли визначаються співвідношеннями (5.12), (5.17) й однією з альтернатив:

$$\begin{aligned}
&\text{Ib)}. \quad Y^{(1)} = Y^{(2)} = X^{(3)} = \tfrac{1}{2}Y, \\
&\text{Ic)}. \quad Y^{(1)} = Y^{(2)} = -X^{(3)} = \tfrac{1}{2}Y, \qquad (5.23) \\
&\text{Id)}. \quad Y^{(2)} = Y, \quad Y^{(1)} = X^{(3)} = 0.
\end{aligned}$$

Хвильові рівняння мають вигляд (5.19) з дещо іншими матрицями D, які зводяться до таких власних значень:

$$\begin{aligned}
&\text{Ib)}. \quad d_{\updownarrow+} \text{ як в Ia} \quad (\text{див.}(5.21)), \\
&\qquad d_{\updownarrow-} = -a \mp 2\,\mathrm{sgn}\,a\sqrt{a^2 + \frac{m_+^2 C^2}{E^2}(b-c)^2}, \\
&\text{Ic)}. \quad d_{\updownarrow+} = -a \mp 2\,\mathrm{sgn}\,a\sqrt{a^2 + \frac{m_-^2 C^2}{E^2}(b+c)^2}, \\
&\qquad d_{\updownarrow-} \text{ як в Ia}, \\
&\text{Id)}. \quad d_{\updownarrow+} \text{ як в Ic}, \qquad d_{\updownarrow-} \text{ як в Ib}. \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

Із цими виразами для $d_{\updownarrow\pm}$ рівняння (5.22) дає спектр решти моделей Ia–Id.

Ірраціональні рівняння (5.22), (5.21) зводяться до алґебраїчних рівнянь 4-го степеня. Вони мають, узагалі кажучи, громіздкі розв'язки, серед яких є і нефізичні, зокрема від'ємні — подібно до 1-частинкового рівняння Дірака.

Для безмасових частинок спектри описуються формулою:

$$E_{\updownarrow\pm}^2 = 4[|a|(2n+3) + d_{\updownarrow\pm}], \qquad (5.25)$$

де сталі $d_{\updownarrow\pm}$ вже не залежать від E і для різних випадків є такими:

$$\begin{aligned}
&\text{Ia)}. \quad d_{\updownarrow+} = d_{\updownarrow-} = 2a \pm a, \\
&\text{Ib)}. \quad d_{\updownarrow+} \text{ як в Ia}, \qquad d_{\updownarrow-} = -a \mp 2a, \\
&\text{Ic)}. \quad d_{\updownarrow+} \text{ як } d_{\updownarrow-} \text{ в Ib}, \qquad d_{\updownarrow-} \text{ як } d_{\updownarrow+} \text{ в Ia}, \\
&\text{Id)}. \quad d_{\updownarrow+} = d_{\updownarrow-} \text{ як } d_{\updownarrow-} \text{ в Ib}. \qquad (5.26)
\end{aligned}$$

Отже, у площині (E^2, j) рівні енергії $E_{\updownarrow\pm}$ лягають на паралельні прямі — так звані лінійні траєкторії Реже — з параметром нахилу $8|a|$. Головних траєкторій (що відповідають $n_r = 0$) є 4, і кожна з них породжує дочірні траєкторії (з $n_r = 1, 2, \ldots$), так що всіх їх зручно класифікувати за сукупністю квантових чисел $n_r\updownarrow\pm$. Однак, залежно від моделі, різні стани з фіксованим j можуть бути виродженими, так що відповідні траєкторії можуть збігатися одна з одною. Приклади траєкторій Редже для безмасових моделей Ia–Id при додатній та від'ємній константах взаємодії a показані на рис. 1 (де для наочности вироджені траєкторії дещо зміщені одна щодо іншої). При $b = c = 0$ і $m_1 = m_2$ моделі Ia і Id зводяться до двох відомих версій двочастинкових діраківських осциляторів [33] і [34] відповідно.

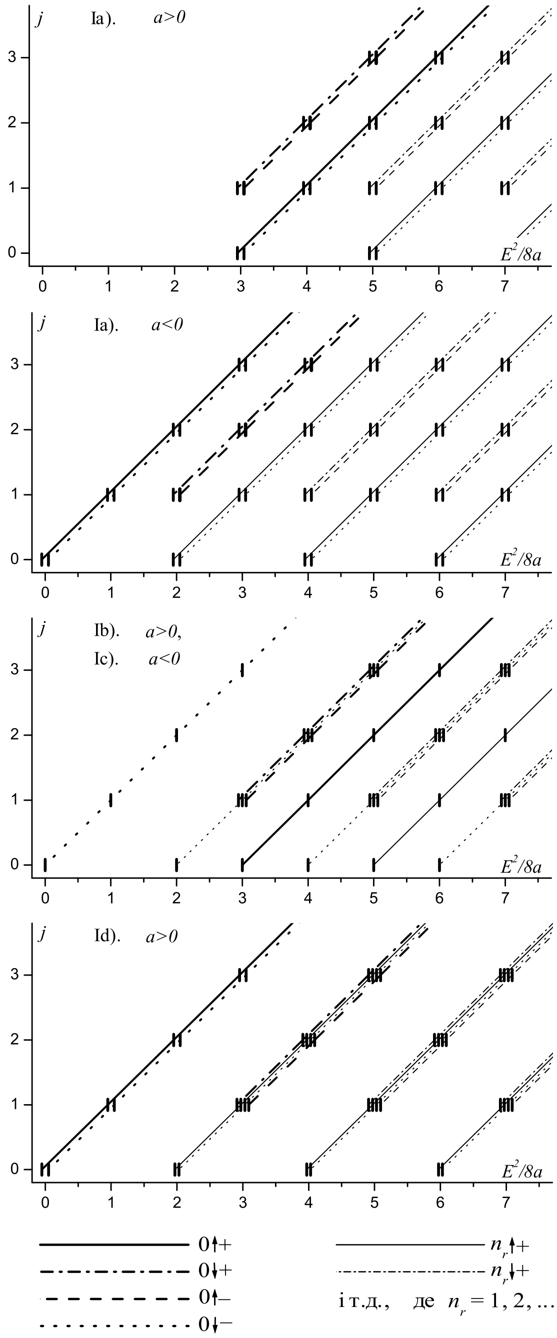

Рис. 1. Траєкторії Редже в безмасових моделях Ia–Id.

Іншу сім'ю осциляторів можна отримати, якщо покласти:

$$u_1 = u_2 = y_1 = w_2 = g_\uparrow = 0, \qquad (5.27)$$

що з урахуванням співвідношень (5.5) дає (5.12) і

$$Y_1 = Y_2 = X^{(3)} = 0, \qquad Y^{(1)} = Y^{(2)} = \frac{1}{2}Y. \qquad (5.28)$$

Крім цього, покладімо:

$$g_\downarrow^2 = x_{1+}^2 = x_{1-}^2, \qquad (5.29)$$

що знову дає 4 можливості:

$$\begin{array}{llll} \text{IIa).} & g_{\downarrow} = x_{1+} = x_{1-}, & \text{IIb).} & g_{\downarrow} = x_{1+} = -x_{1-}, \\ \text{IIc).} & g_{\downarrow} = -x_{1+} = x_{1-}, & \text{IId).} & g_{\downarrow} = -x_{1+} = -x_{1-}, \end{array} \tag{5.30}$$

тобто

$$\begin{array}{lll} \text{IIa).} & X_1 = \frac{1}{2}Y, & X_2 = 0, \\ \text{IIb).} & X_1 = 0, & X_2 = -\frac{1}{2}Y, \\ \text{IIc).} & X_1 = 0, & X_2 = \frac{1}{2}Y, \\ \text{IId).} & X_1 = -\frac{1}{2}Y, & X_2 = 0. \end{array} \tag{5.31}$$

Разом з вибором парціяльних потенціялів (5.16) це приводить до ще 4-х гармонічних осциляторів, що описуються рівняннями (5.19) з деякими матрицями D, а їх спектри — співвідношеннями (5.22) з відповідними $d_{\updownarrow\pm}$.

Розгляньмо тут лише безмасові частинки. Тоді всі моделі дають спільний спектр:

$$\begin{array}{ll} a > 0\ : & a < 0\ : \\ E^2_{\uparrow\pm} = 4a(j + 4n_r + 3), & E^2_{\uparrow\pm} = 4|a|(3j + 4n_r + 3), \\ E^2_{\downarrow\pm} = 4a(3j + 4n_r + 4), & E^2_{\downarrow\pm} = 4|a|(j + 4n_r + 2). \end{array} \tag{5.32}$$

На відміну від попереднього сімейства моделей, тут траєкторії не паралельні: 2 головні і їхні дочірні мають параметр нахилу $4|a|$, інші ж — $12|a|$.

Нарешті, можна побудувати комбіновані моделі осциляторів, поклавши $u_1 = u_2 = y_1 = w_2 = 0$ і $x_{1-} = g_{\uparrow+} = g_{\downarrow}$, $x_{1+} = 0$, $g_{\uparrow-} = 0$ або $x_{1+} = g_{\uparrow-} = g_{\downarrow}$, $x_{1-} = 0$, $g_{\uparrow+} = 0$. Це веде до вибору парціяльних потенціяів (5.12), (5.17),

$$X_1 = Y^{(2)} = \tfrac{1}{4}Y, \qquad Y^{(1)} = \tfrac{3}{4}Y, \quad Y_1 = Y_2 = 0, \tag{5.33}$$

і однієї з двох можливостей:

$$X_2 = X^{(3)} = \pm\tfrac{1}{4}Y. \tag{5.34}$$

У цих випадках одна з головних (разом з дочірніми) траєкторій (для безмасових частинок) матиме нахил $4|a|$, друга — $12|a|$, а решта дві — $8|a|$.

B. Спектри легких мезонів

Як відомо, спектри легких мезонів (що складаються з u, d і s кварків) мають характерні риси, які після деякої ідеалізації вкладаються в подану нижче картину [41].

1. Мезонні стани лягають у площині (E^2, j) на прямі, відомі як траєкторії Редже.
2. Траєкторії Редже паралельні одна до одної з універсальним параметром нахилу $\sigma \approx 1.15$ ҐеВ^2.
3. Нерелятивістська класифікація мезонів як $(n^{2s+1}\ell_j)$-станів кварк-антикваркової системи є адекватною: поряд з j "хорошими" квантовими числами можна вважати орбітальне число ℓ, сумарний спін системи s та радіяльне число n_r (або по'язане з ним $n = n_r + \ell + 1$).
4. Спектри є ℓs-виродженими, тобто залежать від ℓ та n_r, але не від j чи s.
5. Стани з різними ℓ і n_r характеризуються додатковим (випадковим) виродженням, що приводить до "вежової" структури спектра [42].

Детальніше твердження 3 означає, що у площині (E^2, ℓ) мезонні стани також утворюють прямі: існує 4 головні ($n_r = 0$) траєкторії Редже, що відповідають синґлетним ($s = 0$) та триплетним ($s = 1$) сімействам станів, і кожна головна траєкторія породжує низку дочірніх ($n_r = 1, 2, \ldots$). Тоді твердження 4 значить, що у площині (E^2, ℓ) усі головні траєкторії вироджуються в одну (це ж стосується й дочірніх траєкторій з фіксованим n_r). Існування випадкового виродження мало б свідчити про функційну залежність E^2 від ℓ та n_r через їхню суму з сумірними коефіцієнтами [42]. У літературі найчастіше використовують масові формули з $(\ell + 2n_r)$-залежністю, характерною для осциляторних [43–47] та деяких струнних [48] моделей мезонів. Менш відома $(\ell + n_r)$-залежність; вона з'являється в запропонованих у [49, 50] феноменологічних формулах для опису π- і ρ-траєкторій, а також у потенціяльній моделі безспінових кварків із взаємодією векторною типу [51, 52]. Обидві можливості пролюстровані на рис. 2, де відповідні траєкторії Редже показано в координатах (E^2, j) і (E^2, ℓ).

Зауважимо, що ідеалізована картина характеризує відносне розташування траєкторій на цих площинах. Їх абсолютне розташування залежить від ароматового складу мезонів, і для (π-ρ)-сімейства воно приблизно таке, як на рис. 2. Зі збільшенням мас складових кварків траєкторії зміщуються вправо (в ділянку більших значень E^2).

Реальні спектри мезонів відрізняються від ідеалізованої картини. По-перше, відомо обмежена кількість мезонів, і не всі вони надійно ідентифікуються зі станами ідеалізованих спектрів. Далі, траєкторії не цілком прямі, особливо в нижній частині спектра [48, 53, 54], а середнє чи асимптотичне (при великих j) значення параметра нахилу σ залежить від ароматового складу мезонів [47, 54]. ℓs-виродження є наближеним — порядку $5 \div 6\%$ від σ — і тлумачиться як результат ss-розщеплення [41]. Вежова структура встановлена ненадійно (тобто лише для окремих груп станів) і також є наближеною [48]. Тому, будуючи потенціяльні моделі, зручно орієнтуватися на ідеалізовану картину як на нульове наближення з можливістю подальшого введення різних поправок.

Більшість рис ідеалізованої структури мезонних спектрів притаманна спектрам осциляторних моделей Ia–Id, розглянутих на початку попереднього підрозділу. Справді, у безмасовому випадку траєкторії є прямими й паралельними. Хоча моделі мають вільночастинкові нерелятивстські межі, однак їхні зв'язані стани формально можна класифікувати як нерелятивістські: рівні $E_{\uparrow+}$ з парністю $P = (-)^j$ починаються з $j = 0$, як і синґлетні стани ϕ^A, тоді як $E_{\downarrow+}$ починаються з $j = 1$ — як триплетні стани ϕ^0; аналогічно рівні $E_{\uparrow-}$ та $E_{\downarrow-}$ з $P = -(-)^j$ починаються з $j = 0$ та $j = 1$ і відповідають триплетним станам ϕ^- та ϕ^+.

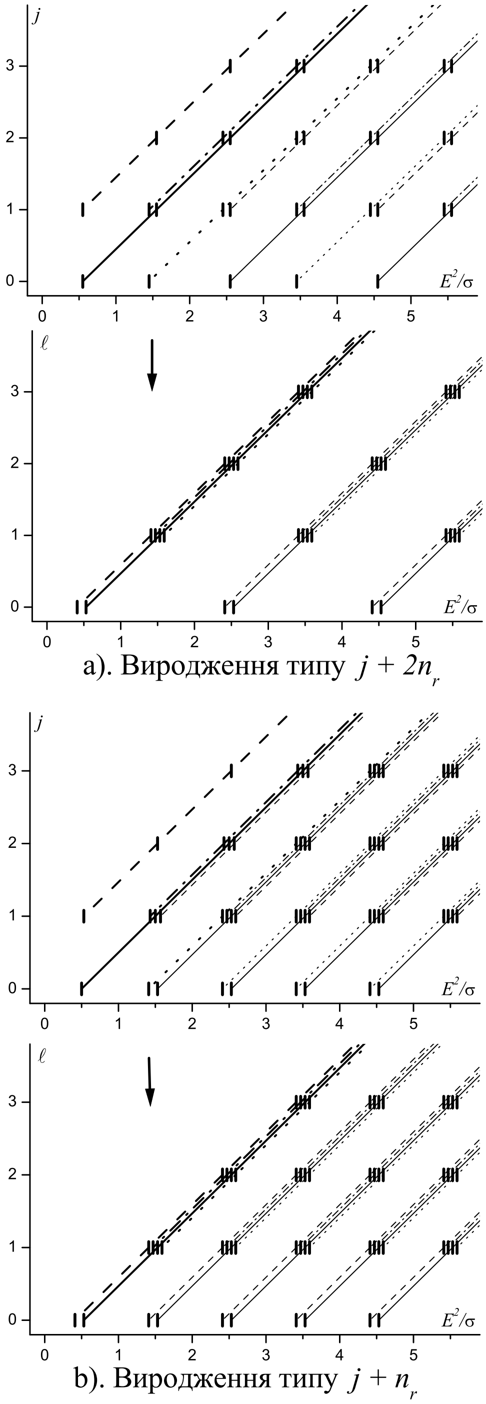

Рис. 2. Траєкторії Редже ідеалізованих мезонних спектрів.

Тому траєкторії $\uparrow+$ можна приписати синґлетні квантові числа $s = 0$, $\ell = j$, а траєкторіям $\downarrow+$ і $\updownarrow-$ — триплетні числа $s = 1$, $\ell = j$ і $s = 1$, $\ell = j \pm 1$ відповідно.

Усі моделі приводять як до виродження траєкторій, так і до випадкового виродження станів (вежової структури) з тією чи іншою кратністю — залежно від моделі та вибору її параметрів. Однак характер виродження інший, ніж в ідеалізованій картині. Зокрема, ні одна з моделей не відтворює ℓs-виродження траєкторій (риса 4) та відповідний до нього порядок розміщення траєкторій (порівн. рис. 1 та 2): в ідеалізованій картині мали б збігатися траєкторії $n_r\uparrow+$ і $n_r\downarrow+$ (а у площині (E^2, ℓ) — усі 4 сімейства траєкторій $n_r\updownarrow\pm$, $n_r = 0, 1, \ldots$); насправді ж збігаються $n_r\downarrow+$ і $n_r\downarrow-$ (які мали би бути розщеплені на величину σ).

Спробуймо побудувати модель, яка хоча б наближено відтворювала спектри легких мезонів. Для того, щоб у площині (E^2, ℓ) усі траєкторії були повністю виродженими за спіновими станами, необхідно, щоб існував додатковий інтеґрал руху — повний спін системи $\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$ (або інший інтеґрал, що в нерелятивістській межі переходить у цю величину) [41,53]. Однак навіть за відсутности взаємодії 2-частинковий гамільтоніян Дірака не комутує з $\mathbf{s}$. Тому вимогу 4 можна задовольнити лише наближено.

Покладімо в рівняннях (5.9)

$$g_{\updownarrow} = 2\left(ar + \frac{\chi \mp 1/2}{r}\right), \qquad x_1 = \frac{4\varkappa}{r} \tag{5.35}$$

(решта функцій дорівнюють нулеві). Тоді вони набирають вигляду:

$$\begin{aligned}\Psi'' + \bigl\{\tfrac{1}{4}E^2 - 2a(\chi{+}1) - a^2r^2 \\ - (C^2{+}\chi^2{-}\tfrac{1}{4}{+}2\varkappa\mathrm{K})/r^2\bigr\}\,\Psi = 0,\end{aligned} \tag{5.36}$$

де коефцієнт біля $1/r^2$ містить недіягональну ермітову матрицю:

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} 2\varkappa & C \\ C & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.37}$$

Після її діягонацізації система розщеплюється на два рівняння типу осциляторних, що дають спектр

$$E_{\updownarrow}^2 = 8|a|(k_{\updownarrow} + 2n_r + 3/2) + 8a(\chi + 1); \tag{5.38}$$

тут

$$k_{\updownarrow} = \sqrt{(\sqrt{C^2 + \varkappa^2} \pm \varkappa)^2 + \chi^2} - 1/2 \overset{j\to\infty}{\approx} j \pm \varkappa + O(1/j). \tag{5.39}$$

Нагадаємо, що для різних парностей функції $x_{1\pm}$, а в цьому разі (5.35) параметри $\varkappa_\pm$ можна вибирати незалежно. Тому модель містить 4-параметричний потенціял вигляду (5.3), де

$$\text{III).} \qquad Y^{(1)} = ar + \frac{\chi}{r}, \quad Y^{(2)} = \frac{1/2}{r}, \quad X_1 = \frac{\varkappa_1}{r}, \quad X_2 = \frac{\varkappa_2}{r}, \tag{5.40}$$

$\varkappa_1 = \frac{1}{2}(\varkappa_+ + \varkappa_-)$, $\varkappa_2 = \frac{1}{2}(\varkappa_+ - \varkappa_-)$. Решта парціяльних потенціялів дорівнюють нулеві (окрім хіба що довільного калібрувального $X^{(1)}$).

Роль "кулонівських" членів у потенціялах (5.40) можна окреслити так: вони деформують траєкторії Редже, залишаючи їх лише асимптотично (при $j \to \infty$) прямими; потенціял $Y^{(2)}$ зводить асимптотики докупи, X_1 та X_2 розщеплюють їх симетрично (вліво і вправо) на $|a|\varkappa_\pm$, а 2-й доданок $Y^{(1)}$ зміщує всі асимптотики разом на $8a\chi$ вліво.

При виборі $\varkappa_+ = 0$, $\varkappa_- = 1$ траєкторії є асимптотично виродженими у площині (E^2, ℓ); див. рис. 3. Таким чином, наближено відтворюється властивість 4 ідеалізованих спектрів мезонів. У масивному випадку система (5.9) ускладнюється:

$$\Psi'' + \left\{ \frac{1}{4}\left(E - \frac{\nu^2}{E}\right)\left(E - \frac{\mu^2}{E}\right) - 2a(\chi+1) - a^2r^2 - \frac{C^2+\chi^2-1/4}{r^2} - 2\mathrm{K}\left[\frac{\varkappa}{r^2} - \frac{\nu}{E}\left(a + \frac{\chi}{r^2}\right)\right]\right\}\Psi = 0, \tag{5.41}$$

але її також можна діягоналізувати до 2-х рівнянь осциляторного типу. Спектральна умова при цьому випадку не розв'язується аналітично. Тому спектр подаємо в неявному вигляді, зручному для розв'язування ітераційним методом:

$$\begin{aligned} E_\updownarrow &= \sum_{a=1}^{2}\sqrt{m_a^2 + 2|a|[k_\updownarrow + 2n_r + \frac{1}{2} - \chi + (\varkappa \pm \sqrt{C^2+\varkappa^2})\nu/E_\updownarrow]}, \\ k_\updownarrow &= \sqrt{(\sqrt{C^2+\varkappa^2} \pm \varkappa)^2 + \chi^2 - 2(\varkappa \pm \sqrt{C^2+\varkappa^2})\chi\nu/E_\updownarrow} - \frac{1}{2}; \end{aligned} \tag{5.42}$$

тут $\nu = m_1 \mp m_2$ і $\varkappa = \varkappa_\pm = \varkappa_1 \pm \varkappa_2$ для енерґій $E_{\updownarrow\pm}$ станів з різною парністю $P = \pm(-)^j$.

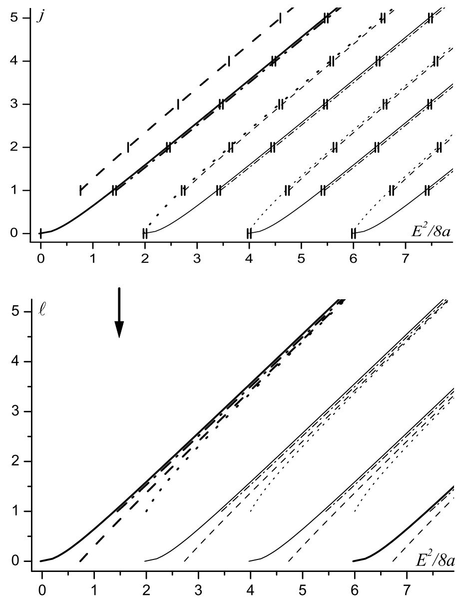

Рис. 3. Траєкторії Редже безмасової моделі III при $\varkappa_1 = 1/2$, $\varkappa_2 = -1/2$, $\chi = 0$. Позначення такі ж, як на рис. 2.

4 довільні параметри a, χ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ (а в масивному випадку — ще й маси m_1, m_2) можна підібрати так, щоб якомога краще відтворити реальні спектри мезонів. На рис. 4 показано спектр легких мезонів (π–ρ)-сімейства, побудований за даними [55], і відповідні траєкторії Редже, отримані при оптимальних значеннях параметрів: $a = 0.145$ ҐеВ^2, $\chi = 0.746$, $\varkappa_1 = 0.177$, $\varkappa_2 = -0.262$, $m_1 = 0.139$ ҐеВ, $m_2 = 0.058$ ҐеВ. Отримані траєкторії дещо викривлені, особливо в нижній ділянці, тому оптимальні значення $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$ помітно відрізняються від значень ($\varkappa_1 = 1/2$, $\varkappa_2 = -1/2$), що забезпечують асимптотичну виродженість траєкторій. Очевидно, що спостережувані рівні непогано лягають на траєкторії Редже. Однак частина радіяльних збуджень не попадає на дочірні траєкторії, особливо у їх нижній ділянці. Однією з причин цієї невідповідности може бути специфічний характер викривлености модельних траєкторій: траєкторії $n_r\!\uparrow\!\pm$ мають додатну кривину, тоді як $n_r\!\downarrow\!\pm$ — від'ємну. Інша причина — асимптотичне випадкове виродження типу $\ell + 2n_r$, що дає замало дочірніх траєкторій. Очевидно, наприклад, що станам π**(1300)**, $\pi_2(2100)$ і a$_1(1640)$ бракує "своїх" дочірніх траєкторй типу $\uparrow+$ і $\downarrow+$, а стани ρ*(2265)* чи ρ*(2280)* не попадають на траєкторію $2\!\downarrow-$ через її викривленість. З іншого боку, викривленість траєкторії $0\!\uparrow+$ добре узгоджується із реальними станами π_0, $\mathbf{b}_1$**(1235)** і т. д. Зауважимо також, що отримані оптимальні величини m_1 і m_2 та їх різниці значно перевищують загальноприйняті значення для струмових мас u і d кварків ($m \approx 5 \div 7$ MeB), і значно ближчі до т. зв. конституентних мас ($m \approx 350$ MeB), що використовуються в нерелятивістських моделях. Тут їх слід розглядати лише як феноменологічні параметри, а не спостережувані величини.

VI. ПСЕВДОПЕРТУРБАТИВНИЙ МЕТОД РОЗКЛАДІВ ЗА $1/j$

Точно розв'язувана модель легких мезонів, побудована в попередньому розділі, базується на суперпозиції лінійного та кулонівського двофермійонних потенціялів із складною спін-кутовою залежністю. Фізична інтерпретація такого потенціялу не є очевидною. Крім того, він задається невласним оператором (див. розділ II) і, отже, зникає в нерелятивістській межі. Тому модель придатна до опису лише легких мезонів, що вважаються істотно релятивістськими об'єктами.

Важливим, із фізичного погляду, завданням є побудова універсальної релятивістської моделі, яка допускає теоретико-польову інтерпретацію взаємодії, а в нерелятивістській межі зводиться до потенціяльної моделі, придатної для опису важких мезонів. Прийнято вважати, що кандидатом на цю роль може бути релятивістська модель із короткосяжною векторною й далекосяжною скалярною взаємодіями [10,11,15,20, 56,57], які в нерелятивістській межі зводяться до потенціялу $U_{\rm nr}(r) = u_{\rm v}(r) + u_{\rm s}(r)$. Найчастіше (і найпростіше) вибирають

$$u_{\rm v}(r) = -\alpha/r, \tag{6.1}$$
$$u_{\rm s}(r) = ar, \tag{6.2}$$

де "біжуча константа" α змінюється від $\alpha = 0.27$ для важких мезонів до $\alpha = 0.8$ для легких, а стала $a = 0.25 \div 0.3\,{\rm GeV}^2$ є універсальною [56].

Оскільки задовільної зі всіх поглядів універсальної моделі ще немає, варто розглянути кілька прикладів у межах 2ЧРД.

У літературі використовують різні потенціяли для опису двофермійонних взаємодій скалярного й векторного типу. Ось приклади векторних потенціялів:

$$U_{\rm v}^{\rm (st)}(r) = u(r), \tag{6.3}$$
$$U_{\rm v}^{\rm (EG)}(r) = \{1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2\}u(r), \tag{6.4}$$
$$U_{\rm v}^{\rm (B)}(\mathbf{r}) = \{1 - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2\}u(r) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}_1)(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}_2)ru'(r), \tag{6.5}$$

де $u' = du/dr$. Потенціял $U_{\rm v}^{\rm (st)}$ враховує лише статичну компоненту 4-векторного поля-носія взаємодії (див. [5]). Він входить у 2ЧРД як добавка до енерґії E і збігається з його нерелятивістською межею $u(r)$. У потенціялі $U_{\rm v}^{\rm (EG)}$ (див. [15,23]), що для кулонівського випадку вперше запронували Едингтон і Ґант [3,4], врахована релятивістська кінематика векторної взаємодії. В узагальненні $U_{\rm v}^{\rm (B)}$ потенціялу Брайта [1] взято до уваги також члени, що описують ефекти запізнення [23].

Два різні скалярні потенціяли:

$$U_{\rm s}^{\rm (Y)}(r) = \beta_1\beta_2 u(r), \tag{6.6}$$
$$U_{\rm s}^{\rm (min)}(r) = \tfrac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)u(r), \tag{6.7}$$

походять із двох різних типів спарювання скалярного поля-медіятора із фермійонними полями. Потенціял $U_{\rm s}^{\rm (Y)}$ виникає із взаємодії Юкави (див. [21,23]), тоді як $U_{\rm s}^{\rm (min)}$ відповідає так званому "мінімальному" спарюванню: в 2ЧРД він з'являється як добавка до мас спокою частинок [11–14].

У двофермійонних рівняннях квантово-польового походження члени взаємодії множаться на 2-частинкові проєкційні оператори:

$$\Pi^{(\tau)}(\mathbf{p}) = \Lambda_1^{(+)}(\mathbf{p})\Lambda_2^{(+)}(-\mathbf{p}) + \tau\Lambda_1^{(-)}(\mathbf{p})\Lambda_2^{(-)}(-\mathbf{p})$$
$$\tau = 0, \pm 1, \tag{6.8}$$

побудовані в термінах 1-частинкових додатно- та від'ємно-енерґетичних проєкторів:

$$\Lambda_a^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\{1 \pm h_a(\mathbf{p})/\omega_a(\mathbf{p})\},$$
$$\omega_a(\mathbf{p}) = \sqrt{m_a^2 + \mathbf{p}^2}. \tag{6.9}$$

У різних квантово-польових рівняннях використовують проєкційні оператори з різними значеннями τ: Браун і Рейвенгол [58] ввели в рівняння Брайта проєктори на додатно-енерґетичні стани ($\tau = 0$), у рівнянні Салпетера $\tau = -1$ [25], а в одній з версій квазіпотенціяльних рівнянь Матвєєв, Мурадян і Тавхелідзе використали проєктор з $\tau = 1$ [27]. Проєкційні оператори (6.8) є нелокальними в координатному представленні, і, взагалі кажучи, порушують ермітовість членів взаємодії. Однак у статичному наближенні (тобто у припущенні $\mathbf{p} = \mathbf{0}$) проєкції $\Pi(\mathbf{0})U_{\rm s}(r)$ (для обох $U_{\rm s}^{\rm (Y)}$ і $U_{\rm s}^{\rm (min)}$) є локальними й ермітовими і породжують ще дві версії скалярного потенціялу [29]:

$$U_{\rm s}^{\rm (BR)}(r) = \tfrac{1}{4}(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)u(r), \tag{6.10}$$
$$U_{\rm s}^{\rm (MMT)}(r) = \frac{1}{2}(1 + \beta_1\beta_2)u(r); \tag{6.11}$$

далі будемо їх називати (за походженням проєкторів) потенціялами Брауна–Рейвенгола та Матвєєва–Мурадяна–Тавхелідзе відповідно.

Тут не розглядаємо проєктування векторних потенціялів, оскільки це питання є предметом глибшого вивчення й виходить за межі статті (див. [59], де в межах теорії збурень досліджують і порівнюють різні проєкції потенціялу Брайта).

Довільну суперпозицію скалярних та векториних потенціялів (6.3)–(6.7), (6.10), (6.11) можна використати в 2ЧРД для побудови релятивістської потенціяльної моделі. Однак усі вони не є точно розв'язувані, а деякі з них — математично погано означені. З огляду на калькулятивні труднощі лише 2ЧРД з лінійним скалярним мінімальним потенціялом (6.7), (6.2) детально досліджено аналітично й чисельно і обчислено спектри [12–14].

Далі пропонуємо метод розкладів за $1/j$, що дає змогу з єдиного погляду розглянути й інші моделі, побудовані на базі 2ЧРД. З цією метою спочатку розглянемо простіший приклад релятивістського рівняння, яке описує взаємодію двох скалярних частинок.

A. Метод $1/\ell$ для рівняння Тодорова

Розгляньмо рівняння типу Тодорова, що описує релятивістську систему 2-х взаємодіючих скалярних частинок у системі відліку центра мас: [57,60,61]:

$$\left\{\mathbf{p}^2 + U(r,E) - b(E)\right\}\Psi(\mathbf{r}) = 0. \tag{6.12}$$

Тут $\mathbf{p} = -\mathrm{i}\nabla$, квазіпотенціял $U(r,E)$ залежить від енерґії системи E, а функція $b(E)$ енерґії системи E є такою:

$$b(E) = \tfrac{1}{4}E^2 - \tfrac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) + \tfrac{1}{4}(m_1^2 - m_2^2)^2/E^2,$$

$$\text{і є оберненою до} \quad E(b) = \sum_{a=1}^{2} \sqrt{m_a^2 + b}. \quad (6.13)$$

Відповідне радіяльне рівняння набирає вигляду

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - W(r,E,\ell) \right\} \Psi(r) = 0, \quad (6.14)$$

де ℓ — орбітальне квантове число,

$$W(r,E,\ell) = U(r,E) + \ell(\ell+1)/r^2 - b(E). \quad (6.15)$$

Розгляньмо рух системи в околі класичної стійкої колової орбіти. За даного значення $\ell > 0$ радіус $r_\mathrm{c} = r_\mathrm{c}(\ell)$ цієї орбіти й відповідна енерґія $E_\mathrm{c} = E_\mathrm{c}(\ell)$ задовольняють умови:

$$W(r_\mathrm{c}, E_\mathrm{c}, \ell) = 0, \quad (6.16)$$

$$\partial W(r_\mathrm{c}, E_\mathrm{c}, \ell)/\partial r_\mathrm{c} = 0, \quad (6.17)$$

$$\partial^2 W(r_\mathrm{c}, E_\mathrm{c}, \ell)/\partial r_\mathrm{c}^2 > 0; \quad (6.18)$$

тут $\partial W(r_\mathrm{c}, E_\mathrm{c}, \ell)/\partial r_\mathrm{c} \equiv \partial W(r,E,\ell)/\partial r \Big|_{\substack{r=r_\mathrm{c}\\E=E_\mathrm{c}}}$ і т. д.

Покладімо $r = r_\mathrm{c} + \Delta r$ та $E = E_\mathrm{c} + \Delta E$, де Δr та ΔE є малими, і розкладімо функцію $W(r_\mathrm{c}+\Delta r, E_\mathrm{c}+\Delta E, \ell)$ у степеневий ряд за Δr і ΔE. Тоді, згідно з умовами (6.16)–(6.18), головний член цього розкладу представляє потенціял гармонічного осцилятора, а інші (малі) члени — ангармонічні поправки. Якщо умови (6.16)–(6.18) виконуються для довільних великих значень ℓ, то шляхом певного перенормування Δr і ΔE можна виокремити незалежну від ℓ задачу про гармонічний осцилятор (як нульове наближення) та ангармонічні збурення, що зникають при $\ell \to \infty$. У цьому й полягає ідея методу розкладів за $1/\ell$. Застосування псевдопертурбативної техніки цього типу [35–39] до нашого випадку має дві особливості: рівняння (6.14) становить нелінійну спектральну задачу, і точний розв'язок рівнянь (6.16)–(6.17) може виявитися невідомим або занадто громіздким для практичних обчислень. З огляду на це пропонуємо модифікацію методу.

Уведімо параметр $\lambda = 1/\sqrt{\ell}$, що є малим при великих ℓ. Оскільки точний вигляд функцій $r_\mathrm{c}(\ell)$ і $E_\mathrm{c}(\ell)$, узагалі кажучи, невідомий, передусім визначаємо асимптотики $r_\mathrm{c} \sim r_\infty(\lambda)$, $b_\mathrm{c} = b(E_\mathrm{c}) \sim b_\infty(\lambda)$ при $\lambda \to 0$, які можна знайти значно простіше. Тоді функції $r_\mathrm{c}(\ell)$ та $E_\mathrm{c}(\ell)$ записуємо так:

$$\begin{aligned} r_\mathrm{c}(\lambda) &= r_\infty(\lambda)\rho(\lambda), \\ b_\mathrm{c}(\lambda) &= b_\infty(\lambda)\mu(\lambda), \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= 1 + \lambda\rho^{(1)} + \lambda^2\rho^{(2)} + \ldots, \\ \mu(\lambda) &= 1 + \lambda\mu^{(1)} + \lambda^2\mu^{(2)} + \ldots \end{aligned} \quad (6.20)$$

де коефіцієнти розкладу $\rho^{(n)}$, $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ (а тому й аналітичні функції $\rho(\lambda)$ та $\mu(\lambda)$) визначаються крок за кроком з умов:

$$\bar{W}(\rho,\mu,\lambda) = 0, \qquad \partial\bar{W}(\rho,\mu,\lambda)/\partial\rho = 0 \quad (6.21)$$

та $\partial^2\bar{W}(\rho,\mu,\lambda)/\partial\rho^2 > 0$; тут безрозмірна функція $\bar{W}(\rho,\mu,\lambda)$ утворена шляхом підстановки (6.19)–(6.20) в (6.15) та перенормування з метою забезпечення її реґулярности при $\lambda \to 0$:

$$\bar{W}(\rho,\mu,\lambda) = \lambda^4 r_\infty^2 W\left[r_\infty\rho, E(b_\infty\mu), 1/\lambda^2\right]. \quad (6.22)$$

Перейдімо тепер до безрозмірних змінної $r \to \xi$ та спектрального параметра $b(E) \to \epsilon$:

$$r = r_\infty(\lambda)[\rho(\lambda) + \lambda\xi],$$

$$b = b_\infty(\lambda)[\mu(\lambda) + \lambda^2\epsilon], \quad (6.23)$$

у термінах яких рівняння (6.14) набирає вигляду:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{\lambda^2} w(\xi,\epsilon,\lambda) \right\} \psi(\xi) = 0, \quad (6.24)$$

де

$$\psi(\xi) = \Psi[r_\infty(\rho + \lambda\xi)] \quad (6.25)$$

і

$$w(\xi,\epsilon,\lambda) = \bar{W}(\rho + \lambda\xi,\ \mu + \lambda^2\epsilon,\ \lambda). \quad (6.26)$$

Якщо функції $\rho(\lambda)$ та $\mu(\lambda)$ задовольняють умови (6.21), то рівняння (6.24) є несинґулярним при $\lambda \to 0$. Це твердження залишається правильним, якщо в перетворенні (6.23), замість точних виразів для $\rho(\lambda)$ та $\mu(\lambda)$, використати їхні перші наближення:

$$\rho(\lambda) = 1 + \lambda\rho^{(1)}, \qquad \mu(\lambda) = 1 + \lambda\mu^{(1)}. \quad (6.27)$$

Справді, скориставшись позначеннями

$$\frac{\partial\bar{W}^{(0)}}{\partial\mu} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\partial\bar{W}}{\partial\mu} = \frac{\partial\bar{W}}{\partial\mu}(\rho{=}1, \mu{=}1, \lambda{=}0)$$

і т. д., маємо:

$$\frac{1}{\lambda^2}w(\xi,\epsilon,\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\bar W\left[\rho(\lambda)+\lambda\xi,\,\mu(\lambda)+\lambda^2\epsilon,\,\lambda\right]=\frac{1}{\lambda^2}\bar W^{(0)}+\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\partial\bar W^{(0)}}{\partial\rho}(\rho^{(1)}+\xi)+\frac{\partial\bar W^{(0)}}{\partial\mu}(\mu^{(1)}+\lambda\epsilon)+\frac{\partial\bar W^{(0)}}{\partial\lambda}\right\}$$
$$+\frac12\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\rho^2}(\rho^{(1)}+\xi)^2+\frac12\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\mu^2}[\mu^{(1)}]^2+\frac12\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\rho\partial\mu}(\rho^{(1)}+\xi)\mu^{(1)}+\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\rho\partial\lambda}(\rho^{(1)}+\xi)$$
$$+\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\mu\partial\lambda}\mu^{(1)}+O(\lambda). \tag{6.28}$$

Синґулярних членів у цьому розкладі немає, якщо

$$\bar W^{(0)}=0,\qquad \partial\bar W^{(0)}/\partial\rho=0, \tag{6.29}$$
$$\frac{\partial\bar W^{(0)}}{\partial\mu}\mu^{(1)}+\frac{\partial\bar W^{(0)}}{\partial\lambda}=0. \tag{6.30}$$

Крім цього, члени нульового порядку, лінійні за ξ, випадають, якщо

$$\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\rho^2}\rho^{(1)}+\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\rho\partial\mu}\mu^{(1)}+\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\rho\partial\lambda}=0. \tag{6.31}$$

Зауважимо, що рівняння (6.29) та (6.30)–(6.31) становлять собою умови (6.21) у 0-му та 1-му порядках за λ відповідно. Тому умови (6.29) задовольняються тотожно, а (6.30)–(6.31) є лінійними рівняннями для знаходження $\rho^{(1)}$ та $\mu^{(1)}$.

У 0-му наближенні рівняння (6.24) зводяться до задачі про гармонічний осцилятор:

$$\left\{\frac{d^2}{d\xi^2}+\kappa\epsilon-\nu-\omega^2\xi^2\right\}\psi(\xi)=0 \tag{6.32}$$

де

$$\kappa=-\frac{\partial\bar W^{(0)}}{\partial\mu},\qquad \omega^2=\frac12\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\rho^2}, \tag{6.33}$$
$$\nu=-\frac12\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\rho^2}[\rho^{(1)}]^2+\frac12\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\mu^2}[\mu^{(1)}]^2+\frac12\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\mu\partial\lambda}\mu^{(1)}, \tag{6.34}$$
$$\mu^{(1)}=-\frac{\partial^2\bar W^{(0)}/\partial\lambda}{\partial^2\bar W^{(0)}/\partial\mu},$$
$$\rho^{(1)}=-\frac{1}{\partial^2\bar W^{(0)}/\partial\rho^2}\left\{\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\rho\partial\mu}\mu^{(1)}+\frac{\partial^2\bar W^{(0)}}{\partial\rho\partial\lambda}\right\}. \tag{6.35}$$

Члени вищого порядку в розкладі (6.28) можна тлумачити як збурення осцилятора. В загальному вони залежать від спектрального параметра ϵ і можуть бути враховані з допомогою відповідної пертурбативної процедури [61]. В усьому іншому процедура є близькою до описаної в [35–39].

Власні значення 0-го наближення

$$\epsilon_{n_r}=[\omega(2n_r+1)+\nu]/\kappa, \tag{6.36}$$

де $n_r=0,1,\ldots$ — радіяльне квантове число, уточнюються пертурбативними поправками вищих порядків. Тоді, використовуючи 2-гу рівність (6.23) в (6.13), отримуємо енерґетичний спектр системи.

Для прикладу розгляньмо рівняння Тодорова з мінімально включеними векторним (6.1) та скалярним (6.2) потенціялами. Функція $W(r,E,\ell)$ у цьому разі має вигляд [57]:

$$W(r,E,\ell)=[m_E+u_{\rm s}(r)]^2-[\epsilon_E-u_{\rm v}(r)]^2+\ell(\ell+1)/r^2, \tag{6.37}$$

де

$$m_E=\frac{m_1m_2}{E},\qquad \epsilon_E=\frac{E^2-m_1^2-m_2^2}{2E}. \tag{6.38}$$

Обчисливши асимптотики $r_\infty(\lambda)$ та $b_\infty(\lambda)$ (див. Додаток C), отримуємо формулу для спектра в 0-му наближенні:

$$E^2=8a\left(\ell+2n_r+3/2-\sqrt2\alpha\right)+2\left(m_1^2+m_2^2+\sqrt2m_1m_2\right), \tag{6.39}$$

що збігається з отриманою в [57] з менш формалізованих евристичних міркувань.

B. Метод $1/j$ для 2ЧРД

Повернімося до радіяльно зредукованого 2ЧРД в матрично-двочленному вигляді, заданого оператором (4.21). Зобразивши хвильову функцію $\bar\Phi_1$ (4.17) та матрицю W через їх компоненти:

$$\bar\Phi_1=\begin{bmatrix}\Psi_\uparrow\\ \Psi_\downarrow\end{bmatrix},\qquad \mathrm{W}=\begin{bmatrix}W_\uparrow & Y\\ \overset{*}{Y} & W_\downarrow\end{bmatrix}, \tag{6.40}$$

отримуємо пару зв'язаних рівнянь 2-го порядку:

$$\frac{d^2}{dr^2}\Psi_\uparrow(r)-W_\uparrow(r,E,j)\Psi_\uparrow(r)=Y(r,E,j)\Psi_\downarrow(r), \tag{6.41}$$
$$\frac{d^2}{dr^2}\Psi_\downarrow(r)-W_\downarrow(r,E,j)\Psi_\downarrow(r)=\overset{*}{Y}(r,E,j)\Psi_\uparrow(r). \tag{6.42}$$

Застосуймо до неї псевдопертурбативний метод, узявши за параметр розкладу $\lambda=1/\sqrt{j}$.

Припустімо тичасово, що правою частиною системи (6.41)–(6.42) можна знехтувати, так що рівняння розчеплюються. Тоді до кожного з рівнянь можна застосувати схему, викладену у попередньому підрозділі. Означуємо радіуси та енерґії колових орбіт умовами:

$$W_i(r_i,E_i,j)=0,\qquad \frac{\partial W_i(r_i,E_i,j)}{\partial r}=0, \tag{6.43}$$

$\partial^2 W_i(r_i, E_i, j)/\partial r^2 > 0$, $i =\uparrow,\downarrow$. Тоді виділяємо асимптотики цих функцій, залежних від λ:

$$r_i(\lambda) = r_{i\infty}(\lambda)\rho_i(\lambda),$$
$$b_i(\lambda) = b_{i\infty}(\lambda)\mu_i(\lambda), \tag{6.44}$$

$$\rho_i(\lambda) = 1 + \lambda\rho_i^{(1)} + \lambda^2\rho_i^{(2)} + \ldots,$$
$$\mu(\lambda) = 1 + \lambda\mu_i^{(1)} + \lambda^2\mu_i^{(2)} + \ldots, \tag{6.45}$$

і, використовуючи рівності

$$r = r_{i\infty}(\lambda)[\rho_i(\lambda) + \lambda\xi_i],$$
$$b = b_{i\infty}(\lambda)[\mu_i(\lambda) + \lambda^2\epsilon_i], \quad i =\uparrow,\downarrow, \tag{6.46}$$

переформульовуємо рівняння (6.41) у термінах безрозмірної змінної $\xi_\uparrow$ і спектрального параметра $\epsilon_\uparrow$, тоді як рівняння (6.42) — в термінах $\xi_\downarrow$ та $\epsilon_\downarrow$. Нарешті здійснюємо розклад рівняннь за степенями λ і розв'язуємо незалежно одне від одного.

Перш ніж ураховувати актуальне спарювання рівнянь (6.41)–(6.42), зауважимо, що змінні $\xi_\uparrow$ та $\xi_\downarrow$ не є незалежними одна від одної, так само, як і спектральні параметри $\epsilon_\uparrow$ and $\epsilon_\downarrow$. Тому ми повинні вибрати спільні для обох рівнянь змінні.

Виберім спочатку $\xi = \xi_\uparrow$, $\epsilon = \epsilon_\uparrow$. Система (6.41)–(6.42) зводиться до вигляду:

$$\psi_\uparrow''(\xi) - \frac{1}{\lambda^2} w_\uparrow(\xi,\epsilon,\lambda)\psi_\uparrow(\xi) = y(\xi,\epsilon,\lambda)\psi_\downarrow(\xi), \tag{6.47}$$
$$\psi_\downarrow''(\xi) - \frac{1}{\lambda^2} w_\downarrow(\xi,\epsilon,\lambda)\psi_\downarrow(\xi) = \overset{*}{y}(\xi,\epsilon,\lambda)\psi_\uparrow(\xi), \tag{6.48}$$

де

$$\psi_i(\xi) = \Psi_i[r_{\uparrow\infty}(\rho_\uparrow + \lambda\xi)], \qquad i =\uparrow,\downarrow, \tag{6.49}$$
$$w_i(\xi,\epsilon,\lambda) = \lambda^4 r_{\uparrow\infty}^2 W_i\left[r_{1\infty}(\rho_\uparrow + \lambda\xi), E\big(b_{\uparrow\infty}(\mu_\uparrow + \lambda^2\epsilon)\big), 1/\lambda^2\right], \tag{6.50}$$
$$y(\xi,\epsilon,\lambda) = \lambda^2 r_{\uparrow\infty}^2 Y\left[r_{1\infty}(\rho_\uparrow + \lambda\xi), E\big(b_{\uparrow\infty}(\mu_\uparrow + \lambda^2\epsilon)\big), 1/\lambda^2\right]. \tag{6.51}$$

Функції (6.50)–(6.51) є реґулярними при $\lambda \to 0$. Навіть більше, загальна структура функції $w_\uparrow$ є такою ж як і w в підрозділі A розділу VI (див р-ня (6.26), (6.28)). Зокрема $w_\uparrow = O(\lambda^2)$. Тому рівняння (6.47) є подібним до (6.24) (але з правою частиною). Воно допускає подібний розклад за λ.

Функція ж $w_\downarrow$ (на відміну від $w_\uparrow$) може мати іншу поведінку при $\lambda \to 0$. Тут ми розглянемо три випадки.

1). Нехай $r_{\downarrow\infty} \neq r_{\uparrow\infty}$ і $b_{\downarrow\infty} \neq b_{\uparrow\infty}$. Тоді $w_\downarrow = O(\lambda^{-n})$, $n \geq 0$ (за винятком дуже спеціяльних випадків, які ми тут не розглядатимемо). У цьому разі рівняння (6.48) можна формально розв'язати стосовно $\psi_\downarrow(\xi)$:

$$\psi_\downarrow = -\left(1 - \frac{\lambda^2}{w_\downarrow}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)^{-1} \frac{\lambda^2}{w_\downarrow} \overset{*}{y}\, \psi_\uparrow$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{w_\downarrow}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)^n \frac{\lambda^2}{w_\downarrow} \overset{*}{y}\, \psi_\uparrow. \tag{6.52}$$

Це представлення веде до втрати тих розв'язків для $\psi_\downarrow$, що не є аналітичними за λ. Однак у пертурбативних процедурах такі розв'язки відкидаються a priori. Підстановка виразу (6.52) у праву частину (6.47) дає змогу вилучити $\psi_\downarrow$ з (6.47) і таким чином отримати замкнуте рівняння для $\psi_\uparrow$. Структура та розгляд цього рівняння є таким же ж, як і рівняння (6.24). Навіть більше, із (6.52) очевидно, що принаймні 0-й та 1-й члени розкладу $\psi_\downarrow$ за λ зникають. Тому права частина рівняння (6.47) не дає внеску в нижні порядки пертурбативної процедури. В 0-му наближенні маємо осциляторне рівняння.

2). Нехай $r_{\downarrow\infty} = r_{\uparrow\infty}$ і $b_{\downarrow\infty} = b_{\uparrow\infty}$, але $\rho_\downarrow - \rho_\uparrow = O(\lambda)$ і $\mu_\downarrow - \mu_\uparrow = O(\lambda)$. Тоді $w_\downarrow = O(\lambda)$. Оскільки $\lambda^2/w_\downarrow = O(\lambda)$, використання пертурбативного розкладу (6.52) в рівнянні (6.47) є також законним. Єдина відмінність від випадку **1** полягає в тому, що права частина рівняння (6.47) може давати внесок уже в 1-му порядку за λ.

В обох випадках, розглянутих вище, ми ввели безрозмірну змінну $\xi_\uparrow$ і отримали замкнуте рівняння на власні значення (яке ми називатимемо *задачею* $\uparrow$) для хвильової функції $\psi_\uparrow(\xi_\uparrow)$ і спектрального параметра $\epsilon_\uparrow$. Подібно можемо ввести змінну $\xi_\downarrow$ і сформулювати рівняння на власні значення (яке ми називатимемо *задачу* $\downarrow$) для хвильової функції $\psi_\downarrow(\xi_\downarrow)$ і спектрального параметра $\epsilon_\downarrow$. На перший погляд, видається, що обидві *задачі* $\uparrow$ і $\downarrow$ еквівалентні й дають однаковий спектр (у термінах енерґії E). Насправді ж ці *задачі* доповнюють одна одну. Це очевидно з рівностей (6.46), що ведуть до співвідношення:

$$\epsilon_\downarrow - \epsilon_\uparrow = \frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{b_{\uparrow\infty}}{b_{\downarrow\infty}}\mu_\uparrow - \mu_\downarrow\right\} + \left\{\frac{b_{\uparrow\infty}}{b_{\downarrow\infty}} - 1\right\}\epsilon_\uparrow. \tag{6.53}$$

Справді, в обох випадках **1** і **2** $|\epsilon_\downarrow - \epsilon_\uparrow| \to \infty$ якщо $\lambda \to 0$. Це означає, що довільний рівень енерґії E, обчислений з використанням власного значення $\epsilon_\uparrow^{(0)}$ 0-го наближення (осциляторної) *задачі* $\uparrow$ (з використанням формул (6.46) і (6.13)), не можна обчислити за допомогою будь-якого скінченного власного значення

$\epsilon_{\downarrow}^{(0)}$ *задачі* $\downarrow$ і навпаки. Поправки вищого порядку до $\epsilon_{\uparrow}^{(0)}$ (або $\epsilon_{\downarrow}^{(0)}$) є малими і якісно не змінюють картини. Тому різні *задачі* породжують різні гілки енерґетичного спектра вихідної системи рівнянь. З цього погляду наступний спеціяльний випадок істотно відрізняється від двох попередніх.

3). Нехай $r_{\downarrow\infty} = r_{\uparrow\infty}$ і $b_{\downarrow\infty} = b_{\uparrow\infty}$, але $\rho_{\downarrow} - \rho_{\uparrow} = O(\lambda^n)$ і $\mu_{\downarrow} - \mu_{\uparrow} = O(\lambda^n)$, $n \geq 2$. Тоді $w_{\downarrow} = O(\lambda^2)$. Обидва рівняння (6.47) і (6.48) мають подібну структуру і можуть розглядатися на рівних правах. Тут принагідними спільними змінними є ξ і ϵ, означені рівностями (6.23) і (6.27). У 0-му наближенні отримуємо зв'язану пару хвильових рівнянь (на відміну від випадків **1** і **2**, де ми мали одне р-ня). У фізично змістовних випадках (див. наступний підрозділ) вони мають вигляд:

$$\left\{d^2/d\xi^2 + \kappa\epsilon - \nu_{\uparrow} - \omega^2\xi^2\right\}\psi_{\uparrow}(\xi) = \chi\psi_{\downarrow}(\xi), \qquad (6.54)$$

$$\left\{d^2/d\xi^2 + \kappa\epsilon - \nu_{\downarrow} - \omega^2\xi^2\right\}\psi_{\downarrow}(\xi) = \chi\psi_{\uparrow}(\xi), \qquad (6.55)$$

де $\chi = \lim_{\lambda\to 0} y = \text{const}$, а параметри $\nu_{\updownarrow}$, κ і ω пов'язані з функціями $w_{\updownarrow}$ рівностями типу (6.33) і (6.34). Рівняння (6.54), (6.55) можна очевидно звести до пари подібних рівнянь, але з новими параметрами $\tilde{\nu}_{\updownarrow} = \{\nu_{\uparrow} + \nu_{\downarrow} \pm \sqrt{(\nu_{\uparrow} - \nu_{\downarrow})^2 + 4\chi^2}\}/2$ і $\tilde{\chi} = 0$, в результаті чого отримуємо пару розчеплених рівнянь типу (6.32). Власні значення ϵ, що відповідають 1-му та 2-му рівнянням, розділені скінченною сталою $\tilde{\nu}_{\uparrow} - \tilde{\nu}_{\downarrow}$. Тому відповідні стани змішуються у вищих наближеннях пертурбативної процедури.

C. Траєкторії Редже для 2ЧРД зі скалярно-векторними потенціялами

Розгляньмо кілька прикладів 2ЧРД із лінійним скалярним та кулонівським векторним потенціялами, поданими на початку розділу VI. Користуючись викладеним вище псевдопертурбативним методом, обчислимо для них траєкторії Редже в 0-му наближенні. Для цього спочатку знайдемо асимптотики функцій $r_c(j)$ та $E_c(j)$ (див. Додаток C), а потім, скориставшись комп'ютерною системою аналітичних обчислень Maple 7, здійснюємо доволі громіздкі розвинення за $\lambda = 1/\sqrt{j}$.

Взаємодія Юкави. Для 2ЧРД з лінійним потенціялом Юкави (6.6), (6.2) отримуємо:

$$E_{\updownarrow\pm}^2 = 4a(j + 2n_r + 3/2) + 6(m_1^2 + m_2^2) + 8\sqrt{2}m_1m_2. \qquad (6.56)$$

Усі траєкторії є асимптотично прямими й паралельними одна до одної. Навіть більше, для значення параметра $a = 0.25 \div 0.3$ҐеВ^2 (типового для нерелятивістських моделей з лінійним потенціялом (6.2)) отримуємо параметр нахилу траєкторій $\sigma = 4a = 1 \div 1.2$ҐеВ^2, що узгоджується з реальним нахилом $\sigma \approx 1.15$ҐеВ^2 для легких мезонів. Таким чином, модель відтворює властивості 1 і 2 мезонної спектроскопії, вказані у підрозділі B розділу V. Спектр (6.56) має випадкове виродження $(j + 2n_r)$-типу (властивість 5 про вежову структуру), однак не має ℓs-виродження. Замість цього головні (і дочірні) траєкторії збігаються в площині (E^2, j) (назвемо це виродження j-типу).

Включення кулонівської векторної взаємодії також не забезпечує ℓs-виродження. Зокрема, статична взаємодія (6.3), (6.1) не змінює взаємного розташування траєкторій, а лише зміщує всю картину в цілому на:

$$\Delta^{(\mathrm{st})}E^2 = -2\sqrt{2}\alpha a. \qquad (6.57)$$

Кулонівські поправки Единґтона-Ґанта (6.4), (6.1) і Брайта (6.5), (6.1) не тільки зміщують, а й по-різному розщеплюють траєкторії:

$$\Delta^{(\mathrm{EG})}E_{\updownarrow+}^2 = -4(\sqrt{2} \pm 1)\alpha a,$$

$$\Delta^{(\mathrm{EG})}E_{\updownarrow-}^2 = -4\sqrt{2}\alpha a, \qquad (6.58)$$

$$\Delta^{(\mathrm{B})}E_{\uparrow\pm}^2 = -3(\sqrt{2} \pm 1)\alpha a,$$

$$\Delta^{(\mathrm{B})}E_{\downarrow\pm}^2 = -(3\sqrt{2} \pm 1)\alpha a. \qquad (6.59)$$

Однак ні при якому виборі сталої α не можна досягнути ℓs-виродження.

Мінімальна взаємодія. Потенціял (6.7), (6.2) веде до спектра:

$$E_{\updownarrow+}^2 = 4a\left(j + 2n_r + \frac{3}{2}\right) + 2m_+\sqrt{2aj} + \frac{5}{4}m_+^2 - 2m_1m_2,$$

$$E_{\updownarrow-}^2 = E_{\updownarrow+}^2 \pm 3\sqrt{2}a. \qquad (6.60)$$

Знову отримуємо асимптотично прямі траєкторії з нахилом $4a$ і вежовою структурою $(j + 2n_r)$-типу. Однак, на відміну від попереднього випадку, усі траєкторії дещо викривлені в нижній частині (завдяки членові $\sim\sqrt{j}$), а траєкторії $\updownarrow-$ розщеплені на величину $\pm 3\sqrt{2}a \approx \pm 4.24a$. Якщо скористатися нерелятивістською класифікацією цих траєкторій (як у підрозділі B розділу V) і розмістити їх у площині (E^2, ℓ), то розщеплення дорівнюватиме $0.24a = 6\%\,\sigma$, що узгоджується з відхиленням реальних спектрів мезонів (5-6%) від ℓs-виродження [41]. У безмасовому випадку вираз $E_{\updownarrow+}^2 = 4a(j + 2n_r + 3/2)$ збігається з точним результатом для траєкторій $\updownarrow+$ (у нашій термінології), отриманим у [12], а подані там чисельні результати для траєкторій $\updownarrow-$ дають ℓs-виродження з тією ж точністю (6%).

Спробуймо формулами (6.60) описати спектр (π-ρ)-сімейства, підібравши параметри a, m_1, m_2. Зазначимо, що уявне продовження $\rho(770)$-траєкторії ($0\downarrow-$ у наших термінах) на площині (E^2, j) перетинає вісь E^2 у від'ємній ділянці. Однак з формул (6.60) випливає: $E_{\downarrow-}^2(j{=}0, n_r{=}0) = 3(2 - \sqrt{2})a + \frac{5}{4}m_-^2 + 3m_1m_2 > 0$. Щоб обійти цю трудність, у [14] запропоновано ввести додатковий параметр c (зовнішній щодо моделі), що інтерпретується як енерґія вакууму і входить у зв'язок мас мезонів M та модельних рівнів енерґії: $M^2 = E^2 - c^2$. Тут ми спробуємо подолати цю проблему внутрішньою модифікацією моделі.

Найпростіший шлях отримати у правій частині (6.60) від'ємну сталу — розглядати маси частинок m_1

і m_2 як комплексно-спряжені величини. Проте це порушує ермітовість 2ЧРД.

У нерелятивістських потенціяльних моделях енерґія рівнів понижується введенням сталої від'ємної поправки до потенціялу [56]. На рівні 2ЧРД зі скалярною взаємодією це відповідає заміні потенціялу 6.2 на

$$u_{\rm s}(r) = ar + u_0, \tag{6.61}$$

де $u_0 = -0.76$ҐеВ (в [56] дано й теоретичне обґрунтування введення u_0 із цим значенням). Очевидно, однак, що в 2ЧРД з мінімальною взаємодією параметр u_0 можна скомпенсувати перенормуванням мас $m_a \to \tilde{m}_a = m_a + u_0/2$.

Натомість уведення кулонівської векторної взаємодії (будь-якої — статичної, Единґтона–Ґанта або Брайта) зсуває всі траєкторії вліво на величину

$$\begin{aligned}&\Delta E^2 = -\zeta\sqrt{2}\alpha a,\\ &\zeta^{(\rm st)} = 2, \quad \zeta^{(\rm EG)} = 3, \quad \zeta^{(\rm B)} = 5/2\end{aligned} \tag{6.62}$$

і при досить великій α забезпечить умову $E^2_{\downarrow -}(j{=}0, n_r{=}0) < 0$.

На рис. 5 показано траєкторії Редже для мінімального лінійного потенціялу зі статичною кулонівською поправкою, отримані при оптимальних значеннях параметрів: $a = 0.228$ҐеВ^2, $\alpha = 2.7$, $m_1 = m_2 = 0.275$ҐеВ. Картина в цілому подібна на ту, що одержана в межах моделі III (рис. 4), з відмінностями у відтворенні радіяльних збуджень (на дочірніх траєкторіях). Слід, однак, відзначити занадто великі значення для α та m_a. Зокрема маси кварків близькі до конституентних значень.

Взаємодія Брауна–Рейвенгола. Як зазначено в [29], 2ЧРД з потенціялом (6.10), (6.2) не має розв'язків для зв'язаних станів через особливості поведінки функцій $W_{\updownarrow}(r, E, j)$ при $r \to \infty$. У методі $1/j$ визначальною є локальна поведінка $W_{\updownarrow}(r, E, j)$ в околі $r_c(j)$, $E_c(j)$, яка в цьому разі забезпечує існування квазізв'язаних станів. Їхній спектр обчислюється, як і в попередніх випадках:

$$\begin{aligned}E^2_{\updownarrow +} &= \frac{1}{128}\left(7+\sqrt{17}\right)^2\sqrt{23-\sqrt{17}}\,a\left(j+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\left(\sqrt{17}-3\right)\sqrt{102+26\sqrt{17}}\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\right)\\ &\quad+\frac{1}{8}\left(3+\sqrt{17}\right)\left(23-\sqrt{17}\right)^{\frac{1}{4}} m_+\sqrt{2aj}+\frac{9}{8}\left(1+1/\sqrt{17}\right)m_+^2-2m_1m_2\\ &\quad\approx 4.2a(j+\frac{1}{2}+2.03(n_r+\frac{1}{2}))+1.86m_+\sqrt{2aj}+1.4m_+^2-2m_1m_2,\\ E^2_{\updownarrow -} &= E^2_{\updownarrow +}\pm\frac{1}{128}\left(7+\sqrt{17}\right)^2\sqrt{23-\sqrt{17}}\,a\approx E^2_{\updownarrow +}\pm 4.2a.\end{aligned} \tag{6.63}$$

Одержані вирази з незначною різницею в чисельних коефіцієнтах подібні до випадку мінімальної взаємодії. Відміна полягає в тому, що тут ℓs-виродження є *точним*, а випадкове — наближеним, з точністю 3%σ, де параметр нахилу $\sigma = 4.2a = 1.05 \div 1.26$ GeV також добре узгоджується з експериментом.

Так само виконується нерівність $E^2_{\downarrow -}(j{=}0, n_r{=}0) > 0$, яку не можна змінити на протилежну використанням потенціялу (6.61) замість (6.2), оскільки це еквівалентно перенормуванню мас у формулах (6.63) (складнішому, ніж у попередньому випадку). Спільний для всіх траєкторій зсув, необхідний для опису (π-ρ)-сімейства, знову досягається введенням кулонівської статичної поправки до взаємодії:

$$\Delta^{(\rm st)}E^2 = -\frac{1}{4}\left(7+\sqrt{17}\right)\alpha a \approx -2.78\alpha a. \tag{6.64}$$

Траєкторії Редже для цього випадку, отримані при оптимальних значеннях параметрів: $a = 0.225$ ГеВ^2, $\alpha = 2.85$, $m_1 = m_2 = 0.265$ ГеВ, узгоджуються з (π-ρ)-спектром. Вони майже збігаються з тими, що для мінімальної взаємодії (рис. 5), різниця з'являється між дочірніми траєкторіями зі збільшенням n_r. На рис. 6 вони порівнюються між собою і з траєкторіями моделі III (див. рис. 4) у координатах (E^2, ℓ).

Використання інших кулонівських поправок (Единґтона–Ґанта або Брайта) у комбінації з лінійним потенціялом Брауна–Рейвенгола приводить до додаткового розщеплення траєкторій (нелінійного за α), яке погіршує відповідність з (π-ρ)-даними і тут не подається.

Інші взаємодії. Потенціял Брауна–Рейвенгола (6.10) можна розглядати як суперпозицію юкавської (6.6), мінімальної (6.7) та статичної (6.3) взаємодій. Якщо перші дві розглядають як скалярні, то статична є спрощеним описом векторної взаємодії. Тому цікаво поглянути, чи лінійні потенціяли векторного типу забезпечують конфайнмент і який дають спектр.

Лінійний статичний потенціял (6.3), (6.2) дає асимптотично лінійні паралельні траєкторії:

$$E^2_{\updownarrow\pm} = 8a\left(j+\frac{1}{2}+\sqrt{2}\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\right)+4(m_1^2+m_2^2) \tag{6.65}$$

без випадкового і ℓs-виродження (замість останнього є j-виродження), а параметр нахилу $\sigma = 8a$ вдвічі більший від того, що узгоджується з нерелятивістськими моделями.

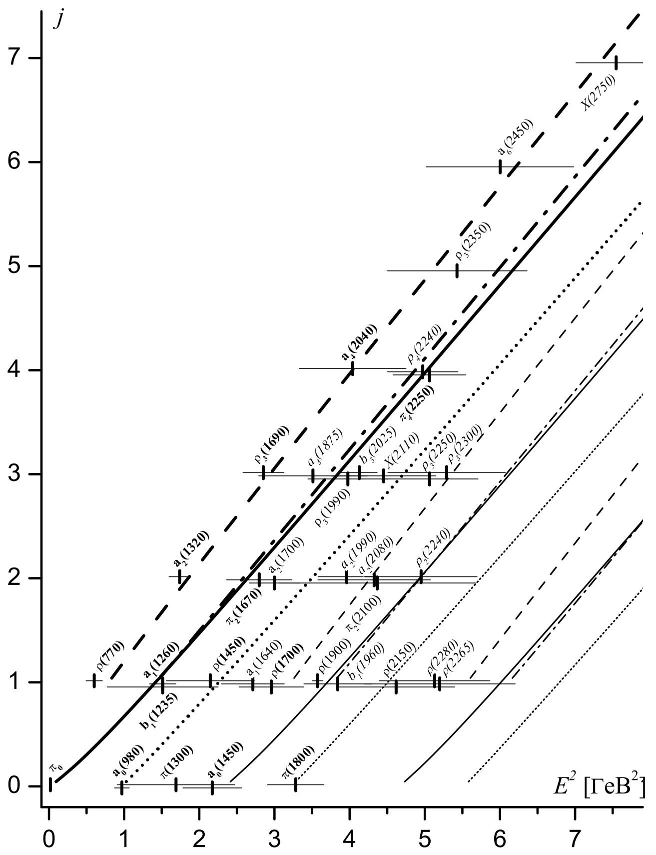

Рис. 4. Спектр π- та ρ-мезонів і оптимальні траєкторії Редже моделі III. Назви найбільш надійно встановлених резонансів подано товстим шрифтом, деяких найменш надійно встановлених — курсивом. Тонкі горизонтальні лінії вказують ширини резонансів.

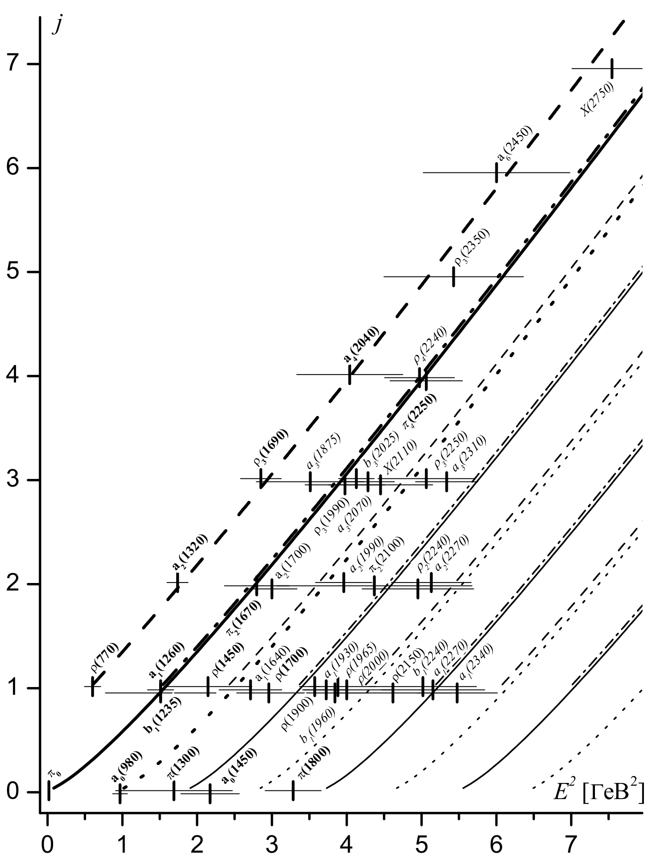

Рис. 5. Спектр π- та ρ-мезонів і оптимальні траєкторії Редже для мінімального лінійного + кулонівського статичного потенціялів. Позначення такі ж, як на рис. 4.

Лінійний потенціял Матвєєва–Мурадяна–Тавхелідзе (6.11), (6.2), що є півсумою юкавського та статичного, приводить до якісно подібного результату:

$$E^2_{\updownarrow\pm} = 3\sqrt{3}a\left(j+\frac{1}{2}+\sqrt{3}\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\right)+5m_+^2-2m_1m_2 \tag{6.66}$$

Цікаво, що 2ЧРД із цим потенціялом (так само, як з мінімальним) вважалося в [29] добрим кандидатом на релятивістську потенціяльну модель.

Лінійний потенціял Единґтона–Ґанта (6.4), (6.2) має ті ж недоліки, що й два попередні, і дає непаралельні траєкторії:

$$\begin{aligned} E^2_{\uparrow\pm} &= 12\sqrt{3}a\left(j+\frac{1}{2}+\sqrt{3}\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\right) \\ &\quad+\frac{15}{8}(m_1^2+m_2^2)\pm\frac{3}{4}m_1m_2, \\ E^2_{\downarrow\pm} &= 16a\left(j+\frac{1}{2}+\sqrt{2}\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\right)+2(m_1^2+m_2^2). \end{aligned} \tag{6.67}$$

Таку ж властивість має і лінійний потенціял Брайта.

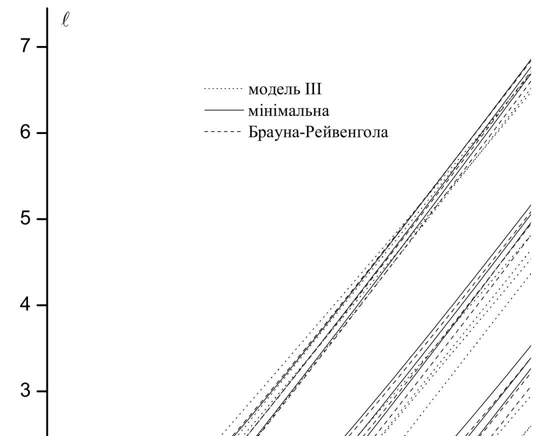

Рис. 6. Траєкторії Редже для мінімального потенціялу, потенціялу Брауна–Рейвенгола та моделі III.

VII. ВИСНОВКИ

У нашій статті розглянуто 2ЧРД зі загальним обертово-інваріянтним локальним (у координатному просторі) потенціялом, який запропонували Нікітін та Фущич у [31]. Він параметризується 48-ма (дійсними за умови ермітовости) функціями від r і тут представлений у компактному матричному вигляді. Завдяки обертовій інваріянтності рівняння здійснено його радіяльну редукцію, що приводить до системи 8-ми пов'язаних між собою звичайних диференціяльних рівнянь 1-го порядку для радіяльних компонент хвильової функції. Матриця коефіцієнтів біля похідних є виродженою. Це дає змогу виразити половину компонент хвильової функції через решту, для якої отримуємо невироджену систему 4-х рівнянь 1-го порядку, а потім — 2-х рівнянь 2-го порядку. У коефіцієнтах цих систем, як правило, з'являються нефізичні особливості — полюси в деяких залежних від енерґії точках r_E (відсутні у вихідному потенціялі), які роблять звичайну краєву задачу (з умовами в точках $r = 0, \infty$) математично некоректною. Зміна краєвих умов (шляхом, наприклад, перенесення їх у точки r_E) може привести до відсутности зв'язаних станів для утримуючих (з інтуїтивного погляду) потенціялів.

Структура радіяльної системи 2-го порядку дозволяє вказати широкий клас потенціялів (параметризований 14-ма функціями), вільних від нефізичних особливостей. У цьому класі знайдено сім'ю точно розв'язуваних моделей, що узагальнюють відомі діраківські осцилятори [32–34] і служать основою для релятивістської потенціяльної моделі мезонів. Одну з них — 4-параметричну модель III — використано для опису (π-ρ)-сім'ї. Отримано відповідні траєкторії Редже: вони є асимптотично паралельними прямими, але помітно викривленими в нижній частині.

Модель III добре описує стани на головних траєкторіях, гірше — на дочірніх. Причиною цього, мабуть, є брак дочірніх траєкторій, що відповідає асимптотичному виродженню спектра $(j + 2n_r)$-типу. Можна сподіватися, що більш принагідним було б виродження $(j + n_r)$-типу, яке поки що не вдається отримати в межах 2ЧРД. Модель III, крім того, не придатна для опису важких мезонів, оскільки в нерелятивістській межі міжкварковий потенціял зникає.

2ЧРД з потенціялами скалярного та векторного типу вважаються фізично змістовнішими кандидатами на релятивістські потенціяльні моделі. Кілька версій таких потенціялів, локальних у координатному зображенні, відомі з літератури. Однак відповідні 2ЧРД не є точно інтеґрованими і загалом мають згадані вище нефізичні особливості. Щоб обійти ці труднощі і використати 2ЧРД-моделі в релятивістській задачі про зв'язані стани, запропоновано наближений метод $1/j$-розкладів. З технічного погляду він ґрунтується на $1/\ell$-методі і узагальнює його для двох зв'язаних рівнянь, зведених попередньо до матрично-двочленного вигляду і нелінійно залежних від спектрального параметра. З фізичного погляду метод застосовний до сильного зв'язку і нечутливий, принаймні в нижніх порядках теорії збурень, до крайових особливостей задачі.

Метод $1/j$-розкладів застосовано тут до 2ЧРД з кількома версіями скалярного лінійного та векторного кулонівського потенціялів, відомих із літератури. Усі вони дають у нерелятивістській межі корнельський потенціял, що використовується для опису важких мезонів. Тому ці приклади можуть претендувати на роль універсальних потенціяльних моделей.

Отримано аналітичні вирази для спектра енерґії в 0-му наближенні методу, які описують прямі або дещо викривлені паралельні траєкторії Редже. Кут їх нахилу узгоджується з параметрами нерелятивістської моделі для всіх версій скалярного лінійного потенціялу, окрім потенціялу Матвєєва–Мурадяна–Тавхелідзе (6.11), (6.2) (запропонованого в [29] для опису легких мезонів). Цей останній, як і лінійний потенціял Юкави (6.6), (6.2), не дає ℓs-виродження траєкторій. Воно наближено забезпечується мінімальним лінійним потенціялом (6.7), (6.2), а точно — потенціялом Брауна–Рейвенгола (6.10), (6.2). В обох випадках ℓs-виродження, а також деяка кривина головних траєкторій Редже, дає хороший опис орбітально збуджених станів (π-ρ)-сім'ї мезонів. Однак випадкове виродження $(j + 2n_r)$-типу приводить до браку дочірніх траєкторій (як і в моделі III) для деяких радіяльних збуджень цієї сім'ї.

Моделі з векторними лінійними потенціялами взагалі не забезпечують випадкового виродження, дають завеликий нахил траєкторій Редже, а деякі з них породжують непаралельні траєкторії.

Спектр для мінімальної лінійної взаємодії цілком узгоджується з отриманими раніше чисельними результатами в [12–14], де, однак, для легких мезонів одержано завищені значення мас. В даній роботі показано, що ця проблема усувається врахуванням векторної кулонівської взаємодії. Щодо лінійного потенціялу Брауна–Рейвенгола, то в строгому математичному сенсі він не дає зв'язаних станів через невідповідну поведінку коефіцієнтів радіяльних рівнянь при $r \to \infty$ [29]. Отриманий тут псевдопертурбативний спектр описує квазізв'язані стани, які утримує ефективний потенціяльний бар'єр (що зводиться до ями в нерелятивістській межі).

ПОДЯКИ

Автор вдячний д. ф.-м. н. В. І. Третякові та к. ф.-м. н. Ю. Г. Яремкові за корисне обговорення роботи.

ДОДАТОК А. МАТРИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ БІСПІНОРНИХ ГАРМОНІК

Біспінорні гармоніки в 2×2-матричному представленні:

$$\phi^A(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_j^\mu(\mathbf{n}) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\phi^0(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2j(j{+}1)}} \times \begin{bmatrix} -\sqrt{(j{-}\mu{+}1)(j{+}\mu)}\, Y_j^{\mu-1} & \mu\, Y_j^\mu \\ \mu\, Y_j^\mu & \sqrt{(j{+}\mu{+}1)(j{-}\mu)}\, Y_j^{\mu+1} \end{bmatrix},$$

$$\phi^-(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2(j{+}1)(2j{+}3)}} \times \begin{bmatrix} \sqrt{(j{-}\mu{+}1)(j{-}\mu{+}2)} Y_{j+1}^{\mu-1} & -\sqrt{(j{+}\mu{+}1)(j{-}\mu{+}1)} Y_{j+1}^{\mu} \\ -\sqrt{(j{+}\mu{+}1)(j{-}\mu{+}1)} Y_{j+1}^{\mu} & \sqrt{(j{+}\mu{+}1)(j{+}\mu{+}2)} Y_{j+1}^{\mu+1} \end{bmatrix},$$

$$\phi^+(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2j(2j{-}1)}} \times \begin{bmatrix} \sqrt{(j{+}\mu{-}1)(j{+}\mu)}\, Y_{j-1}^{\mu-1} & \sqrt{(j{+}\mu)(j{-}\mu)}\, Y_{j-1}^{\mu} \\ \sqrt{(J{+}\mu)(j{-}\mu)}\, Y_{j-1}^{\mu} & \sqrt{(j{-}\mu{-}1)(j{-}\mu)}\, Y_{j-1}^{\mu+1} \end{bmatrix},$$

(A.1)

де $Y_\ell^\mu(\mathbf{n})$ $(\mu = -\ell, ..., \ell)$ — сферичні гармоніки.

Основні властивості біспінорних гармонік:

$$\langle i|k\rangle = \int d\mathbf{n}\, \mathrm{Tr}(\phi_i^\dagger\, \phi_k) = \delta_{i\,k},$$

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\mathbf{j}^2\phi &=& j(j+1)\phi, & j &=& 0,1,...,\\
j_3\phi &=& \mu\phi, & \mu &=& -j,...,j,\\
\boldsymbol{\ell}^2\phi^i &=& \ell(\ell+1)\phi^i, & \ell &=& \left\{\begin{array}{ll} j, & i=A,0,\\ j\pm 1, & i=\mp,\end{array}\right.\\
\mathbf{s}^2\phi^i &=& s(s+1)\phi^i, & s &=& \left\{\begin{array}{ll} 0, & i=A,\\ 1, & i=0,\mp,\end{array}\right.\\
P\phi^{A,0} &=& (-)^j\phi^{A,0}, & P\phi^{\mp} &=& (-)^{j+1}\phi^{\mp},\\
\left[\phi^A\right]^{\mathrm{T}} &=& -\phi^A, & \left[\phi^{0,\mp}\right]^{\mathrm{T}} &=& \phi^{0,\mp}.
\end{array} \tag{A.2}$$

Дія спінових операторів на біспінорні дублети:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\hat{\mathrm{o}} &=& \tau\hat{\mathrm{o}}, & \boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\hat{\mathrm{e}} &=& \hat{\mathrm{e}},\\
\sigma_{1r}\hat{\mathrm{o}} &=& \mathrm{R}^{\mathrm{T}}\hat{\mathrm{e}}, & \sigma_{1r}\hat{\mathrm{e}} &=& \mathrm{R}\hat{\mathrm{o}},\\
\sigma_{2r}\hat{\mathrm{o}} &=& -\sigma_3\mathrm{R}^{\mathrm{T}}\hat{\mathrm{e}}, & \sigma_{2r}\hat{\mathrm{e}} &=& -\mathrm{R}\sigma_3\hat{\mathrm{o}},\\
\sigma_{1r}\sigma_{2r}\hat{\mathrm{o}} &=& -\sigma_3\hat{\mathrm{e}}, & \sigma_{1r}\sigma_{2r}\hat{\mathrm{e}} &=& -\mathrm{R}\sigma_3\mathrm{R}^{\mathrm{T}}\hat{\mathrm{o}},\\
(\mathbf{n},\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2)\hat{\mathrm{o}} &=& -2\mathrm{i}\sigma_\uparrow\mathrm{R}^{\mathrm{T}}\hat{\mathrm{e}}, & (\mathbf{n},\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2)\hat{\mathrm{e}} &=& 2\mathrm{i}R\sigma_\uparrow\hat{\mathrm{e}}
\end{array} \tag{A.3}$$

ДОДАТОК B. ОРТОГОНАЛЬНЕ ПЕРЕВОРЕННЯ ПОТЕНЦІЯЛІВ

Матрицю $\mathbf{O}$ зручно подати у вигляді

$$\mathbf{O} = \mathbf{O}_2\mathbf{O}_1, \tag{B.1}$$

де блок-діягональна матриця (залежна від P):

$$\mathbf{O}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & & & \\ & \sigma_3\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & & \\ & & -\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & \\ & & & -\sigma_3 \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad P = (-)^{j\pm 1}, \quad (\mathrm{B}.2) \qquad \mathbf{O}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_3\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & & & \\ & \mathrm{I} & & \\ & & -\sigma_3 & \\ & & & -\mathrm{R}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad P = (-)^{j} \quad (\mathrm{B}.3)$$

тривіялізує блоки в $\mathbf{H}$ (та інших матрицях):

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{O}_1\mathbf{H}\mathbf{O}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{I} & \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & 0 & 0 & -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 & 0 & \mathrm{I} \\ 0 & \mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 \end{bmatrix}, \tag{B.4}$$

а

$$\mathbf{O}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & -\mathrm{I} \\ 0 & -\mathrm{I} & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & 0 & 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad P = (-)^{j\pm 1}, \quad (\mathrm{B}.5) \qquad \mathbf{O}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & 0 & 0 & -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 & 0 & -\mathrm{I} \\ 0 & \mathrm{I} & \mathrm{I} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad P = (-)^{j} \quad (\mathrm{B}.6)$$

зводить $\tilde{\mathbf{H}}$ до канонічного вигляду (4.2). Крім цього, $\mathbf{O}_1$ та $\mathbf{O}_2$ вибрані так, що зводять $\mathbf{G}$ до незалежного від P вигляду:

$$\bar{\mathbf{G}} = 2 \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{\uparrow} & C\sigma_1 & 0 \\ \sigma_{\uparrow} & 0 & 0 & 0 \\ C\sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{B.7}$$

Інші матриці:

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} & & & \mu \\ & & -\nu & \\ & -\nu & & \\ \mu & & & \end{bmatrix}, \tag{B.8}$$

де $\mu = m_{\pm}$ і $\nu = m_{\mp}$ для $P = \mp(-)^j$; власні потенціяли: $\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{\Delta}}\bar{\mathbf{S}}$, де

$$\bar{\mathbf{\Delta}} = \begin{bmatrix} U_1 + U_5\sigma_3 & 0 & 0 & U_3 + \mathrm{i}U_7\sigma_3 \\ 0 & U_2 + U_6\sigma_3 & U_4 + \mathrm{i}U_8\sigma_3 & 0 \\ 0 & U_4 - \mathrm{i}U_8\sigma_3 & U_2 - U_6\sigma_3 & 0 \\ U_3 - \mathrm{i}U_7\sigma_3 & 0 & 0 & U_1 - U_5\sigma_3 \end{bmatrix} \tag{B.9}$$

для $P = (-)^{j\pm 1}$,

$$\bar{\mathbf{\Delta}} = \begin{bmatrix} U_2 + U_6\sigma_3 & 0 & 0 & -U_4 - \mathrm{i}U_8\sigma_3 \\ 0 & U_1 + U_5\sigma_3 & -U_3 - \mathrm{i}U_7\sigma_3 & 0 \\ 0 & -U_3 + \mathrm{i}U_7\sigma_3 & U_1 - U_5\sigma_3 & 0 \\ -U_4 + \mathrm{i}U_8\sigma_3 & 0 & 0 & U_2 - U_6\sigma_3 \end{bmatrix} \tag{B.10}$$

для $P = (-)^j$, де

$$\begin{aligned} U_1 &= \tfrac{1}{2}(U_{11} + U_{44}), & U_5 &= \tfrac{1}{2}(W_{14} + \overset{*}{W}_{14}), \\ U_2 &= \tfrac{1}{2}(U_{22} + U_{33}), & U_6 &= \tfrac{1}{2}(W_{23} + \overset{*}{W}_{23}), \\ U_3 &= \tfrac{1}{2}(U_{11} - U_{44}), & U_7 &= \tfrac{1}{2}i(W_{14} - \overset{*}{W}_{14}), \\ U_4 &= \tfrac{1}{2}(U_{22} - U_{33}), & U_8 &= -\tfrac{1}{2}i(W_{23} - \overset{*}{W}_{23}), \end{aligned} \tag{B.11}$$

а

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{S}} & & & \\ & \bar{\Sigma} & & \\ & & \bar{\Sigma} & \\ & & & \bar{\mathrm{S}} \end{bmatrix} \quad \text{для всіх } P, \tag{B.12}$$

де

$$\bar{\mathrm{S}} = \mathrm{S}|_{\mathrm{R=I}}, \quad \bar{\Sigma} = \Sigma|_{\mathrm{R=I}}: \quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline i & 1 & 2 & 3 \\ \hline S_{(i)} & I & \boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2 & (\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{n}) \\ \hline \bar{\mathrm{S}}_{(i)} & \mathrm{I} & \tau & -\sigma_3 \\ \hline \bar{\Sigma}_{(i)} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & -\sigma_3 \\ \hline \end{array}; \tag{B.13}$$

невласні потенціяли: $\bar{\mathbf{U}} = \bar{\boldsymbol{\Omega}}\bar{\mathbf{T}}$, де

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & W_3 + W_4\sigma_3 & W_1 - W_2\sigma_3 & 0 \\ \overset{*}{W}_3 + \overset{*}{W}_4\,\sigma_3 & 0 & 0 & \overset{*}{W}_1 + \overset{*}{W}_2\,\sigma_3 \\ \overset{*}{W}_1 - \overset{*}{W}_2\,\sigma_3 & 0 & 0 & \overset{*}{W}_3 - \overset{*}{W}_4\,\sigma_3 \\ 0 & W_1 + W_2\sigma_3 & W_3 - W_4\sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

для $P = (-)^{j\pm1}$,

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\overset{*}{W}_3 - \overset{*}{W}_4\,\sigma_3 & \overset{*}{W}_1 + W_2\sigma_3 & 0 \\ -W_3 - W_4\sigma_3 & 0 & 0 & W_1 - W_2\sigma_3 \\ W_1 + W_2\sigma_3 & 0 & 0 & -W_3 + \overset{*}{W}_4\,\sigma_3 \\ 0 & \overset{*}{W}_1 - \overset{*}{W}_2\,\sigma_3 & -\overset{*}{W}_3 + \overset{*}{W}_4\,\sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.15}$$

для $P = (-)^j$, де

$$\begin{aligned} W_1 &= \tfrac{1}{2}(W_{13} - \overset{*}{W}_{24}), \quad & W_2 &= \tfrac{1}{2}(W_{12} - \overset{*}{W}_{34}), \\ W_3 &= \tfrac{1}{2}(W_{13} + \overset{*}{W}_{24}), \quad & W_4 &= \tfrac{1}{2}(W_{12} + \overset{*}{W}_{34}), \end{aligned} \tag{B.16}$$

а

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{T}} & & & 0 \\ & -\bar{\mathrm{T}}^\dagger & & \\ & & -\bar{\mathrm{T}}^\dagger & \\ 0 & & & \bar{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \quad \text{для усіх } P, \tag{B.17}$$

де

$$\bar{\mathrm{T}} = \mathrm{T}|_{\mathrm{R=I}}: \quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline i & 1 & 2 & 3 \\ \hline T_{(i)} & \boldsymbol{\sigma}_1\cdot\mathbf{n} & \boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{n} & (\mathbf{n},\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2) \\ \hline \bar{\mathrm{T}}_{(i)} & \mathrm{I} & -\sigma_3 & -2\mathrm{i}\sigma_\uparrow \\ \hline \end{array}. \tag{B.18}$$

ДОДАТОК C. ОБЧИСЛЕННЯ АСИМПТОТИК ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ПОТЕНЦІЯЛІВ

Припустімо, що в рівнянні Тодорова з лінійним скалярним та кулонівським векторним потенціялами функції $r_c(\ell)$ та $E_c(\ell)$ справді є монотонно-зростаючими (якщо це було б не так, то рано чи пізно виникла б суперечність). Тоді для обчислення асимптотик $r_\infty(\ell)$ та $E_\infty(\ell)$ у функції $W(r,E,\ell)$ (заданій формулами (6.1), (6.2), (6.37), (6.38)) досить залишити її головні члени, знехтувавши кулонівською взаємодією та масами спокою частинок:

$$W \sim -\frac{1}{4}E^2 + a^2r^2 + \frac{\ell^2}{r^2}. \tag{C.1}$$

Із рівнянь $W = 0$ та

$$\frac{\partial W}{\partial r} \sim 2\left(a^2 r - \frac{\ell^2}{r^3}\right) = 0 \tag{C.2}$$

(див. (6.16)–(6.17)) відразу отримуємо шукані асимптотики:

$$r_\infty = \sqrt{\ell/a} = 1/(\sqrt{a}\lambda), \qquad E_\infty = 2\sqrt{2a\ell} \quad \Longrightarrow \quad b_\infty = 2a/\lambda^2. \tag{C.3}$$

Подібно діємо у випадку 2ЧРД з будь-яким із указаних у розділі VI лінійним скалярним та кулонівським векторним потенціялами (або їх суперпозицією). Знехтувавши у функціях $W_\uparrow$ та $W_\downarrow$ масами та кулонівською взаємодією і зберігши головні члени, отримаємо для них таку загальну структуру:

$$W \sim -\frac{1}{4}(E + \varkappa_1 ar)\left(E + \varkappa_2 ar - \frac{(\varkappa_0 ar)^2}{E + \varkappa_3 ar}\right) + \frac{j^2}{r^2}, \tag{C.4}$$

де безрозмірні коефіцієнти $\varkappa_n$ $(n = 0, ..., 3)$ залежать від спінової структури потенціялу і, взагалі кажучи, є різними для різних функцій $W_{\updownarrow\pm}$. Після заміни змінних :

$$r_\infty = z\sqrt{j/a}, \qquad E_\infty = y\sqrt{aj} \tag{C.5}$$

рівняння (6.16)–(6.17) із функцією (C.4) набирають вигляду:

$$\frac{1}{4}\left[y + \varkappa_1 z\right]\left[y + \varkappa_2 z - \frac{\varkappa_0^2 z^2}{y + \varkappa_3 z}\right] - \frac{1}{z^2} = 0, \tag{C.6}$$

$$\frac{1}{4}\varkappa_1 z\left[y + \varkappa_2 z - \frac{\varkappa_0^2 z^2}{y + \varkappa_3 z}\right] + \frac{1}{4}\left[y + \varkappa_1 z\right]\left[\varkappa_2 z - 2\frac{\varkappa_0^2 z^2}{y + \varkappa_3 z} + \frac{\varkappa_0^2 \varkappa_3 z^3}{(y + \varkappa_3 z)^2}\right] + \frac{2}{z^2} = 0. \tag{C.7}$$

Із них після нескладних викладок можна отримати рівняння

$$\left[2t + 3\varkappa_1\right]\left[t + \varkappa_3\right]\left[(t + \varkappa_2)(t + \varkappa_3) - \varkappa_0^2\right] + \left[t + \varkappa_1\right]\left[\varkappa_2(t + \varkappa_3)^2 - 2\varkappa_0^2(t + \varkappa_3) + \varkappa_0^2\varkappa_3\right] = 0 \tag{C.8}$$

на змінну $t = y/z$, яке є алґебраїчним рівнянням 4-го степеня. Тоді з рівняння (C.6) можна одержати вирази для шуканих величин z і y у термінах розв'язку t рівняння (C.8):

$$z = \sqrt[4]{\frac{4(t + \varkappa_3)}{(t + \varkappa_1)\left[(t + \varkappa_2)(t + \varkappa_3) - \varkappa_0^2\right]}}, \qquad y = tz. \tag{C.9}$$

Серед усіх розв'язків рівняння (C.8) треба залишити фізичні: вони повинні задовольняти нерівності $t > 0$, $t + \varkappa_n > 0$ $(n = 1, 2, 3)$, необхідні для існування зв'язаного стану в нерелятивістській межі, а також умову (6.18) (яка в термінах t є громіздкою, і ми її тут не подаємо). В усіх розглянутих у нашій статті випадках ці умови визначають розв'язок t однозначно.

---

[1] G. Breit, Phys. Rev. **34**, 553 (1929).
[2] H. A. Bethe, E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms* (Berlin–Göttingen–Heidelberg, Springer-Verlag, 1957).
[3] A. S. Eddington, Proc. R. Soc. London, Ser. A **122**, 358 (1929).
[4] J. A. Gaunt, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A **228**, 151 (1929); Proc. R. Soc. London, Ser. A **122**, 513 (1929).
[5] J. W. Darewych, L. Di Leo, J. Phys. A **29**, 6817 (1996).
[6] A. O. Barut, S. Komy, Fortschr. Phys. **33**, 309 (1985).
[7] A. O. Barut, N. Ünal, Physica A **142**, 467 (1987).
[8] W. T. Grandy Jr., *Relativistic Quantum Mechanics of Leptons and Fields* (Dordrecht–Boston–London, Kluwer Academic Publishers, 1991).
[9] W. Krolikowski, Acta Phys. Pol. B **7**, 485 (1976).
[10] R. W. Childers, Phys. Rev. D **36**, 606 (1987).
[11] D. D. Brayshaw, Phys. Rev. D **36**, 1465 (1987).
[12] R. Ceuleneer, P. Legros, C. Semay, Nucl. Phys. A **532**, 395c (1991).
[13] C. Semay, R. Ceuleneer, B. Silvestre-Brac, J. Math. Phys. **34**, 2215 (1993).
[14] C. Semay, R. Ceuleneer, Phys. Rev. D **48**, 4361 (1993).
[15] G. D. Tsibidis, e-Print hep-ph/0007143 (2000).
[16] M. Moshinsky, A. G. Nikitin, Revista Mexicana de Física **50**, 66 (2005).
[17] І. В. Симоног, О. І. Туровський, Укр. фіз. журн. **46**, 391 (2001).
[18] І. В. Симоног, О. І. Туровський, Журн. фіз. досл. **8**, 23 (2004).
[19] H. Sazdjian, Phys. Rev. D **33**, 3401 (1986).
[20] H. W. Crater, P. Van Alstine, Phys. Rev. D **36**, 3007 (1987).
[21] J. W. Darewych, Cond. Matt. Phys. **1**, 593 (1998).
[22] J. W. Darewych, A. Duviryak, Phys. Rev. A **66**, 032102-1 (2002).
[23] A. Duviryak, J. W. Darewych, Central Europ. J. Phys. **3**, 1 (2005).
[24] E. E. Salpeter, H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
[25] E. E. Salpeter, Phys. Rev. **87**, 328 (1952).
[26] R. N. Faustov, Nucl. Phys. **75**, 669 (1966).
[27] V. A. Matveev, R. M. Muradyan, A. N. Tavkhelidze, Communications of the Joint Institute for Nuclear Physics, E2–3498 (Dubna, 1967).
[28] А. А. Хелашвили, Сообщения Объединенного института ядерных исследований, Р2–4327 (Дубна, 1969).
[29] А. А. Хелашвили, Теор. мат. физ. **51**, 201 (1982).
[30] H. W. Crater, C. W. Wong, C.-Y. Wong, Int. J. Mod. Phys. E **5**, 589 (1996).
[31] А. Г. Никитин, В. И. Фущич, Теор. мат. физ. **88**, 406 (1991).

[32] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, J. Phys. A **22**, L817 (1989).
[33] M. Moshinsky, G. Loyola, C. Villegas J. Math. Phys. **32**, 373 (1991).
[34] M. Moshinsky, C. Quesne, Yu. F. Smirnov, J. Phys. A **28**, 6447 (1995).
[35] L.D. Mlodinov, M. P. Shatz, J. Math. Phys. **25**, 943 (1984).
[36] T. Imbo, A. Pagnamenta, U. Sukhatme, Phys. Rev. D **29** 1669 (1984).
[37] I. O. Vakarchuk, J. Phys. Stud. **6**, 46 (2002).
[38] O. Mustafa, T. Barakat, Commun. Theor. Phys. **28**, 257 (1997).
[39] O. Mustafa, T. Barakat, Commun. Theor. Phys. **29**, 587 (1998).
[40] Z. V. Chraplyvy, Phys. Rev. **91**, 388 (1953).
[41] Е. Б. Бердников, Г. П. Пронько, Теор. мат. физ. **54**, 763 (1991).
[42] C. Goebel, D. LaCourse, M. G. Olsson, Phys. Rev. D **41**, 2917 (1990).
[43] T. Takabayasi, Prog. Theor. Phys. **42**, 423 (1969).
[44] T. Takabayasi, Prog. Theor. Phys. **42**, 1210 (1969).
[45] T. Takabayasi, Prog. Theor. Phys. **61**, 1235 (1979).
[46] Y. S. Kim, M. E. Noz, Phys. Rev. D **8**, 3521 (1973).
[47] S. Ishida, M. Oda, Nuovo Cimento A **107**, 2519 (1994).
[48] Yu. A. Simonov, Nuovo Cimento A **107**, 2629 (1994).
[49] В. В. Хрущев, Яд. физ. **46**, 219 (1987).
[50] V. V. Khruschev, preprint IHEP 87–9 (Serpukhov, 1987).
[51] A. Duviryak, Int. J. Mod. Phys. A **14**, 4519 (1999).
[52] A. Duviryak, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 2771 (2001).
[53] V. I. Borodulin, M. S. Plyushchay, G. P. Pron'ko, Z. Phys. C **41**, 293 (1988).
[54] A. Inopin, G. S. Sharov, Phys. Rev. D **63**, 054023-1 (2001).
[55] W.-M. Yao *et al.*, J. Phys. G **33**, 1 (2006).
[56] W. Lucha, F. F. Schoberl, D. Gromes, Phys. Rep. **200**, 127 (1991).
[57] A. Duviryak, J. Phys. G **28**, 2795 (2002).
[58] G. E. Brown, D. G. Ravenhall, Proc. R. Soc. London Ser. A **208**, 552 (1951).
[59] G. Feldman, Th. Fulton, J. Townsend, Phys. Rev. A **8**, 1149 (1973).
[60] I. T. Todorov, Phys. Rev. D **3**, 2351 (1971).
[61] V. A. Rizov, H. Sazdian, I. T. Todorov, Ann. Phys. (NY) **165**, 59 (1985).

APPLICATION OF TWO-BODY DIRAC EQUATION IN MESON SPECTROSCOPY

A. Duviryak
Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
1 Svientsitskii St., UA–79011 Lviv, Ukraine

The two-body Dirac equation with the general local potential is reduced to a pair of ordinary second-order differential equations for radial components of the wave function. The class of special potentials is found for which the equation possesses exact solutions. For other cases the pseudo-perturbative $1/j$-expansion method is proposed. Several models of light mesons are constructed and exact and approximate energy spectra are calculated. They are compared with experimental data.