ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 11, № 1 (2007) с. 41–44

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 11, No. 1 (2007) p. 41–44

РІВНЯННЯ ПОЛЯ В ДЕФОРМОВАНОМУ ПРОСТОРІ З МІНІМАЛЬНОЮ ДОВЖИНОЮ

В. М. Ткачук
Кафедра теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка, вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна
(Отримано 20 березня 2007 р.)

Розглянуто один із можливих варіянтів побудови рівнянь електродинаміки й рівняння Дірака у просторі з деформованою Пуанкаре-коваріянтною алґеброю Гайзенберґа. Цікаво зауважити, що отримані рівняння для електромагнетного поля збігаються з рівняннями узагальненої електродинаміки з вищими похідними. Досліджено вільний рух релятивістського електрона в деформованому просторі й виявлено, що закон дисперсії в лінійному наближенні за параметрами деформації відрізняється від недеформованого випадку тільки заміною маси на ефективну, яка, як показують оцінки, дуже близька до "голої" маси електрона.

Ключові слова: деформована алґебра Гайзенберґа, електромагнетне поле, рівняння Дірака.

PACS number(s): 02.40.Gh, 03.65.Pm

Присвячую моєму Вчителеві професору І. О. Вакарчукові з нагоди його 60-річчя

I. ВСТУП

Історія, пов'язана з квантованим простором, є досить старою. Першою публікацією на цю тему була робота Шнайдера [1], у якій запропоновано Лоренц-коваріянтну деформовану алґебру Гайзенберґа

$$\begin{aligned} &[X^\mu, P^\nu] = -i\hbar(g^{\mu\nu} - \beta' P^\mu P^\nu), \\ &[X^\mu, X^\nu] = -i\hbar\beta'(P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu), \\ &[P^\mu, P^\nu] = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

що веде до квантування простору. Співвідношення невизначеностей Гайзенберґа приводить до існування ненульової мінімальної невизначености координати $\langle(\Delta X^i)^2\rangle \geq \Delta X^i_{\min} = \hbar\sqrt{\beta'}$. Варто зауважити, що алґебра (1) не є Пуанкаре-коваріянтною і простір не є однорідним.

Протягом тривалого часу опубліковано небагато праць на тему квантованого простору [1–6]. Зацікавлення цією проблематикою відновилося завдяки дослідженням у теорії струн та квантовій ґравітації, які передбачають існування мінімальної довжини — мінімальної ненульової невизначености координати [7–9]. Показано, що мінімальну довжину можна отримати в межах малих квадратичних модифікацій канонічних комутаційних співвідношень — нерелятивістської деформованої алґебри Гайзенберґа [10–13]. Цікаво зауважити, що ці деформовані алґебри за своєю структурою збігаються з алґеброю Шнайдера і є її нерелятивістським варіянтом. Зв'язок між деформованими нерелятивістськими алґебрами та релятивістською алґеброю Шнайдера можна знайти в [14]. У цій статті ми узагальнили нерелятивістську деформовану двопараметричну алґебру Гайзенберґа на релятивістський випадок так, щоб вона була Лоренц-коваріянтною

$$[X^\mu, P^\nu] = -i\hbar\left((1 - \beta P_\rho P^\rho)g^{\mu\nu} - \beta' P^\mu P^\nu\right), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} [X^\mu, X^\nu] &= i\hbar\frac{2\beta - \beta' - \beta(2\beta + \beta')P_\rho P^\rho}{1 - \beta P_\rho P^\rho} \\ &\times (P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu), \end{aligned} \tag{3}$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0.$$

Ця узагальнена алґебра включає алґебру Шнайдера як частковий випадок, а саме, при $\beta = 0$ вона переходить в (1). Для сферично-симетричних станів для мінімальної довжини маємо [14]

$$\begin{aligned} \Delta X^1_{\min} = \Delta X^2_{\min} = \Delta X^3_{\min} \\ = \hbar\sqrt{(D\beta + \beta')(1 - \beta\langle(P^0)^2\rangle)}, \end{aligned} \tag{4}$$

де D—кількість просторових координат. Для неізотропних станів знаходимо

$$\Delta X^i_{\min} = \hbar\sqrt{(\beta + \beta')(1 - \beta\langle(P^0)^2\rangle)}. \tag{5}$$

Алґебра (2) цікава тим, що при $2\beta = \beta'$ в лінійному наближенні за параметрами деформації β, β' оператори координат комутують між собою й алґебра стає Пуанкаре-коваріянтною, а простір однорідним.

Друга робота Шнайдера [2] присвячена рівнянням електромагнетного поля у квантовому просторі з деформованою алґеброю (1). Оскільки координати тепер є операторами, які не комутують між собою, їх не можна трактувати як звичайні змінні. Це своєю чергою означає, що напружености електричного й магнетного полів у квантовому просторі потрібно також трактувати як оператори. Виникає запитання, які рівняння повинні задовольняти оператори напруженостей полів $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{H}}$. Звичайно, ці рівняння в границі прямуючих до нуля параметрів деформації повинні зводитись до рівнянь Максвелла. Шнайдер запропонував такий спосіб узагальнити рівняння Максвелла для квантового простору. Зауважимо, що похідні, які входять у рівняння електромагнетного поля, можна переписати за допомогою комутатора, наприклад

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \mathbf{E}\right] = \frac{1}{i\hbar}[p_i, \mathbf{E}]. \tag{6}$$

Останнє співвідношення робить очевидним узагальнення відповідних рівнянь для квантового простору. Похідні в рівняннях Максвелла потрібно замінити на відповідні комутатори. Для прикладу,

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^i} \to \frac{1}{i\hbar}[P_i, \hat{\mathbf{E}}], \tag{7}$$

де $P_i = g_{ij}P^j$ задовольняють деформовану алґебру (1).

Отже, у запропонованій Шнайдером електродинаміці у квантовому просторі напруженості полів стають операторами, що звичайно ускладнює аналіз відповідних рівнянь. Тому виникає бажання зберегти неоператорний характер напруженостей полів у квантовому просторі. Для розв'язання цієї задачі ми розглянемо модифіковану алґебру Шнайдера, тобто алґебру (2) при $2\beta = \beta'$, яка в лінійному наближенні за параметрами деформації є Пуанкаре-коваріянтною, оператори координат комутують між собою, і їх можна трактувати як звичайні змінні. У цьому випадку рівняння електромагнетного поля можна узагальнити на деформований простір із мінімальною довжиною зі збереженням неоператорного характеру напруженостей полів як функцій координат.

II. РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГО ПОЛЯ

Розгляньмо електромагнетне поле у квантованому просторі, який описується деформованою алґеброю (2). У лінійному наближенні за параметрами деформації ця алґебра має таке представлення:

$$X^\mu = x^\mu - \frac{2\beta - \beta'}{4}(x^\mu p_\rho p^\rho + p_\rho p^\rho x^\mu), \tag{8}$$
$$P^\mu = p^\mu\left(1 - \frac{\beta'}{2}p_\rho p^\rho\right),$$

де

$$p^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}, \tag{9}$$

метричний тензор $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Оператори x^μ і p^ν задовольняють канонічні комутаційні співвідношення

$$[x^\mu, p^\nu] = -i\hbar g^{\mu\nu}, \quad [x^\mu, x^\nu] = [p^\mu, p^\nu] = 0. \tag{10}$$

Нерелятивістський варіянт представлення (8) ми запропонували в роботі [15], досліджуючи атом водню у квантовому просторі.

При $2\beta = \beta'$ оператори координати в лінійному наближенні за деформацією комутують і їх можна трактувати як звичайні змінні. Представлення (8) у цьому випадку набуває вигляду

$$X^\mu = x^\mu, \tag{11}$$
$$P^\mu = p^\mu(1 - \beta p_\rho p^\rho), \tag{12}$$

Цей момент є дуже важливим для дальшої побудови рівнянь електромагнетного поля в деформованому просторі. Тепер напруженості електричного та магнетного полів можна розглядати як функції x^μ, а саме $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x^\mu)$ та $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x^\mu)$.

Ми пропонуємо такий спосіб побудови рівнянь електромагнетного поля в деформованому просторі. Похідну можна записати як дію оператора імпульсу на відповідну функцію, а саме $\partial/\partial x^\mu = p_\mu/i\hbar$. У деформованому просторі p_μ замінюємо на P_μ. Це означає, що похідні в рівняннях електромагнетного поля потрібно замінити в такий спосіб:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to (1 - \beta p_\rho p^\rho)p_\mu/i\hbar = (1 - a^2\Box)\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{13}$$

де $a = \hbar\sqrt{\beta}$, $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

У результаті рівняння електромагнетного поля в деформованому просторі наберуть вигляду

$$(1 - a^2\Box)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = (1 - a^2\Box)\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{14}$$
$$(1 - a^2\Box)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -(1 - a^2\Box)\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{15}$$
$$(1 - a^2\Box)\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{16}$$
$$(1 - a^2\Box)\,\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0. \tag{17}$$

Звернімо увагу на те, що параметр a пов'язаний з мінімальною довжиною. З (5) у лінійному наближенні за параметрами деформації при $2\beta = \beta'$ знаходимо $\Delta X^i_{\min} = \hbar\sqrt{3\beta} = \sqrt{3}a$.

Цікаво зауважити, що отримані рівняння збігаються з рівняннями узагальненої електродинаміки з вищими похідними [16, 17], хоча вихідні стартові положення є абсолютно іншими, ніж у [16, 17]. Можливо, існує значно глибша причина, яка приводить до тих самих рівнянь, ніж простий збіг. На даний момент ця причина нам не відома. Проте ми можемо зробити важливий висновок, а саме, що рівняння узагальненої електродинаміки можуть описувати також електромагнетне поле в деформованому просторі з мінімальною довжиною.

Подібно, як для звичайної електродинаміки, уведемо скалярний та векторний потенціяли

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \tag{18}$$
$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{19}$$

Проаналізуймо, для прикладу, постійне електричне поле. Для скалярного потенціялу отримуємо узагальнене рівняння Пуассона

$$(1 - a^2\Box)\nabla^2\phi = 4\pi\rho, \tag{20}$$

де $\rho = \rho(\mathbf{r})$ — густина електричного заряду. Розглядаючи частинки, що несуть заряд, на класичному рівні можна ввести поняття точкового заряду з густиною $\rho = e\delta(\mathbf{r})$. Тоді для потенціялу одержуємо такий розв'язок:

$$\phi = \frac{e}{r}\left(1 - e^{-r/a}\right). \tag{21}$$

Цей потенціял є скінченним у точці, де перебуває заряд, тобто $\phi(0) = e/a$. Отже, проаналізована деформація алґебри Гайзенберґа усуває проблему розбіжностей, пов'язаних із точковістю частинок. Очевидно, що такий самий результат для скалярного потенціялу отримують у межах узагальненої електродинаміки [16, 17]. Проте зауважимо, що в нашому випадку усунення розбіжности зумовлене існуванням мінімальної довжини в деформованому просторі.

III. РІВНЯННЯ ДІРАКА

Подібно, як ми узагальнили рівняння електромагнетного поля для деформованого простору, можемо узагальнити рівняння Дірака, а саме, оператори p_μ замінюємо на P_μ із (12). Тоді узагальнене рівняння Дірака для вільної частинки набирає вигляду

$$(1 - \beta p_\rho p^\rho)p^0\psi = (1 - \beta p_\rho p^\rho)c(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{p})\psi + mc^2\hat{\beta}\psi \tag{22}$$

або

$$(1 - a^2\Box)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -(1 - a^2\Box)ci\hbar(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{p})\psi + mc^2\hat{\beta}\psi, \tag{23}$$

де $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, $\hat{\beta}$ — матриці Дірака.

Розв'язок шукаємо у вигляді плоскої хвилі

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}, \tag{24}$$

де ϕ і χ — двокомпонентні вектори. У результаті маємо рівняння для закону дисперсії

$$\begin{aligned} &\hbar^2\omega^2[1 + a^2(k^2 - \omega^2/c^2)]^2 \\ &= c^2(\hbar k)^2[1 + a^2(k^2 - \omega^2/c^2)]^2 + m^2c^4. \end{aligned} \tag{25}$$

У лінійному наближенні за параметром деформації β (або $a^2 = \hbar^2\beta$) знаходимо

$$\begin{aligned} \omega^2(k) &= c^2k^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\left(1 + 2\beta m^2c^2\right) \\ &= c^2k^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\left(1 + 2\frac{a^2}{\lambda^2}\right), \end{aligned} \tag{26}$$

де $\lambda = \lambda_c/2\pi$, комптонівська довжина $\lambda_c = h/mc = 2.43 \times 10^{-12}$ m. Зауважимо, що деформація в лінійному наближенні веде до зміни маси у виразі для $\omega^2(k)$, яку можна трактувати як ефективну масу

$$m^* = m\sqrt{1 + 2\frac{a^2}{\lambda^2}}. \tag{27}$$

Для оцінки ефективної маси припускаємо, що a є порядку верхньої межі мінімальної довжини 10^{-16} m, яка отримана в [15, 18, 19]. У результаті в лінійному наближенні за β знаходимо верхню межу ефективної маси, спричиненої деформацією

$$\frac{m^* - m}{m} = \frac{a^2}{\lambda^2} \simeq 10^{-8}. \tag{28}$$

Як бачимо, відносна різниця ефективної та "голої" маси електрона є дуже малою.

IV. ВИСНОВКИ

Ми розглянули проблему побудови рівнянь електромагнетного поля у просторі, що описується Лоренцковаріянтною двопараметричною деформованою алґеброю Гайзенберґа і в якому існує мінімальна довжина. Важливим моментом є те, що в лінійному наближенні, при умові на параметри $2\beta = \beta'$, оператори координат комутують між собою і простір стає однорідним. Тому в цьому випадку поля можна трактувати як звичайні функції координат, на відміну від алґебри Шнайдера, і знайти просте узагальнення відповідних рівнянь для деформованого простору. Цікаво, що отримані рівняння для електромагнетного поля збігаються з рівняннями узагальненої електродинаміки з вищими похідними. Можливо, існує глибша причина, ніж простий збіг, яка приводить до тих самих рівнянь. Проте на сьогодні ця причина нам не відома. Зауважимо, що існування мінімальної довжини усуває проблему розбіжностей, пов'язаних із точковістю частинок.

Ми також узагальнили рівняння Дірака для деформованого простору й розглянули вільний рух електрона. Дисперсійне співвідношення в лінійному наближенні за параметрами деформації відрізняється від недеформованого випадку тільки наявністю ефективної маси у відповідному виразі, верхня межа якої, як показують оцінки, мало відрізняється від "голої" маси електрона.

Поза увагою цієї роботи залишилось багато важливих питань. Це електромагнетна взаємодія, калібрувальна інваріянтність, співвідношення між енерґією та частотою, імпульсом та хвильовим вектором для плоскої хвилі в деформованому просторі тощо. Ці питання потребують докладного аналізу і, сподіваємось, будуть предметом майбутніх робіт.

V. ПОДЯКИ

Автор дякує Аскольдові Дувіряку за цікаві дискусії та корисні поклики на статті [16, 17].

[1] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
[2] H. S. Snyder, Phys. Rev. **72**, 68 (1947).
[3] C. N. Yang, Phys. Rev. **72**, 874 (1947).
[4] E. J. Hellund, K. Tanaka, Phys. Rev. **94**, 192 (1954).
[5] E. Fischbach, Phys. Rev. **137**, B 642 (1965).
[6] M. R. Hamilton, G. Sandri, Phys. Rev. D **8**, 1788 (1973).
[7] D. J. Gross, P. F. Mende, Nucl. Phys. B **303**, 407 (1988).
[8] M. Maggiore, Phys. Lett. B **304**, 65 (1993).
[9] E. Witten, Physics Today **49**, No 4, 24 (1996).
[10] A. Kempf, J. Math. Phys. **35**, 4483 (1994).
[11] A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann, Phys. Rev. D **52**, 1108 (1995).
[12] H. Hinrichsen, A. Kempf, J. Math. Phys. **37**, 2121 (1996).
[13] A. Kempf, J. Phys. A, **30**, 2093 (1997).
[14] C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A, **38**, 10909 (2006).
[15] M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A **74**, 012101 (2006).
[16] B. Podolsky, Phys. Rev. **62**, 68 (1942).
[17] B. Podolsky, Ph. Schwed, Rev. of Mod. Phys. **20**, No 1, 40 (1948).
[18] M. M. Stetsko, Phys. Rev. A **74**, 062105 (2006).
[19] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, T. Takeuchi, Phys. Rev. A **72**, 012104 (2005).

FIELD EQUATION IN A DEFORMED SPACE WITH MINIMAL LENGTH

V. M. Tkachuk
Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,
12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine
e-mail: tkachuk@ktf.franko.lviv.ua

We consider one of the possibilities for constructing equations for electrodynamics and Dirac equation in space with deformed Poincaré covariant Heisenberg algebra. It is of interest to note that the obtained equations for the electromagnetic field coincide with those of generalized electrodynamics with higher derivatives. We also studied free motion of a relativistic electron in the deformed space and found that the energy spectrum in linear approximation over parameters of deformation is similar to the non-deformed one but with effective mass. The estimation shows that effective mass caused by deformation is very close to bare mass in the non-deformed case.