ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 11, № 1 (2007) с. 74–88

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 11, No. 1 (2007) p. 74–88

МЕТОД СКОРОЧЕНОГО ОПИСУ В ДИНАМІЧНІЙ ТЕОРІЇ ЧАСТИНОК, ЩО СЛАБКО ВЗАЄМОДІЮТЬ ІЗ ГІДРОДИНАМІЧНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

С. О. Ніколаєнко[1], Ю. В. Слюсаренко[2]
[1] *Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна,*
[2] *Інститут теоретичної фізики ім. А. І. Ахієзера ННЦ ХФТІ*
(Отримано 29 листопада 2006 р.)

У межах методу скороченого опису Боголюбова досліджено просторово-неоднорідні стани частинок, що слабко взаємодіють із гідродинамічним середовищем. Показано, що така система може перебувати на кінетичному та гідродинамічному етапах еволюції. На кінетичному етапі частинки описуються одночастинковою функцією розподілу, а середовище — п'ятьма гідродинамічними параметрами. Отримано систему зв'язаних рівнянь руху для параметрів скороченого опису. Розглянуто перехід від кінетичного до гідродинамічного етапу еволюції системи. Параметрами скороченого опису вибрано п'ять гідродинамічних параметрів середовища та густина частинок. Одержано рівняння руху системи на гідродинамічному етапі еволюції системи. Вони можуть, зокрема, описувати нейтрони, що поширюються в середовищі без розмноження та захвату.

Ключові слова: метод скороченого опису; частинки, що слабо взаємодіють із середовищем; кінетична та гідродинамічна теорії.

PACS number(s): 05.20.Dd; 28.20.Gd

I. ВСТУП

Підґрунтям методу скороченого опису системи багатьох частинок є твердження, що кожна система, залишена самій собі (тобто без зовнішнього збуджуючого впливу), приходить до стану статистичної рівноваги. Статистичний опис граничного рівноважного стану, як відомо, значно простіший, ніж опис тих процесів, унаслідок яких досягається цей стан. Справді, стан статистичної рівноваги описується універсальним рівноважним розподілом Ґіббса. Тому можна передбачати, що під час еволюції системи до стану рівноваги опис системи має поступово спрощуватися. Це означає, що з плином часу протягом еволюції має спрощуватися вираз для ймовірности стану. Такі міркування й лягли в основу ідеї М. М. Боголюбова про ієрархію часів релаксації системи. Ідея полягає саме в тому, що на різних етапах еволюції фізичної системи вираз для ймовірности стану має різну структуру, причому ця структура згодом спрощується. З погляду математичних формулювань, це означає, що ймовірність стану на різних етапах еволюції визначається обмеженим числом функцій, тобто ймовірність є функціоналом від деяких функцій (параметрів скороченого опису), для яких, згідно з певними правилами, виписуються рівняння руху, або рівняння еволюції системи. Ця ідея покладена в основу методу скороченого опису, засади якого сформулював М. М. Боголюбов [1]. Узагальнення та подальший розвиток положень методу скороченого опису для квантових систем багатьох частинок наведено в монографії [2].

Використання методу скороченого опису дало послідовний мікроскопічний підхід до виведення кінетичних рівнянь (опису системи на кінетичному етапі її еволюції) й одержання рівнянь гідродинаміки (опису еволюції системи на гідродинамічному її етапі). Однак, не зважаючи на досить уже тривалу історію досліджень незворотних процесів у межах методу скороченого опису, залишаються аспекти, що потребують подальшого прояснення. Насамперед це стосується розвитку послідовного мікроскопічного підходу до опису кінетики та гідродинаміки частинок, що взаємодіють із середовищем. Початок таким дослідженням закладено в [2] (див. також [3]), де отримано у просторово-однорідному випадку кінетичні рівняння для частинок, що слабко взаємодіють із гідродинамічним середовищем. У цій статті ми наведемо результати, пов'язані з узагальненням підходу [2] на опис просторово-неоднорідних станів системи частинок, що взаємодіють із гідродинамічним середовищем. Як один із конкретних прикладів такої системи можна розглядати повільні нейтрони в гідродинамічному середовищі.

II. ЗАСАДИ МЕТОДУ СКОРОЧЕНОГО ОПИСУ В КІНЕТИЦІ ЧАСТИНОК, ЩО СЛАБКО ВЗАЄМОДІЮТЬ ІЗ ГІДРОДИНАМІЧНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

У квантовій статистичній механіці ймовірність стану системи в довільний проміжок часу t описується нерівноважним статистичним оператором ρ, що задовольняє рівняння Ліувілля

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -i[\mathcal{H}, \rho(t)], \tag{1}$$

де $\mathcal{H}$ — гамільтоніян системи. Відповідно до методу скороченого опису, як уже зазначалось, статистичний оператор $\rho\,(t)$ на різних етапах еволюції системи стає функціоналом різних параметрів скороченого опису системи. А саме, на кінетичному етапі еволюції системи нерівноважний статистичний оператор $\rho\,(t)$ можна розглядати як функціонал одночастинкової функції розподілу, на гідродинамічному етапі еволюції — як функціонал набору гідродинамічних параметрів, наприклад, густини частинок, температури та середньої швидкости. Однак у двокомпонентній системі при деяких умовах одна компонента може перебувати на кінетичному етапі еволюції й описуватись одночастинковою функцією розподілу, а друга — на гідродинамічному етапі еволюції й описуватись набором гідродинамічних параметрів, таких, як зазначено вище. Як побачимо далі, можливість саме такої ситуації слідураховувати, описуючи еволюцію системи, що складається із сильно взаємодіючих частинок одного сорту (гідродинамічного середовища) та не взаємодіючих через малу їх кількість частинок другого сорту, які, однак, слабко взаємодіють із середовищем. Розв'язок у випадку замкнутої системи рівняння (1).

$$\rho\,(t) = e^{-i\mathcal{H}t}\rho e^{i\mathcal{H}t}, \tag{2}$$

де ρ — статистичний оператор початкового стану, згідно з методом скороченого опису, має задовольняти дві фундаментальні умови (див. у зв'язку з цим [2]) — принцип просторового послаблення кореляцій та ергодичне співвідношення. Принцип просторового послаблення кореляцій відображає спрощення структури середніх зі статистичним оператором $\rho\,(t)$ добутку квазілокальних операторів $a\,(\mathbf{x})$ та $b\,(\mathbf{y})$ [2] при розсуванні їх арґументів:

$$\operatorname{Sp}\rho\,(t)\,a\,(\mathbf{x})\,b\,(\mathbf{y}) \underset{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\gg r_c}{\longrightarrow} \operatorname{Sp}\rho\,(t)\,a\,(\mathbf{x})\operatorname{Sp}\rho\,(t)\,b\,(\mathbf{y})\,, \tag{3}$$

де r_c — радіус кореляцій для стану $\rho\,(t)$. Ергодичне співвідношення описує асимптотику статистичного оператора (і, відповідно, середніх із цим статистичним оператором) при великих часах:

$$\rho\,(t) = e^{-i\mathcal{H}t}\rho e^{i\mathcal{H}t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} w, \tag{4}$$

де w — рівноважний статистичний оператор Ґіббса. Фізичний зміст співвідношення (4) полягає в тому, що при великих часах система переходить до стану статистичної рівноваги, який описується рівноважним статистичним оператором Ґіббса w.

Система, що розглядається, складається із двох підсистем — підсистеми середовища та підсистеми частинок, що з цим середовищем взаємодіють. Повний гамільтоніян такої системи запишемо у вигляді

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \hat{V}, \quad \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_p, \tag{5}$$

де $\mathcal{H}_0$ описує підсистеми середовища та частинок, які між собою не взаємодіють, а оператор $\hat{V}$ — взаємодію підсистем. Гамільтоніян $\mathcal{H}_m$ описує підсистему середовища, а оператор $\mathcal{H}_p$ — підсистему частинок. Ми будемо вважати, що густина частинок, які взаємодіють із середовищем, мала, а тому взаємодією цих частинок між собою можна знехтувати. Із цієї причини оператор $\mathcal{H}_p$ повинен мати структуру гамільтоніяна вільних частинок. На відміну від цього будемо вважати, що гамільтоніян $\mathcal{H}_m$ містить досить сильну взаємодію між частинками середовища, яка приводить до швидкої релаксації цієї підсистеми до локально-рівноважного стану. Взаємодію між підсистемами вважатимемо слабкою порівняно із взаємодією між частинками середовища. За таких обставин час релаксації в системі, пов'язаний зі взаємодією частинок середовища, має бути набагато меншим від часу релаксації τ_0, пов'язаного зі взаємодією між частинками підсистем. Таким чином, за встановлення рівноважного стану в системі відповідає саме слабка взаємодія між підсистемами. Тоді, згідно з основними засадами методу скороченого опису [2], можна вважати, що при часах $t \gg \tau_0$ за параметри скороченого опису системи можна взяти густини адитивних інтеґралів руху, які описуємо нижче.

Гідродинамічне середовище, як відомо, може характеризуватися п'ятьма адитивними інтеґралами руху щодо гамільтоніяна $\mathcal{H}_m$ — масою, енерґією та імпульсом (див., наприклад, [2]). Із цієї причини нерівноважний стан гідродинамічного середовища ми будемо описувати набором величин $\zeta_\alpha(\mathbf{x}), \quad \alpha = 0, i, 4,$ причому $\zeta_0\,(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon\,(\mathbf{x})$ — густина енерґії середовища, $\zeta_i\,(\mathbf{x}) \equiv \pi_i\,(\mathbf{x})$ — густина імпульсу та $\zeta_4\,(\mathbf{x}) \equiv \rho^{(m)}(\mathbf{x})$ — густина маси середовища. Густинам $\zeta_\alpha\,(\mathbf{x})$ відповідають оператори густин гідродинамічних величин $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \alpha = 0, i, 4,$ де $\hat{\zeta}_0\,(\mathbf{x}) \equiv \hat{\varepsilon}\,(\mathbf{x})$ — оператор густини енерґії середовища, $\hat{\zeta}_i\,(\mathbf{x}) \equiv \hat{\pi}_i\,(\mathbf{x})$ — оператор густини імпульсу та $\hat{\zeta}_4\,(\mathbf{x}) \equiv \hat{\rho}^{(m)}(\mathbf{x})$ — оператор густини маси середовища. У термінах операторів народження $\hat{\varphi}^+\,(\mathbf{x})$ та знищення $\hat{\varphi}\,(\mathbf{x})$ частинок середовища ці оператори мають вигляд [2]

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2m_m}\nabla\hat{\varphi}^+\,(\mathbf{x})\,\nabla\hat{\varphi}\,(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\int d^3R V_m\,(\mathbf{R})\,\hat{\varphi}^+\,(\mathbf{x}+\mathbf{R})\,\hat{\varphi}^+\,(\mathbf{x})\,\hat{\varphi}\,(\mathbf{x})\,\hat{\varphi}\,(\mathbf{x}+\mathbf{R}), \\
\hat{\pi}_i(\mathbf{x}) &= \frac{i}{2}\left(\hat{\varphi}\,(\mathbf{x})\,\nabla_i\hat{\varphi}^+\,(\mathbf{x}) - \hat{\varphi}^+\,(\mathbf{x})\,\nabla_i\hat{\varphi}\,(\mathbf{x})\right), \\
\hat{\rho}^{(m)}(\mathbf{x}) &= m_m\hat{\varphi}^+\,(\mathbf{x})\,\hat{\varphi}\,(\mathbf{x})\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тут m_m — маса частинок середовища, а $V_m\,(\mathbf{R})$ — потенціял парної взаємодії між частинками середовища. Оператори повної маси $\hat{M}^{(m)}$, $\hat{P}_i^{(m)}$ імпульсу $\mathcal{H}_m$ й енерґії (гамільтоніян) середовища визначаються виразами:

$$\mathcal{H}_m = \int d^3x\,\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}), \quad \hat{P}_i^{(m)} = \int d^3x\,\hat{\pi}_i(\mathbf{x}), \tag{7}$$
$$\hat{M}^{(m)} = \int d^3x\,\hat{\rho}^{(m)}(\mathbf{x}).$$

Оскільки, як легко впевнитись, оператори (7) комутують між собою, то оператори $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ (див. (6)) ми будемо також називати операторами густин адитивних інтеґралів руху. Оператори похідних за часом від густин адитивних інтеґралів руху в шрединґерівськім зображенні можуть бути записані так [2]:

$$\dot{\hat{\zeta}}_\alpha(\mathbf{x}) = i[\mathcal{H}_m, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] = -\frac{\partial\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \tag{8}$$

де величини $\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})$ є операторами густин потоків адитивних інтеґралів руху, які, згідно з [2], можуть бути виражені в термінах операторів густин гідродинамічних параметрів

$$\hat{\zeta}_{0k}(\mathbf{x}) \equiv \hat{j}_k^{(m)}(\mathbf{x}) = \hat{\pi}_k(\mathbf{x}) = i\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi \left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1-\xi)\mathbf{x}'), \hat{\rho}^{(m)}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')\right], \tag{9}$$

$$\hat{\zeta}_{kl}(\mathbf{x}) \equiv \hat{t}_{kl}(\mathbf{x}) = -\hat{\varepsilon}(\mathbf{x})\delta_{kl} + i\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi\,[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1-\xi)\mathbf{x}'), \hat{\pi}_k(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')], \tag{10}$$

$$\hat{\zeta}_{0k}(\mathbf{x}) \equiv \hat{q}_k(\mathbf{x}) = \frac{i}{2}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi\,[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1-\xi)\mathbf{x}'), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')]. \tag{11}$$

Частинки, що взаємодіють із середовищем, як ми вже зазначали вище, можуть перебувати на кінетичному етапі еволюції, де їх стан природно описувати одночастинковою функцією розподілу $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Із цією метою введемо до розгляду оператор віґнерівської функції розподілу $\hat{f}_\mathbf{p}(\mathbf{x})$ (див. у цьому зв'язку [2], [5]):

$$\hat{f}_\mathbf{p}(\mathbf{x}) \equiv \int d^3x' e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}'}\hat{\psi}^+\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}'}{2}\right)\hat{\psi}\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}'}{2}\right), \tag{12}$$

де $\hat{\psi}^+(\mathbf{x})$ и $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ — оператори народження та знищення частинок, що взаємодіють із середовищем. Слід звернути увагу, що далі оператори народження й знищення частинок середовища $\hat{\varphi}^+(\mathbf{x})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ та оператори народження й знищення частинок, які взаємодіють із середовищем $\hat{\psi}^+(\mathbf{x})$, $\hat{\psi}(\mathbf{x})$, ми будемо вважати такими, що комутують між собою

$$\left[\hat{\psi}^+(\mathbf{x}), \hat{\varphi}^+(\mathbf{x})\right] = \left[\hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{\varphi}^+(\mathbf{x})\right] = 0, \tag{13}$$
$$\left[\hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{x})\right] = \left[\hat{\psi}^+(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{x})\right] = 0. \tag{14}$$

Гамільтоніян вільних (не взаємодіючих із середовищем) частинок у термінах операторів народження $\hat{\psi}^+(\mathbf{x})$ та знищення $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ має вигляд

$$\mathcal{H}_p = \frac{1}{2m}\int d^3x\,\nabla\hat{\psi}^+(\mathbf{x})\nabla\hat{\psi}(\mathbf{x}), \tag{15}$$

де m — маса частинки. Легко впевнитись у справедливості співвідношення

$$i\left[\int d^3x\,\hat{f}_\mathbf{p}(\mathbf{x}), \mathcal{H}^{(p)}\right] = 0, \tag{16}$$

яке далі дасть змогу розглядати оператор віґнерівської функції розподілу $\hat{f}_\mathbf{p}(\mathbf{x})$ як оператор густини адитивного інтеґрала руху для підсистеми частинок. Відповідно до цього, оскільки з явного вигляду (15) гамільтоніяна вільних частинок $\mathcal{H}_p$ та визначення віґнерівської функції розподілу (12) випливає рівність

$$i\left[\mathcal{H}_p, \hat{f}_\mathbf{p}(\mathbf{x})\right] = -\frac{p_k}{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\hat{f}_\mathbf{p}(\mathbf{x}), \tag{17}$$

величину

$$\hat{f}_{\mathbf{p}\,k}(\mathbf{x}) \equiv \frac{p_k}{m}\hat{f}_\mathbf{p}(\mathbf{x}) \tag{18}$$

можна розглядати як оператор густини потоку віґнерівської функції розподілу.

Для спрощення й формалізації подальших обчислень для операторів густин адитивних інтеґралів руху середовища $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$, $\quad \alpha = 0, i, 4$ та оператора віґнерівської функції розподілу $\hat{f}_\mathbf{p}(\mathbf{x})$ (див. (12)) уведемо об'єднувальні позначення $\hat{\zeta}_A(\mathbf{x})$, де індекс "$A$" приймає значення α, $\mathbf{p}$, $A = \{\alpha, \mathbf{p}\}$, тобто

$$\hat{\zeta}_A(\mathbf{x})|_{A=\alpha} = \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}), \tag{19}$$
$$\hat{\zeta}_A(\mathbf{x})|_{A=\mathbf{p}} = \hat{f}_\mathbf{p}(\mathbf{x}).$$

Аналогічно для операторів густин потоків цих величин також уведемо позначення $\hat{\zeta}_{Ak}(\mathbf{x})$ (див. (9), (17), (18)

$$\hat{\zeta}_{Ak}(\mathbf{x})|_{A=\mathbf{p}} = \hat{f}_{\mathbf{p},k}(\mathbf{x}) \equiv \frac{p_k}{m}\hat{f}_\mathbf{p}(\mathbf{x}), \tag{20}$$
$$\hat{\zeta}_{Ak}(\mathbf{x})|_{A=\alpha} = \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x}),$$

У термінах уведених означень рівноважний статистичний оператор Ґіббса w для системи, що розглядається, можна записати так:

$$w(Y) = \exp\{\Omega - Y_A\hat{\gamma}_A\}, \tag{21}$$

де $\hat{\gamma}_A$ — оператори адитивних інтеґралів руху

$$\hat{\gamma}_A = \int d^3x \, \hat{\zeta}_A(\mathbf{x}) \tag{22}$$

щодо гамільтоніяна $\mathcal{H}_0$ (див. (5))

$$[\mathcal{H}_0, \hat{\gamma}_A] = 0. \tag{23}$$

Залежність термодинамічного потенціялу Ω в (21) від узагальнених термодинамічних сил Y_A даємо умовою нормування

$$\mathrm{Sp}\, w(Y) = 1, \tag{24}$$

а самі термодинамічні сили Y_A визначаємо адитивними інтеґралами руху γ_A через співвідношення

$$\mathrm{Sp}\, w(Y)\, \hat{\gamma}_A = \gamma_A. \tag{25}$$

Наведені вирази мають усі необхідні дані для застосування методу скороченого опису до вивчення еволюції частинок, що взаємодіють із гідродинамічним середовищем. Відповідно до основних положень методу скороченого опису статистичний оператор $\rho(t)$, що описує систему, на етапі еволюції, який виникає при часах, набагато більших від часу τ_0 (пов'язаного зі взаємодією між підсистемами, див. вище), буде функціонально залежати від параметрів скороченого опису — густин $\zeta_A(\mathbf{x})$:

$$\rho(t) = e^{-i\mathcal{H}t} \rho e^{i\mathcal{H}t} \underset{t \gg \tau_0}{\to} \sigma(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho)). \tag{26}$$

Звернімо увагу, що, згідно з (26), пам'ять про початковий стан системи (статистичний оператор ρ) міститься лише в параметрах скороченого опису $\zeta_A(\mathbf{x}, t; \rho)$, функціоналом яких є статистичний оператор σ. Оператор σ ми будемо називати огрубленим статистичним оператором. Огрублений статистичний оператор σ, за означенням величин, має задовольняти співвідношення

$$\zeta_A(\mathbf{x}) \equiv \mathrm{Sp}\, \sigma(\zeta)\, \hat{\zeta}_A(\mathbf{x}). \tag{27}$$

Щоб одержати рівняння руху для параметрів скороченого опису $\zeta_A(\mathbf{x}, t)$, необхідно вивести рівняння еволюції для огрубленого статистичного оператора $\sigma(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho))$. Для цього досить використати загальну процедуру, детально описану в [2]. Тому ми не будемо викладати матеріял, пов'язаний з отриманням рівняння еволюції, а наведемо лиш кінцевий результат. Згадане рівняння еволюції в термінах уведених параметрів скороченого опису має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma(\zeta(\mathbf{x}')) &= w(Y(\mathbf{x}')) - i \int_{-\infty}^{0} d\tau \, e^{i\mathcal{H}_0 \tau} \Big\{ [\mathcal{H}_0, w(Y(\mathbf{x}'))] + \Big[\hat{V}, \sigma(\zeta(\mathbf{x}'))\Big] \\ &+ \int d^3x \, \frac{\delta\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))}{\delta\zeta_A(\mathbf{x})} \mathrm{Sp}\, \sigma \Big[\hat{V}, \hat{\zeta}_A(\mathbf{x})\Big] - i \int d^3x \, \frac{\delta\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))}{\delta\zeta_A(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathrm{Sp}\, \sigma \hat{\zeta}_{Ak}(\mathbf{x}) \Big\} e^{-i\mathcal{H}_0 \tau}, \end{aligned} \tag{28}$$

де локально-рівноважний розподіл Ґіббса $w(Y(\mathbf{x}'))$ дається виразом

$$w(Y(\mathbf{x}')) = \exp\left\{ \Omega(Y(\mathbf{x}')) - \int d^3x' Y_A(\mathbf{x}')\, \hat{\zeta}_A(\mathbf{x}') \right\}. \tag{29}$$

Зазначимо, що якщо у виразі (29) покласти $Y_A(\mathbf{x}) = Y_A = \mathrm{const}$, то ми прийдемо до формули (21) для рівноважного статистичного розподілу Ґіббса $w(Y_A)$. Остання обставина, зважаючи на те, що $[\mathcal{H}_0, w(Y_A)] = 0$, дасть змогу нам потім при розв'язку рівняння (28) використовувати теорію збурень за малими ґрадієнтами параметрів скороченого опису $\zeta_A(\mathbf{x})$. Щобільше це рівняння годиться для розвитку теорії збурень і за малою взаємодією $\hat{V}$ (див. (5)). Рівняння руху для параметров скороченого опису є таким:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_A(\mathbf{x}) &= i \mathrm{Sp}\, \sigma(\zeta(\mathbf{x}')) \Big[\hat{V}, \hat{\zeta}_A(\mathbf{x})\Big] \\ &- \frac{\partial}{\partial x_k} \mathrm{Sp}\, \sigma(\zeta(\mathbf{x}'))\, \hat{\zeta}_{Ak}(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{30}$$

Відзнаичмо, що досі ми не конкретизували структури гамільтоніяна взаємодії. Надалі ми будемо вважати, що гамільтоніян взаємодії двох підсистем має таку структуру:

$$\hat{V} = \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \hat{\mathcal{J}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\, a^+_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_2}, \tag{31}$$

де $\hat{\mathcal{J}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ — деякий оператор, побудований із операторів, що належать до середовища, а $a^+_{\mathbf{p}_1}$ та $a_{\mathbf{p}_2}$ — оператори народження та знищення в імпульсному просторі частинок, що взаємодіють із середовищем, які визначаються формулами

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\mathbf{x}) &= \mathcal{V}^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \\ \hat{\psi}^+(\mathbf{x}) &= \mathcal{V}^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{p}} a^+_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{32}$$

Явний вигляд оператора $\hat{\mathcal{J}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ конкретизувати не будемо, відзначимо лиш, що з вимоги ермітовости $\hat{V}$ випливає справедливість співвідношення

$$\hat{\mathcal{J}}^+(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \hat{\mathcal{J}}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1). \tag{33}$$

III. ТЕОРІЯ ЗБУРЕНЬ ДЛЯ ОГРУБЛЕНОГО СТАТИСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Інтеґральне рівняння (28) разом із рівнянням (30) формально визначає закон еволюції системи, що вивчається, при часах $t \gg \tau_0$. Для розв'язку цього рівняння й отримання рівнянь руху для параметрів скороченого опису $\zeta_A(\mathbf{x})$ застосуймо апарат теорії збурень. Будемо вважати, що характерні розміри просторових неоднорідностей системи, що вивчається, набагато більші від довжини вільного пробігу частинок обох підсистем. Через цю причину теорію збурень будемо будувати за малими просторовими ґрадієнтами параметрів скороченого опису та малою взаємодією $\hat{V}$ частинок із гідродинамічним середовищем.

Зазначимо, що для операторів народження та знищення частинок середовища $\hat{\varphi}^+(\mathbf{x})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ та частинок, що взаємодіють із середовищем $\hat{\psi}^+(\mathbf{x})$, $\hat{\psi}(\mathbf{x})$, справедливі трансляційні співвідношення

$$\begin{aligned} &e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}\hat{\varphi}(\mathbf{x}')\,e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}} = \hat{\varphi}(\mathbf{x}'+\mathbf{x}), \\ &e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}\hat{\psi}(\mathbf{x}')\,e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}} = \hat{\psi}(\mathbf{x}'+\mathbf{x}), \\ &e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}\hat{\varphi}^+(\mathbf{x}')\,e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}} = \hat{\varphi}^+(\mathbf{x}'+\mathbf{x}), \\ &e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}\hat{\psi}^+(\mathbf{x}')\,e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}} = \hat{\psi}^+(\mathbf{x}'+\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{34}$$

де оператор просторових трансляцій $\hat{\mathbf{P}}$ є оператором повного імпульсу системи, який визначається виразом

$$\hat{\mathbf{P}}_i = \int d^3x\, \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{p}} p_i a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}. \tag{35}$$

Перший доданок у (35) є сумарним імпульсом частинок середовища, див. (6), (7), другий — дає сумарний імпульс частинок, що взаємодіють із середовищем. Легко впевнитись, виходячи з визначень (19), (20), що співвідношення, аналогічні до (34), справедливі також для операторів адитивних інтеґралів руху $\hat{\zeta}_A(\mathbf{x})$ та їх потоків $\hat{\zeta}_{Ak}(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} &e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}\hat{\zeta}_A(\mathbf{x})\,e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}} = \hat{\zeta}_A(\mathbf{x}'+\mathbf{x}), \\ &e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}\hat{\zeta}_{Ak}(\mathbf{x})\,e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}} = \hat{\zeta}_{Ak}(\mathbf{x}'+\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{36}$$

Унаслідок цього маємо рівність

$$e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}} w(Y(\mathbf{x}'))\,e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}} = w(Y(\mathbf{x}+\mathbf{x}')), \tag{37}$$

з урахуванням якої з рівняння (28) випливає, що

$$e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}} \sigma(\zeta(\mathbf{x}'))\,e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}} = \sigma(\zeta(\mathbf{x}+\mathbf{x}')). \tag{38}$$

Тоді при обчисленні середнього від будь-якого трансляційно-інваріянтного оператора $a(\mathbf{x})$ (тобто оператора, який задовольняє рівняння $i\dfrac{\partial a(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \left[\hat{P}_k, a(\mathbf{x})\right]$), маємо співвідношення:

$$\operatorname{Sp}\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))\,a(\mathbf{x}) = \operatorname{Sp}\sigma(\zeta(\mathbf{x}+\mathbf{x}'))\,a(0). \tag{39}$$

до якого входить оператор $a(\mathbf{x})$ у точці $\mathbf{x}=0$. Через малість просторових ґрадієнтів параметрів середовища при обчисленні середнього (39) суттєвими будуть значення $\zeta(\mathbf{x}+\mathbf{x}')$ тільки при $\mathbf{x}' \approx 0$. Остання обставина дозволяє скористатися розкладенням

$$\zeta(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = \zeta(\mathbf{x}) + x'_k \frac{\partial \zeta(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \ldots \tag{40}$$

при побудові теорії збурень для статистичного оператора σ за малими просторовими ґрадієнтами параметрів скороченого опису $\zeta_A(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} &\sigma(\zeta(\mathbf{x}+\mathbf{x}')) = \sigma^{(0)}(\mathbf{x}) + \sigma^{(1)}(\mathbf{x})\ldots, \\ &\sigma^{(0)}(\mathbf{x}) = \sigma(\zeta(\mathbf{x}'))\big|_{\zeta(\mathbf{x}')=\zeta(\mathbf{x})}, \\ &\sigma^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \zeta_A(\mathbf{x})}{\partial x_k}\int d^3x' x'_k \left.\frac{\delta\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))}{\delta\zeta_A(\mathbf{x}')}\right|_{\zeta(\mathbf{x}')=\zeta(\mathbf{x})}. \end{aligned} \tag{41}$$

Згідно з рівнянням (27) маємо співвідношення $\operatorname{Sp}\sigma(\zeta(\mathbf{x}+\mathbf{x}'))\,\hat{\zeta}_A(0) = \zeta_A(\mathbf{x})$, звідки

$$\operatorname{Sp}\sigma^{(k)}(\zeta(\mathbf{x}+\mathbf{x}'))\,\hat{\zeta}_A(0) = \zeta_A(\mathbf{x})\,\delta_{k0}, \tag{42}$$

де k дорівнює $k=0,1$.

Для знаходження операторів $\sigma^{(0)}(\mathbf{x})$, $\sigma^{(1)}(\mathbf{x})$ оператор w (див. (7), (37)) має бути розкладений у ряд за степенями ґрадієнтів величин $Y_A(\mathbf{x})$:

$$w(Y(\mathbf{x}+\mathbf{x}')) = w^{(0)}(\mathbf{x}) + w^{(1)}(\mathbf{x}) + \ldots, \tag{43}$$

де оператори $w^{(0)}(\mathbf{x})$ та $w^{(1)}(\mathbf{x})$ даються виразами

$$w^{(0)}(\mathbf{x}) = \exp\{\Omega(\mathbf{x}) - Y_A(\mathbf{x})\,\hat{\gamma}_A\}, \tag{44}$$

$$\begin{aligned} w^{(1)}(\mathbf{x}) = &-\frac{\partial Y_A(\mathbf{x})}{\partial x_k} w^{(0)}(\mathbf{x}) \\ &\times \int_0^1 d\lambda \int d^3x' x'_k \left(\hat{\zeta}_A(\mathbf{x}',\lambda) - \left\langle \hat{\zeta}_A \right\rangle\right), \end{aligned} \tag{45}$$

у яких ми ввели позначення

$$\begin{aligned} &a(\mathbf{x}',\lambda) = w^{(0)-\lambda} a(\mathbf{x}')\, w^{(0)\lambda}, \\ &\langle \ldots \rangle = \operatorname{Sp} w^{(0)} \ldots. \end{aligned} \tag{46}$$

Використовуючи властивості (20), (23) та принцип просторового послаблення кореляцій і визначення (44), (45), доданок $[\mathcal{H}_0, w(Y(\mathbf{x}'))]$ у (28) з точністю до першого порядку за ґрадієнтами величин $Y_A(\mathbf{x})$ можна записати так:

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{H}_0, w^{(1)}(\mathbf{x})\right] = &\, i\frac{\partial Y_A(\mathbf{x})}{\partial x_k} w^{(0)}(\mathbf{x}) \\ &\times \int_0^1 d\lambda \int d^3x' \left(\hat{\zeta}_{Ak}(\mathbf{x}',\lambda) - \left\langle \hat{\zeta}_{Ak} \right\rangle\right). \end{aligned} \tag{47}$$

Знайдені вирази (40)–(47) дозволяють знайти розкладення огрубленого статистичного оператора σ за малими степенями ґрадієнтів $\zeta_A(\mathbf{x})$ та малою взаємодією між підсистемами $\hat{V}$:

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sigma^{(0,0)}(\mathbf{x}) + \sigma^{(0,1)}(\mathbf{x}) + \sigma^{(1,0)}(\mathbf{x}) + \ldots. \tag{48}$$

Тут і далі для будь-якої величини D, яку обчислюємо в межах теорії збурень, уведемо позначення $D^{(n,m)}$, згідно з яким величина $D^{(n,m)}$ має n-й порядок теорії збурень за ґрадієнтами величин $\zeta_A(\mathbf{x})$ та m-й порядок теорії збурень за взаємодією $\hat{V}$. Прирівнюючи у (28) з урахуванням (41)–(47) величини нульового порядку за ґрадієнтами та взаємодією, отримаємо

$$\sigma^{(0,0)}(\mathbf{x}) = w^{(0)}(\mathbf{x}), \tag{49}$$

де, відповідно до (42), термодинамічний потенціял $\Omega(\mathbf{x}) \equiv \Omega(Y(\mathbf{x}))$ та термодинамічні сили $Y_A(\mathbf{x})$ мають обчислюватись із співвідношень

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sp}\, w^{(0)}(\mathbf{x}) = 1, \\ &\mathrm{Sp}\, w^{(0)}(\mathbf{x})\, \hat{\zeta}_A(0) = \zeta_A(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{50}$$

Зазначимо, що статистичний оператор $\sigma^{(0,0)}(\mathbf{x})$, згідно з (44), збігається з рівноважним розподілом Ґіббса (21), якщо в останньому замінити величину Y_A на $Y_A(\mathbf{x})$. Через це статистичний оператор $w^{(0)}(\mathbf{x})$, що визначається виразом (44), називають локально-рівноважним розподілом Ґіббса.

Процедура подальшого застосування теорії збурень багато в чому подібна до викладеної досить докладно у [2], тому наведемо тут лише відповіді. Зазначимо при цьому, що суттєвим в обчисленнях є використання деяких властивостей симетрії величин, які ми ввели вище. А саме, розгляньмо властивості симетрії введених польових операторів $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ та $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ (див. (6), (12), (13)) при перетвореннях просторового віддзеркалення й обернення часу. Якщо ввести дію унітарного оператора просторового віддзеркалення $\mathcal{P}$ на польові оператори системи $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ та $\hat{\psi}(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} &\hat{\varphi}'(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}(-\mathbf{x}) = \mathcal{P}\hat{\varphi}(\mathbf{x})\mathcal{P}^{+}, \\ &\hat{\psi}'(\mathbf{x}) = \hat{\psi}(-\mathbf{x}) = \mathcal{P}\hat{\psi}(\mathbf{x})\mathcal{P}^{+} \end{aligned} \tag{51}$$

і вважати, що дія оператора обернення часу $\mathcal{T}$ на ці ж польові оператори визначається виразом:

$$\begin{aligned} &\hat{\varphi}'(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}(\mathbf{x})^{*} = \mathcal{T}\hat{\varphi}(\mathbf{x})\mathcal{T}^{+}, \\ &\hat{\psi}'(\mathbf{x}) = \hat{\psi}(\mathbf{x})^{*} = \mathcal{T}\hat{\psi}(\mathbf{x})\mathcal{T}^{+}, \end{aligned}$$

то легко впевнитись, що оператори густин адитивних інтеґралів руху $\hat{\zeta}_A(\mathbf{x})$ та їх потоків $\hat{\zeta}_{Ak}(\mathbf{x})$, а також самі адитивні інтеґрали руху $\hat{\gamma}_A$ (див. (22)) при оберненні часу й просторовому віддзеркаленні перетворюються згідно з формулами [2]:

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}\mathcal{P}\hat{\zeta}_A(\mathbf{x})(\mathcal{P}\mathcal{T})^{+} = \hat{\zeta}^{*}_A(-\mathbf{x}), \\ &\mathcal{T}\mathcal{P}\hat{\gamma}_A(\mathcal{T}\mathcal{P})^{-1} = \hat{\gamma}^{*}_A, \\ &\mathcal{T}\mathcal{P}\hat{\zeta}_{Ak}(\mathbf{x})(\mathcal{P}\mathcal{T})^{+} = \hat{\zeta}^{*}_{Ak}(-\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{52}$$

Використання зазначеної теорії збурень після відповідних обчислень дає змогу нам прийти до таких виразів для статистичного оператора $\sigma^{(0,1)}(\mathbf{x})$ у першому порядку за малою взаємодією:

$$\sigma^{(0,1)}(\mathbf{x}) = -i\int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{i\mathcal{H}_0\tau}\left[\hat{V}, w^{(0)}(\mathbf{x})\right] e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \tag{53}$$

та $\sigma^{(1,0)}(\mathbf{x})$ у першому порядку за малими ґрадієнтами параметрів скороченого опису

$$\begin{aligned} &\sigma^{(1,0)}(\mathbf{x}) = w^{(0)}_m(\mathbf{x})\,\sigma^{(1,0)}_p(\mathbf{x}) + w^{(0)}_p(\mathbf{x})\,\sigma^{(1,0)}_m(\mathbf{x}), \\ &\sigma^{(1,0)}_p(\mathbf{x}) = w^{(1)}_p(\mathbf{x}), \\ &\sigma^{(1,0)}_m(\mathbf{x}) = w^{(1)}_m(\mathbf{x}) + \frac{\partial Y_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_k} w^{(0)}_m(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^{0} d\tau \int_0^1 d\lambda \int d^3x' \left\{ e^{i\mathcal{H}_0\tau}\left(\hat{\zeta}'_{\alpha k}(\mathbf{x}',\lambda) - \left\langle \hat{\zeta}'_{\alpha k}\right\rangle_m\right) e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\right\}, \end{aligned} \tag{54}$$

де оператори $w^{(1)}_m(\mathbf{x})$ і $w^{(1)}_p(\mathbf{x})$ дано виразами:

$$\begin{aligned} w^{(1)}_m(\mathbf{x}) &= -\frac{\partial Y_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_k} w^{(0)}_m(\mathbf{x}) \int_0^1 d\lambda \int d^3x' x'_k \left(w^{(0)-\lambda}_m \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}')\, w^{(0)\lambda}_m - \left\langle \hat{\zeta}_\alpha \right\rangle_m \right), \\ w^{(1)}_p(\mathbf{x}) &= -\frac{\partial Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})}{\partial x_k} w^{(0)}_p(\mathbf{x}) \int_0^1 d\lambda \int d^3x' x'_k \left(w^{(0)-\lambda}_p \hat{f}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}')\, w^{(0)\lambda}_p - \left\langle \hat{f}_{\mathbf{p}} \right\rangle_p \right) \end{aligned} \tag{55}$$

і введено позначення

$$\langle \ldots \rangle_m = \mathrm{Sp}\, w^{(0)}_m \ldots, \quad \langle \ldots \rangle_p = \mathrm{Sp}\, w^{(0)}_p \ldots, \quad \hat{\zeta}'_{\alpha j}(\mathbf{x}) = \hat{\zeta}_{\alpha j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \left\langle \hat{\zeta}_{\alpha j} \right\rangle_m}{\partial \zeta_\beta} \hat{\zeta}_\beta(\mathbf{x}).$$

Для спрощення відповідей (53), (54) ми суттєво використали (18) та ввели величини

$$w_p^{(0)}(\mathbf{x}) = e^{\{\Omega_p(\mathbf{x}) - Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\hat{\gamma}_{\mathbf{p}}\}}, \quad w_m^{(0)}(\mathbf{x}) = e^{\{\Omega_m(\mathbf{x}) - Y_\alpha(\mathbf{x})\hat{\gamma}_\alpha\}}, \tag{56}$$

виходячи з того, що з (44), а також із співвідношень $\left[\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{f}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\right] = 0$, $[\hat{\gamma}_\alpha, \hat{\gamma}_{\mathbf{p}}] = 0$ (див. у цьому зв'язку (13)) випливає справедливість рівностей

$$\Omega(\mathbf{x}) = \Omega_p(\mathbf{x}) + \Omega_m(\mathbf{x}), \quad \Omega(\mathbf{x}) = \Omega_p(\mathbf{x}) + \Omega_m(\mathbf{x}). \tag{57}$$

Термодинамічні потенціяли $\Omega_m(\mathbf{x})$, $\Omega_p(\mathbf{x})$ і термодинамічні сили $Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$, $Y_\alpha(\mathbf{x})$ в (58), відповідно до (50), знаходимо зі співвідношень

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sp}\, w_m^{(0)}(\mathbf{x})\,\hat{\zeta}_\alpha(0) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}), \\ &\mathrm{Sp}\, w_p^{(0)}(\mathbf{x})\,\hat{f}_{\mathbf{p}}(0) = f_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}), \\ &\mathrm{Sp}\, w_m^{(0)}(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathrm{Sp}\, w_p^{(0)}(\mathbf{x}) = 1. \end{aligned} \tag{58}$$

Зазначимо, що оператор $\sigma_p^{(1,0)}(\mathbf{x})$ не містить операторів, що стосуються середовища, а оператор $\sigma_m^{(1,0)}(\mathbf{x})$ не містить операторів, що належать до частинок, які взаємодіють із середовищем, причому $\mathrm{Sp}\,\sigma_m^{(1,0)}(\mathbf{x}) = 0$ та $\mathrm{Sp}\,\sigma_p^{(1,0)}(\mathbf{x}) = 0$.

Отримані вирази (53)–(55) дають змогу нам виписати рівняння руху для параметрів скороченого опису у другому наближенні теорії збурень, що ми розвиваємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_A(\mathbf{x})}{\partial t} &= L_A^{(1,0)}(\mathbf{x}) + L_A^{(0,1)}(\mathbf{x}) \\ &\quad + L_A^{(1,1)}(\mathbf{x}) + L_A^{(0,2)}(\mathbf{x}) + L_A^{(2,0)}(\mathbf{x}), \\ L_A^{(1,0)}(\mathbf{x}) &= -\frac{\partial}{\partial x_k}\mathrm{Sp}\, w^{(0)}(\mathbf{x})\,\hat{\zeta}_{Ak}(0), \\ L_A^{(2,0)}(\mathbf{x}) &= -\frac{\partial}{\partial x_k}\mathrm{Sp}\,\sigma^{(1,0)}(\mathbf{x})\,\hat{\zeta}_{Ak}(0), \\ L_A^{(0,1)}(\mathbf{x}) &= i\mathrm{Sp}\, w^{(0)}(\mathbf{x})\left[\hat{V}, \hat{\zeta}_A(0)\right], \\ L_A^{(0,2)}(\mathbf{x}) &= i\mathrm{Sp}\,\sigma^{(0,1)}(\mathbf{x})\left[\hat{V}, \hat{\zeta}_A(0)\right], \\ L_A^{(1,1)}(\mathbf{x}) &= i\mathrm{Sp}\,\sigma^{(1,0)}(\mathbf{x})\left[\hat{V}, \hat{\zeta}_A(0)\right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_k}\mathrm{Sp}\,\sigma^{(0,1)}(\mathbf{x})\,\hat{\zeta}_{Ak}(0). \end{aligned} \tag{59}$$

IV. РІВНЯННЯ РУХУ ДЛЯ ПАРАМЕТРІВ СКОРОЧЕНОГО ОПИСУ НА КІНЕТИЧНОМУ ЕТАПІ ЕВОЛЮЦІЇ ЧАСТИНОК, ЩО ВЗАЄМОДІЮТЬ ІЗ ГІДРОДИНАМІЧНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

У цьому розділі ми проаналізуємо вирази (59) і наведемо ряд обчислень, кінцевим результатом яких стане пов'язана система рівнянь, яка складається з кінетичного для частинок, що взаємодіють із середовищем, та рівнянь руху для гідродинамічних параметрів опису середовища.

Відзначимо спочатку, що для віґнерівської функції розподілу $f(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, згідно з формулами (32), (42), можна отримати вираз

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathrm{Sp}\, w_p^{(0)}(\mathbf{x})\, a_{\mathbf{p}}^{+} a_{\mathbf{p}}, \tag{60}$$

звідки можна знайти явну залежність від $Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ (для визначености будемо надалі вважати частинки, що взаємодіють із середовищем, ферміевськими):

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \left(e^{Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})} + 1\right)^{-1}. \tag{61}$$

Перейдімо тепер до обчислення величин $L_A^{(i,k)}(\mathbf{x})$, визначених виразами (59). Насамперед, використовуючи (23), (58), легко впевнитись у тому, що величина $L_A^{(0,1)}(\mathbf{x})$ дорівнює нулеві

$$L_A^{(0,1)}(\mathbf{x}) = i\mathrm{Sp}\, w^{(0)}(\mathbf{x})\left[\hat{V}, \hat{\zeta}_A(0)\right] = 0. \tag{62}$$

Величину $L_A^{(0,2)}(\mathbf{x})$

$$L_A^{(0,2)}(x) = \frac{i}{\mathcal{V}}\mathrm{Sp}\,\sigma^{(0,1)}(\mathbf{x})\left[\hat{V}, \hat{\gamma}_A\right] \tag{63}$$

при $A = \mathbf{p}$ з урахуванням (53), (62) можна записати так:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{p}}^{(0,2)}(\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{Sp}\Big\{ e^{i\mathcal{H}_0\tau} \\ &\quad \times \left[\hat{V}, w^{(0)}(\mathbf{x})\right] e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \left[\hat{V}, a_{\mathbf{p}}^{+} a_{\mathbf{p}}\right] \Big\}. \end{aligned} \tag{64}$$

Повністю повторюючи процедуру, детально наведену в [2], прийдемо до такого вигляду цієї величини

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{p}}^{(0,2)}(\mathbf{x}) &= 2\pi \sum_{1,2} \delta_{2\mathbf{p}} \\ &\quad \times \Big\{ f_1(\mathbf{x})\left(1 - f_2(\mathbf{x})\right) I_{2,1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \mathbf{x}) \\ &\quad - f_2(\mathbf{x})\left(1 - f_1(\mathbf{x})\right) I_{1,2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1, \mathbf{x}) \Big\}. \end{aligned} \tag{65}$$

Для обчислення $L_{\mathbf{p}}^{(0,2)}(\mathbf{x})$ уведено кореляційну функцію (див. (56), (31)):

$$\begin{aligned} I_{1,2}(\tau, \mathbf{x}) &\equiv \left\langle \hat{\mathcal{J}}(2,1;\tau)\, \hat{\mathcal{J}}(1,2) \right\rangle_m \\ &= \mathrm{Sp}\, w_m^{(0)}(\mathbf{x})\, \hat{\mathcal{J}}(2,1;\tau)\, \hat{\mathcal{J}}(1,2), \end{aligned} \tag{66}$$

де використані нові позначення

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{J}}(1,2;\tau) = e^{i\mathcal{H}_m\tau}\, \hat{\mathcal{J}}(1,2)\, e^{-i\mathcal{H}_m\tau}, \\ &\hat{V}(\tau) = \sum_{1,2} \hat{\mathcal{J}}(1,2;\tau)\, a_1^{+} a_2, \end{aligned} \tag{67}$$

та її спектральну функцію $I_{1,2}(\omega, \mathbf{x})$:

$$I_{1,2}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \mathcal{J}_{1,2}(\tau, \mathbf{x})\, e^{i\omega\tau}. \tag{68}$$

Якщо розглянути систему операторів $\hat{\gamma}_\alpha$ (див. (7)), що комутують між собою, де $\hat{\gamma}_0 = \mathcal{H}_m$ — енерґія середовища, $\hat{\gamma}_i = \hat{P}_i^{(m)}$ — імпульс, $\hat{\gamma}_4 = \hat{M}^{(m)}$ — маса середовища, та ввести власні значення цих операторів формулами $(\gamma_0)_n = \mathrm{E}_n^{(m)}$, $(\gamma_i)_n = \left(P_i^{(m)}\right)_n$, $(\gamma_4)_n = M_n^{(m)}$, то

$$\begin{aligned} I_{1,2}(\tau, \mathbf{x}) &= \sum_{n,m} \left(w_0^{(m)}(\mathbf{x})\right)_n \\ &\times \left|\hat{\mathcal{J}}_{m,n}(1,2)\right|^2 e^{i\tau(\mathrm{E}_n - \mathrm{E}_m)}, \\ I_{1,2}(\omega, \mathbf{x}) &= \sum_{n,m} \left(w_0^{(m)}(\mathbf{x})\right)_n \\ &\times \left|\hat{\mathcal{J}}_{m,n}(1,2)\right|^2 \delta(\omega + \mathrm{E}_n - \mathrm{E}_m), \end{aligned} \tag{69}$$

звідки, як легко впевнитись, випливає, що $I_{1,2}(\omega, \mathbf{x}) \geqslant 0$.

Ураховуючи далі, що оператор взаємодії $\hat{V}$ комутує з оператором повного імпульсу системи:

$$\left[V, \hat{\mathbf{P}}^{(m)} + \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^{+} a_{\mathbf{p}}\right] = 0, \tag{70}$$

легко побачити, що матричні елементи $\hat{\mathcal{J}}_{m,n}(1,2)$ не дорівнюють нулеві тільки в тому разі, якщо $\mathbf{P}_n + \mathbf{p}_1 - \mathbf{P}_m - \mathbf{p}_2 = 0$. Виходячи з цього, з використанням (2), (69), прийдемо до такої умови симетрії для величини $I_{1,2}(\omega, \mathbf{x})$:

$$I_{2,1}(-\omega, \mathbf{x}) = I_{1,2}(\omega, \mathbf{x})\, e^{\left(-Y_0(\mathbf{x})\omega - Y_i(\mathbf{x})(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)_i\right)}.$$

Підставляючи (71) до (65), знайдемо кінцевий вираз для інтеґрала зіткнень частинок:

$$\begin{aligned} &L_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \equiv L_{\mathbf{p}}^{(0,2)}(\mathbf{x}) = 2\pi \sum_{1,2} \delta_{2\mathbf{p}} \\ &\times I_{1,2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1, \mathbf{x}) \left\{(1 - f_2(\mathbf{x}))\, f_1(\mathbf{x})\right. \\ &\left.\times e^{\left(-Y_0(\mathbf{x})(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - Y_i(\mathbf{x})(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)_i\right)} - f_2(\mathbf{x})(1 - f_1(\mathbf{x}))\right\}. \end{aligned} \tag{71}$$

Відзначимо, що вираз для інтеґрала зіткнень (71) у просторово-однорідному випадку вперше отримано в [2].

Із виразу випливає умова рівноваги між підсистемами середовища та частинок. Справді, легко безпосередньо впевнитись, що інтеґрал зіткнень $L_{\mathbf{p}}^{(0,2)}(\mathbf{x})$ обертається нулем, $L_{\mathbf{p}}^{(0,2)}(\mathbf{x}) = 0$, якщо функція розподілу $f(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ у (71) визначається виразом (61), у якому величина $Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ має вигляд:

$$Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x})\, \varepsilon_{\mathbf{p}} + Y_i(\mathbf{x})\, p_i + c(\mathbf{x}), \tag{72}$$

де $c(\mathbf{x})$ — довільна функція, яка не залежить від $\mathbf{P}$. Фізичний сенс цього співвідношення полягає в тому, що частинки перебувають у рівновазі із середовищем тільки тоді, коли їх температура та середня швидкість дорівнюють температурі та середній швидкості середовища. Зазначимо також, що при довільній функції розподілу $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ у (71) інтеґрал зіткнень задовольняє умову

$$\sum_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{p}}^{(0,2)} = 0, \tag{73}$$

що є віддзеркаленням закону збереження числа частинок, що взаємодіють із середовищем.

Знайдемо тепер величини $L_\alpha^{(0,2)}(\mathbf{x})$, які визначаються виразом (63) при $A = \alpha$. Оскільки взаємодія не змінює маси системи, то $\left[\hat{V}, \hat{\gamma}_4\right] = 0$. Тому з (63) при $\alpha = 4$ маємо:

$$L_4^{(0,2)}(\mathbf{x}) = 0. \tag{74}$$

Із (70) випливає, що $[V, \hat{\gamma}_i] = -\sum_{\mathbf{p}} p_i a_{\mathbf{p}}^{+} a_{\mathbf{p}}$. Підставляючи це співвідношення до (63) при $\alpha = i$, отримаємо:

$$L_i^{(0,2)}(\mathbf{x}) = -\sum_{\mathbf{p}} p_i L_{\mathbf{p}}^{(0,2)}(\mathbf{x}). \tag{75}$$

Далі, впевнившись у справедливості рівности

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sp}\, w^{(0)}(\mathbf{x}) \left[V(\tau), \left[\hat{V}, \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_p\right]\right] \\ &= \mathrm{Sp}\, w^{(0)}(\mathbf{x}) \left[\hat{V}, \left[V(-\tau), \mathcal{H}_0\right]\right] \\ &= -i\mathrm{Sp}\, w^{(0)}(\mathbf{x}) \left[\hat{V}, \frac{\partial V(-\tau)}{\partial \tau}\right], \end{aligned} \tag{76}$$

із (63), (70) при $\alpha = 0$ здобудемо:

$$L_0^{(0,2)}(\mathbf{x}) = -\sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{p}}^{(0,2)}(\mathbf{x}). \tag{77}$$

Співвідношення (74)–(77) можна записати компактніше:

$$L_\alpha^{(0,2)}(\mathbf{x}) = -\sum_{\mathbf{p}} \chi_\alpha(\mathbf{p}) L_{\mathbf{p}}^{(0,2)}(\mathbf{x}), \tag{78}$$

якщо ввести до розгляду величини $\chi_\alpha(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned} \chi_0(\mathbf{p}) &= \frac{p^2}{2m}, \\ \chi_i(\mathbf{p}) &= p_i, \\ \chi_4(\mathbf{p}) &= m. \end{aligned} \tag{79}$$

Величини $L_A^{(1,1)}(\mathbf{x})$, що містяться в (59), ми в рівняннях руху враховувати не будемо. Можна безпосередньо впевнитись, що вони дорівнюють нулеві,

$$L_A^{(1,1)}(\mathbf{x}) = 0, \tag{80}$$

якщо величина $\hat{\mathcal{J}}(1,2)$ (див. (31), (33)) залежить тільки від оператора густини частинок середовища.

Отримаємо останні величини в (59). Для частинок, що взаємодіють із середовищем, легко прийти до виразів:

$$\begin{aligned} &L_{\mathbf{p}}^{(1,0)}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \mathrm{Sp}\, w^{(0)}(\mathbf{x})\, \hat{\zeta}_{Ak}(0) = -\frac{p_k}{m} \frac{\partial}{\partial x_k} f(\mathbf{p}, \mathbf{x}), \\ &L_{\mathbf{p}}^{(2,0)}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \tag{81}$$

Для середовища ($A=\alpha$) величини $L_\alpha^{(1,0)}(\mathbf{x})$ и $L_\alpha^{(2,0)}(\mathbf{x})$ мають вигляд:

$$L_\alpha^{(1,0)}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\mathrm{Sp}^{(m)} w_m^{(0)}(\mathbf{x})\,\hat{\zeta}_{\alpha k}(0) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x}), \tag{82}$$

$$L_\alpha^{(2,0)}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\mathrm{Sp}^{(m)} \sigma_m^{(1,0)}(\mathbf{x})\,\hat{\zeta}_{\alpha k}(0) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{\alpha k}^{(1)}(\mathbf{x}). \tag{83}$$

Величина $L_\alpha^{(1,0)}(\mathbf{x})$ описує гідродинаміку ідеальної рідини, а величина $L_\alpha^{(2,0)}(\mathbf{x})$ робить внесок до гідродинаміки дисипативних членів. Вигляд цих величин є добре відомим, а обчислення їх у межах наведеної теорії збурень досить докладно наведено в [2]. Через це подамо тут лише кінцеві результати.

Потоки $\zeta_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x})$ гідродинамічних параметрів опису середовища в головному наближенні теорії збурень є такими:

$$\begin{aligned}
&\zeta_{4k}^{(0)}(\mathbf{x}) \equiv j_k^{(0)}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\,u_k(\mathbf{x}), \\
&\zeta_{ik}^{(0)}(\mathbf{x}) \equiv t_{ik}^{(0)}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})\,\delta_{ik} + \rho(\mathbf{x})\,u_i(\mathbf{x})\,u_k(\mathbf{x}), \\
&\zeta_{0k}^{(0)}(\mathbf{x}) \equiv q_k^{(0)}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})\,u_k(\mathbf{x}) + \varepsilon_0(\mathbf{x})\,u_k(\mathbf{x}) \\
&+\frac{1}{2}\rho(\mathbf{x})\,u^2(\mathbf{x})\,u_k(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{84}$$

де $\beta(\mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}) = 1/T(\mathbf{x})$ — величина, обернена до температури $T(\mathbf{x})$, $\pi_k(\mathbf{x}) = -Y_k(\mathbf{x})\,\rho(\mathbf{x})/Y_0(\mathbf{x})$, а тому величина $u_k(\mathbf{x}) = -Y_k(\mathbf{x})/Y_0(\mathbf{x}) = \pi_k(\mathbf{x})/\rho(\mathbf{x})$ є локальною швидкістю середовища. $\varepsilon_0(\mathbf{x}) = \mathrm{Sp}^{(m)} w_m^{(0)}(\mathbf{x})\,\hat{\varepsilon}(0)$ — густина енергії середовища в системі відліку, в якій система як ціле перебуває у стані спокою (густина внутрішньої енергії), і $p(\mathbf{x})$ — тиск, що визначається формулою

$$p(\mathbf{x}) = \mathrm{Sp}\, w_m^{(0)}(\mathbf{x})\,\hat{t}_{kl}(0). \tag{85}$$

Вираз для $\zeta_{\alpha k}^{(1)}(\mathbf{x})$ має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\zeta_{4k}^{(1)}(\mathbf{x}) \equiv j_k^{(1)}(\mathbf{x}) = 0, \\
&\zeta_{ik}^{(1)}(\mathbf{x}) \equiv t_{ik}^{(1)}(\mathbf{x}) = -\zeta\delta_{ik}\frac{\partial u_l(\mathbf{x})}{\partial x_l} \\
&-\eta\left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l(\mathbf{x})}{\partial x_l}\right), \\
&\zeta_{0k}^{(1)}(\mathbf{x}) \equiv q_k^{(1)}(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x})\,t_{ik}^{(1)}(\mathbf{x}) + \frac{\kappa}{\beta^2(\mathbf{x})}\frac{\partial\beta(\mathbf{x})}{\partial x_k}.
\end{aligned} \tag{86}$$

Тут η, ζ — коефіцієнти першої та другої в'язкости, а κ — коефіцієнт теплопровідности. У термінах кореляційних функцій $\left\langle \hat{a}\hat{b}\right\rangle_{x,t}$:

$$\left\langle \hat{a}\hat{b}\right\rangle_{\mathbf{x},t} = \mathrm{Sp}\, w_m^{(0)}\left(\hat{a}(\mathbf{x},t) - \langle\hat{a}\rangle_m\right)\left(\hat{b}(0) - \left\langle\hat{b}\right\rangle_m\right), \tag{87}$$
$$\hat{a}(\mathbf{x},t) \equiv e^{i\mathcal{H}_m\tau}\hat{a}(\mathbf{x})e^{-i\mathcal{H}_m\tau}$$

кінетичні коефіцієнти η, ζ та κ згідно з [2], можна записати так (див. (9))

$$\begin{aligned}
&\eta = \frac{1}{2}\beta\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\tau\int d^3x\left\langle\hat{t}_{12}\hat{t}_{12}\right\rangle_{x,\tau}, \\
&\zeta = \frac{1}{2}\beta\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\tau\int d^3x\left\langle\hat{t}_{ik}\hat{t}_{ik}\right\rangle_{x,\tau}, \\
&\kappa = \frac{\beta^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\tau\int d^3x\left\langle\hat{q}'_l\hat{q}'_l\right\rangle_{x,\tau}, \\
&\hat{q}'_l(\mathbf{x}) = \hat{q}_l(\mathbf{x}) - \frac{\partial\langle\hat{q}_l\rangle}{\partial\zeta_\alpha}\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{88}$$

Таким чином, рівняння руху для досліджуваної системи має на цьому етапі еволюції такий вигляд:

$$\frac{\partial f(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{p_k}{m}\frac{\partial f(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial x_k} = L_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}), \tag{89}$$

$$\frac{\partial\zeta_a(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{\alpha k}^{(1)}(\mathbf{x}) = L_\alpha(\mathbf{x}), \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = 2\pi\sum_{1,2}\delta_{2\mathbf{p}}\Big\{&f_1(\mathbf{x})\,(1-f_2(\mathbf{x}))\,I_{2,1}(\varepsilon_1-\varepsilon_2,\mathbf{x}) \\
&-f_2(\mathbf{x})\,(1-f_1(\mathbf{x}))\,I_{1,2}(\varepsilon_2-\varepsilon_1,\mathbf{x})\Big\},
\end{aligned} \tag{91}$$

$$L_\alpha(\mathbf{x}) = -\sum_{\mathbf{p}}\chi_\alpha(\mathbf{p})L_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}). \tag{92}$$

Ці рівняння з урахуванням формул (66)–(68), (79), (84)–(88) і є пов'язаною системою рівнянь, що описує кінетику просторово-неоднорідних станів частинок, які слабко взаємодіють із нерівноважним гідродинамічним середовищем. Така система рівнянь має описувати, наприклад, кінетику нейтронів, що розповсюджуються в гідродинамічному середовищі без їх поглинання та розмноження середовищем.

V. ГІДРОДИНАМІЧНИЙ ЕТАП ЕВОЛЮЦІЇ ПІДСИСТЕМИ ЧАСТИНОК

У цьому розділі ми розглянемо кінцевий етап формування рівноважного стану підсистем гідродинамічного середовища та частинок, що з ним взаємодіють.

У попередньому розділі показано, що інтеґрал зіткнень $L(\mathbf{p})$ стає нулем, якщо функція розподілу частинок має структуру

$$f_0(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \left(e^{(Y_0(\mathbf{x})\varepsilon_{\mathbf{p}}+Y_i(\mathbf{x})p_i+c(\mathbf{x}))}+1\right)^{-1}, \tag{93}$$

де $c(\mathbf{x})$ — довільна числова функція, а $Y_0(\mathbf{x})$ та $Y_i(\mathbf{x})$ — термодинамічні сили, що належать до середовища. Тому можна припустити, що кінетичний етап еволюції частинок закінчується формуванням просторово-неоднорідного локально рівноважного стану, коли частинки описуються функцією розподілу, близькою до (93):

$$f(\mathbf{p},\mathbf{x}) \approx f_0(\mathbf{p},\mathbf{x}). \tag{94}$$

Просторова неоднорідність такого стану може бути пов'язана як із неоднорідністю середовища, так і з неоднорідністю густини частинок. Його формування приводить до подальшого спрощення опису системи. Справді, у цьому випадку єдиним параметром, що характеризує підсистему частинок, стає не одночастинкова функція розподілу $f(\mathbf{p},\mathbf{x})$, а величина $c(\mathbf{x})$. Далі для зручности проведення викладок ми візьмемо за параметр опису не величину $c(\mathbf{x})$, а пов'язану з нею густину частинок

$$n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p},\mathbf{x}). \tag{95}$$

Тривалість формування локально-рівноважного розподілу τ_h визначається виключно інтенсивністю взаємодії $\hat{V}$ між підсистемами й ніяк не пов'язаний з розмірами просторових неоднорідностей системи. Тому при наявності досить великих просторових неоднорідностей, час релаксації яких великий, локально-рівноважний стан буде встановлюватись раніше від повної релаксації системи. Етап еволюції, що починається після формування локально-рівноважного стану, будемо називати гідродинамічним, оскільки на цьому етапі система описується шістьма гідродинамічними параметрами — густиною частинок $n(\mathbf{x})$ та п'ятьма параметрами середовища $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$, $\alpha = 1, i, 4$. Ми отримаємо замкнену систему рівнянь еволюції для цих шести параметрів, використовуючи основну концепцію методу скороченого опису та систему рівнянь (4.41). Згідно з цією концепцією ми будемо вважати функцію розподілу частинок $f(\mathbf{p},\mathbf{x})$ функціоналом шести параметрів опису: густини частинок $n(\mathbf{x})$ та гідродинамічних величин $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$, $\alpha = 1, i, 4$, пов'язаних із середовищем. Надалі ми вважатимемо, що температура системи далека від температури виродження підсистеми частинок, які взаємодіють із середовищем. Це припущення дозволить нам надалі знехтувати ефектами статистики частинок і розглядати їх функцію розподілу як больцманівську:

$$f(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \frac{1}{e^{Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})}+1} \approx e^{-Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})}. \tag{96}$$

Також завдяки цьому припущенню ми можемо лінеризувати інтеґрал зіткнень у рівнянні (89). У наступних викладках ми вважатимемо, що:

$$L_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \approx \mathcal{L}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = 2\pi \sum_{1,2} \delta_{2\mathbf{p}} \tag{97}$$
$$\times \left\{ f_1(\mathbf{x}) I_{2,1}(\varepsilon_1-\varepsilon_2,\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}) I_{1,2}(\varepsilon_2-\varepsilon_1,\mathbf{x}) \right\}.$$

Зазначимо, що таке припущення не є принциповим, однак значно спрощує обчислення. Відзначимо також, що у просторово-однорідному випадку,

$$f(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \left. f_0(\mathbf{p},\mathbf{x})\right|_{c(\mathbf{x})=\text{const}}, \qquad \zeta_\alpha(\mathbf{x}) = \text{const}, \tag{98}$$

рівняння (89) задовольняються автоматично. Цей факт дає змогу нам будувати теорію збурень для функції розподілу $f(\mathbf{p},\mathbf{x})$, що входить до системи рівнянь (89), за ґрадієнтами параметрів опису $n(\mathbf{x})$ та $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$.

Інтеґруючи кінетичне рівняння за імпульсом, приходимо до співвідношення

$$\frac{\partial n(\mathbf{x})}{\partial t} = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{\mathbf{p}} p_k f(\mathbf{p},\mathbf{x}). \tag{99}$$

Це співвідношення будемо суттєво використовувати розкладаючи функції розподілу частинок у ряд за ґрадієнтами гідродинамічних параметрів опису $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ та $n(\mathbf{x})$:

$$f(\mathbf{p}; n(\mathbf{x}), \zeta(\mathbf{x})) = f^{(0)}(\mathbf{p},\mathbf{x}) + f^{(1)}(\mathbf{p},\mathbf{x}) + f^{(2)}(\mathbf{p},\mathbf{x}) + \dots. \tag{100}$$

Легко впевнитись, що перший член цього ряду є локально-рівноважним розподілом

$$f^{(0)}(\mathbf{p},\mathbf{x}) = n(\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{p}; Y(\mathbf{x})), \qquad \phi(\mathbf{p}, Y) = \vartheta \exp(-Y_i p_i - Y_0 \varepsilon_{\mathbf{p}}), \tag{101}$$

оскільки він має зануляти інтеґрал зіткнень $\mathcal{L}\left(\mathbf{p}, f^{(0)}\right) = 0$. Згідно з визначенням (95) густини частинок $n(\mathbf{x})$, функція $\phi(\mathbf{x})$ (див. (101)) повинна задовольняти умову нормування $\sum_{\mathbf{p}} \phi(\mathbf{p}, Y) = 1$, звідки випливає, що

$$\vartheta = g^{-1}\left(\frac{Y_0}{2\pi m}\right)\exp\left(-\frac{mY_i^2}{2Y_0}\right), \tag{102}$$

де $g = \dfrac{\mathcal{V}}{(2\pi h)^3}$. Для побудови замкненої схеми розкладення (100) необхідно виконати умову

$$\sum_{p} f^{(i)}(\mathbf{p},\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{103}$$

згідно з якою порядки розкладення, вищі за нульовий, не перевизначать густини частинок $n(\mathbf{x})$.

Розкладення функції розподілу за ґрадієнтами параметрів опису повинно бути знайдене з кінетичного рівняння, що входить до системи (89). Для першого порядку такої теорії збурень маємо рівняння:

$$\left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}\right)^{(1)} + \frac{\mathbf{p}_k}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_k} = \mathcal{L}_{\mathbf{p}}\left(f^{(1)}\right), \qquad (104)$$

де під позначенням $\left(\frac{\partial \ldots}{\partial t}\right)^{(i)}$ слід розуміти похідну за часом, обчислену до i-го порядку за ґрадієнтами параметрів опису за допомогою кінетичного рівняння та рівнянь гідродинаміки з урахуванням формул (99)–(103). Так, для $i = 1$ отримуємо

$$\left(\frac{\partial f^{(0)}(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial t}\right)^{(1)} = \phi(\mathbf{p})\left(\frac{\partial n(\mathbf{x})}{\partial t}\right)^{(1)} \qquad (105)$$
$$+ n(\mathbf{x})\frac{\partial \phi(\mathbf{p},Y)}{\partial Y_\alpha}\frac{\partial Y_\alpha}{\partial \zeta_\beta}\left(\frac{\partial \zeta_\beta}{\partial t}\right)^{(1)}.$$

Із рівнянь гідродинаміки, які містить система (89), випливає, що

$$\left(\frac{\partial \zeta_\beta}{\partial t}\right)^{(1)} = -\frac{\partial \zeta^{(1)}_{\beta k}}{\partial x_k} - \sum_{\mathbf{p}} \chi_\beta(\mathbf{p})\,\mathcal{L}_{\mathbf{p}}\left(f^{(1)}\right). \qquad (106)$$

Легко помітити, однак, що врахування другого доданка в цій формулі приводить до появи квадратичної за $f^{(1)}$ нелінійности в кінетичному рівнянні. Тому ми знехтуємо цим доданком, обчислюючи величини $\left(\frac{\partial \zeta_\beta}{\partial t}\right)^{(1)}$, і врахуємо їх при знаходженні величин $\left(\frac{\partial \zeta_\beta}{\partial t}\right)^{(2)}$, що знадобляться нам при подальшому розвитку теорії збурень.

Виконуючи далі підсумовування за імпульсом у кінетичному рівнянні (89) з урахуванням формул (94) та (100), отримаємо такий вираз для $\left(\frac{\partial n(\mathbf{x})}{\partial t}\right)^{(1)}$ (див. (105)):

$$\left(\frac{\partial n(\mathbf{x})}{\partial t}\right)^{(1)} = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{\mathbf{p}} p_k f^{(0)}(\mathbf{p},\mathbf{x}), \qquad (107)$$

якому з використанням (94)–(100) легко надати вигляду

$$\left(\frac{\partial n(\mathbf{x})}{\partial t}\right)^{(1)} = -\nabla\left(n(\mathbf{x})\,\mathbf{u}\right). \qquad (108)$$

Для надання рівнянням, що здобуваються, звичної форми перейдемо в рівняннях гідродинаміки від густин адитивних інтеґралів руху $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ до нових змінних $\xi_\alpha(\mathbf{x})$, а саме густини маси $\xi_4(\mathbf{x}) \equiv \rho(\mathbf{x}) = \zeta_4(\mathbf{x})$, температури $\xi_0(\mathbf{x}) \equiv T(\mathbf{x}) = 1/Y_0(\mathbf{x})$ та локальної швидкости $\xi_i(\mathbf{x}) \equiv u_i(\mathbf{x}) = -Y_i(\mathbf{x})/Y_0(\mathbf{x})$.

Попередні змінні $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ пов'язані з новими змінними $\xi_\alpha(\mathbf{x})$ співвідношеннями: (див. також [2])

$$\zeta_0(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\rho(\mathbf{x})\,u^2(\mathbf{x}), \qquad (109)$$
$$\zeta_i(\mathbf{x}) = \pi_i(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\,u_i(\mathbf{x}),$$
$$\zeta_4(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}).$$

Тут $\varepsilon_0(\mathbf{x})$ — густина внутрішньої енерґії середовища, яка залежить від температури та густини маси середовища: $\varepsilon_0(\mathbf{x}) = \varepsilon_0(T(\mathbf{x}),\rho(\mathbf{x}))$. Величини $\zeta^{(0)}_{\alpha k}$ виражаються в термінах нових змінних співвідношеннями:

$$\zeta^{(0)}_{0k} = p(\mathbf{x})\,u_k(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x})\,u_k(\mathbf{x}), \qquad (110)$$
$$\zeta^{(0)}_{ik} = p(\mathbf{x})\,\delta_{ik} + \rho(\mathbf{x})\,u_i(\mathbf{x})\,u_k(\mathbf{x}),$$
$$\zeta^{(0)}_{4k} = \rho(\mathbf{x})\,u_k(\mathbf{x}).$$

Згідно з формулами (109), (110) рівняння гідродинаміки в бездисипативному наближенні приймають вигляд:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{(1)} = -u_k\frac{\partial T}{\partial x_k} - \Theta\frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \qquad (111)$$
$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^{(1)} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k} - u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$
$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k),$$

де введено позначення

$$\Theta = \left(p + \varepsilon_0 - \rho\left(\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \rho}\right)_T\right)\left(\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T}\right)^{-1}_\rho. \qquad (112)$$

Зазначимо, що з термодинаміки можна показати, що

$$\Theta = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho (\rho c_v)^{-1}. \qquad (113)$$

Таким чином, виходячи зі (105) з використанням виразів (106)–(111), прийдемо до наступного рівняння для визначення функції $f^{(1)}$

$$n\frac{p_k}{m}\frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + n\frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial u_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^{(1)} \qquad (114)$$
$$+ n\frac{p_k}{m}\frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x_k} + n\frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{(1)}$$
$$+ \frac{p_k}{m}\phi(\mathbf{p})\frac{\partial n}{\partial x_k} - \phi(\mathbf{p})\,u_k\frac{\partial n}{\partial x_k}$$
$$-\phi(\mathbf{p})\,n\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \mathcal{L}_{\mathbf{p}}\left(f^{(1)}\right),$$

якому після нескладних, але громіздких обчислень можна надати форми:

$$\frac{\tilde{p}_k}{m}\phi(\tilde{\mathbf{p}})\frac{\partial n}{\partial x_k} - n\phi(\tilde{\mathbf{p}})\frac{\tilde{p}_k}{\rho T}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\rho\frac{\partial \rho}{\partial x_k} \qquad (115)$$
$$+ n\phi(\tilde{\mathbf{p}})\left\{\frac{1}{mT}\left(\tilde{p}_i\tilde{p}_k - \frac{1}{3}\delta_{ik}\tilde{p}^2\right)\right.$$
$$\left. + \delta_{ik}\left(\frac{2}{3} - \frac{\Theta}{T}\right)\left(\frac{\tilde{p}^2}{2mT} - \frac{3}{2}\right)\right\}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$
$$+ n\phi(\tilde{\mathbf{p}})\frac{\tilde{p}_k}{mT}\left\{\left(\frac{\tilde{p}^2}{2mT} - \frac{3}{2}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{m}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\right\}\frac{\partial T}{\partial x_k} = \mathcal{L}_{\mathbf{p}}\left(f^{(1)}\right),$$

для чого ми ввели позначення $\tilde{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p} - m\mathbf{u}$. Відзначимо, що в термінах цих позначень явний вигляд функції $\phi(\mathbf{p})$ (див. (101)–(102)) дається виразом:

$$\phi(\tilde{\mathbf{p}}) = \frac{g^{-1}}{(2\pi mT)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\tilde{p}^2}{2mT}\right). \qquad (116)$$

Рівняння (115) є інтеґральним рівнянням для функції $f^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$. Його права частина, пов'язана з функцією $f^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ інтеґральним перетворенням, згідно зі (97) характеризується єдиним вектором $\tilde{\mathbf{p}}$. Ліва частина (115) є сумою декількох доданків, кожен із яких є добутком ґрадієнта якої-небудь гідродинамічної змінної та функцій, що теж визначаються єдиним вектором $\tilde{\mathbf{p}}$. Тому розв'язок цього рівняння можна шукати у вигляді

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}) &= -n\left\{\frac{2}{3} - \frac{\Theta}{T}\right\} F(\tilde{\mathbf{p}}) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \qquad (117)\\ &-\frac{n}{mT} B_{ik}(\tilde{\mathbf{p}}) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{m} A_k(\tilde{\mathbf{p}}) \frac{\partial n}{\partial x_k}\\ &-\frac{n}{\rho m} R_k(\tilde{\mathbf{p}}) \frac{\partial \rho}{\partial x_k} - \frac{n}{mT} G_k(\tilde{\mathbf{p}}) \frac{\partial T}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

де функції $A_k(\tilde{\mathbf{p}})$, $B_ik(\tilde{\mathbf{p}})$, $F(\tilde{\mathbf{p}})$, $G_k(\tilde{\mathbf{p}})$, $R_k(\tilde{\mathbf{p}})$ мають задовольняти рівняння

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{\mathbf{p}}(R_k, \xi) = -\phi(\tilde{\mathbf{p}}) \left(-\frac{m\tilde{p}_k}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T\right), \qquad (118)\\ &\mathcal{L}_{\mathbf{p}}(B_{ik}, \xi) = -\phi(\tilde{\mathbf{p}}) \left(\tilde{p}_i\tilde{p}_k - \frac{\delta_{ik}}{3}\tilde{p}^2\right),\\ &\mathcal{L}_{\mathbf{p}}(F, \xi) = -\phi(\tilde{\mathbf{p}}) \left(\frac{\tilde{p}^2}{2mT} - \frac{3}{2}\right),\\ &\mathcal{L}_{\mathbf{p}}(G_k, \xi) = -\phi(\tilde{\mathbf{p}})\tilde{p}_k \qquad (119)\\ &\times\left(\left(\frac{\tilde{p}^2}{2mT} - \frac{3}{2}\right) - \frac{m}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\right),\\ &\mathcal{L}_{\mathbf{p}}(A_k, \xi) = -\phi(\tilde{\mathbf{p}})\tilde{p}_k, \end{aligned}$$

з урахуванням умови (103), тобто $\sum_p f^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$.

Зважаючи далі на те, що єдиним вектором у рівняннях (118) є вектор $\tilde{\mathbf{p}}$, легко встановити векторну та тензорну структури величин $A_k(\tilde{\mathbf{p}})$, $B_ik(\tilde{\mathbf{p}})$, $F(\tilde{\mathbf{p}})$, $G_k(\tilde{\mathbf{p}})$, $R_k(\tilde{\mathbf{p}})$, що входять до (117), (118):

$$\begin{aligned} &A_k(\tilde{\mathbf{p}}) = A(\tilde{p})\tilde{p}_k, \quad F(\tilde{\mathbf{p}}) = F(\tilde{p}), \qquad (120)\\ &G_k(\tilde{\mathbf{p}}) = G(\tilde{p})\tilde{p}_k, \quad R_k(\tilde{\mathbf{p}}) = R(\tilde{p})\tilde{p}_k,\\ &B_{ik}(\tilde{\mathbf{p}}) = B(\tilde{p})\left(\tilde{p}_i\tilde{p}_k - \frac{1}{3}\tilde{p}^2\right), \end{aligned}$$

згідно з якими маємо кінцевий вираз для функції $f^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}) &= -\frac{A(\tilde{p})}{m}\tilde{p}_k\frac{\partial n}{\partial x_k} - n\left(\frac{2}{3} - \frac{\Theta}{T}\right) \qquad (121)\\ &\times F(\tilde{p})\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - n\frac{B(\tilde{p})}{mT}\left(\tilde{p}_i\tilde{p}_k - \frac{1}{3}\tilde{p}^2\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\\ &-n\frac{G(\tilde{p})}{mT}\tilde{p}_k\frac{\partial T}{\partial x_k} - n\frac{R(\tilde{p})}{\rho m}\tilde{p}_k\frac{\partial \rho}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Зазначимо також, що з умови (103) випливає обмеження на функцію $F(\tilde{p})$

$$\sum_{\mathbf{p}} F(p) = 0. \qquad (122)$$

Вираз (121) дає нам змогу отримати внесок у рівняння еволюції (99) для густини частинок, що взаємодіють із середовищем, членів, квадратичних за ґрадієнтами параметрів опису

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^{(2)} = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{\mathbf{p}} p_k f^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{x}). \qquad (123)$$

Обчислюючи явний вигляд правої частини цього виразу, слід урахувати властивості величин (див. (120)), що характеризують функцію $f^{(1)}(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{p}} \tilde{p}_j B_{ik}(\tilde{\mathbf{p}}) = 0, \quad \sum_{\mathbf{p}} \tilde{p}_j F(\tilde{\mathbf{p}}) = 0, \qquad (124)\\ &\sum_{\mathbf{p}} \tilde{p}_j G_k(\tilde{\mathbf{p}}) = \frac{\delta_{ik}}{3}\sum_{\tilde{\mathbf{p}}} \tilde{p}^2 G(\tilde{p}),\\ &\sum_{\mathbf{p}} \tilde{p}_j R_k(\tilde{\mathbf{p}}) = \frac{\delta_{ik}}{3}\sum_{\tilde{\mathbf{p}}} \tilde{p}^2 R(\tilde{p}),\\ &\sum_{\mathbf{p}} \tilde{p}_j A_k(\tilde{\mathbf{p}}) = \frac{\delta_{ik}}{3}\sum_{\tilde{\mathbf{p}}} \tilde{p}^2 A(\tilde{p}). \end{aligned}$$

Якщо ввести до розгляду такі позначення:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{3}\sum_{\tilde{\mathbf{p}}}\left(\frac{\tilde{p}}{m}\right)^2 A(\tilde{p}), \qquad (125)\\ D_T &= \frac{1}{3T}\sum_{\tilde{\mathbf{p}}}\left(\frac{\tilde{p}}{m}\right)^2 G(\tilde{p}),\\ D_\rho &= \frac{1}{3\rho}\sum_{\tilde{\mathbf{p}}}\left(\frac{\tilde{p}}{m}\right)^2 R(\tilde{p}), \end{aligned}$$

то рівняння еволюції (99) для густини частинок із точністю до другого порядку теорії збурень за ґрадієнтами параметрів опису (рівняння дифузії) можна записати так:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial n(\mathbf{x})}{\partial t} + \nabla(n(\mathbf{x})\mathbf{u}) \qquad (126)\\ &= \nabla(D\nabla n + D_T\nabla T + D_\rho\nabla\rho). \end{aligned}$$

Як легко бачити, коефіцієнт D описує дифузійний потік, викликаний неоднорідністю стану самих частинок, що взаємодіють із середовищем, D_T характеризує термодифузію, а коефіцієнт D_ρ описує дифузійний потік, пов'язаний з неоднорідністю густини середовища. Відзначимо, що коефіцієнти D та D_ρ, згідно зі (120), пов'язані між собою співвідношеннями

$$D_\rho = \frac{1}{\rho}\left(-\frac{m}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T\right)D. \qquad (127)$$

Далі, щоб одержати замкнуту систему рівнянь руху для досліджуваної системи, необхідно обчислити величини $\mathcal{L}_\alpha\left(f^{(1)}\right) = -\sum_{\mathbf{p}} \chi_\alpha(\mathbf{p})\mathcal{L}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\left(f^{(1)}\right)$, що стоять у правій частині рівнянь гідродинаміки (89) (див. також (79)). Для цього досить розглянути рівняння (115) як перший порядок розкладу $\mathcal{L}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ за ґрадієнтами гідродинамічних змінних. Помножуючи це рівняння на величини $\chi_\alpha(\mathbf{p})$ й виконуючи підсумовування за імпульсом, здобудемо:

$$\sum_{\mathbf{p}} \chi_4(\mathbf{p})\mathcal{L}_{\mathbf{p}}\left(f^{(1)}\right) = 0, \tag{128}$$

$$\sum_{\mathbf{p}} \chi_i(\mathbf{p})\mathcal{L}_{\mathbf{p}}\left(f^{(1)}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(nT) - \frac{nm}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i},$$

$$\sum_{\mathbf{p}} \chi_0(\mathbf{p})\mathcal{L}_{\mathbf{p}}\left(f^{(1)}\right) = \frac{3nT}{2}\left\{\frac{2}{3} - \frac{\Theta}{T}\right\}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

$$+u_i \sum_{\mathbf{p}} \chi_i(\mathbf{p})\mathcal{L}_{\mathbf{p}}\left(f^{(1)}\right).$$

Однак цих виразів ще недостатньо для того, щоб виписати рівняння гідродинаміки середовища також із точністю до другого порядку за просторовими ґрадієнтами параметрів опису системи, як це було зроблено у рівнянні (126). Необхідно знайти ще й величини $\mathcal{L}_\alpha\left(f^{(2)}\right)$ (див. (97), (100)). Відбираючи в кінетичному рівнянні (89), відповідно до (100), члени другого порядку за ґрадієнтами параметрів опису системи, маємо:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{p}}\left(f^{(2)}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{(2)} + \frac{p_k}{m}\frac{\partial}{\partial x_k}f^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{x}),$$

де (див. (109)).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{(2)} = n\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\alpha}\left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t}\right)^{(2)} + \varphi\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^{(2)} + \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \xi_\alpha}\right)\left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t}\right)^{(1)}$$
$$+ \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial n}\right)\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^{(1)} + \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \nabla_k \xi_\alpha}\right)\nabla_k\left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t}\right)^{(1)} + \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \nabla_k n}\right)\nabla_k\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^{(1)}. \tag{129}$$

Похідні $\left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t}\right)^{(2)}$ обчислюються за допомогою перетворень (109) з використанням виразів (84), (86). Як згадувалось вище, для обчислення цих величин слід також використати формули (128), що визначають величини $\mathcal{L}_\alpha\left(f^{(1)}\right)$. Після знаходження $\mathcal{L}_\alpha\left(f^{(2)}\right)$ за тим же рецептом, що й отримання формул (128), ми вже можемо виписати повну систему рівнянь руху, що описують еволюцію досліджуваної системи на гідродинамічному її етапі. Оскільки для цього треба провести досить прості по суті (але громіздкі) обчислення, наведемо тут лише кінцевий результат:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{u}) + \nabla\mathbf{\Phi} = 0, \tag{130}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{131}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)u_i + \frac{\nabla_i p}{\rho}\left(1 - \frac{mn}{\rho}\right) + \frac{\nabla_i(nT)}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{mn}{\rho}\right)\nabla_k(\eta u_{ik} + \zeta\delta_{ik}\nabla\mathbf{u})$$
$$+\frac{1}{\rho}\nabla_k(n\eta_n u_{ik} + \zeta_n\delta_{ik}\nabla\mathbf{u}) + \frac{m}{\rho}\left\{\rho\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} + n\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} + \Theta\frac{\partial \Phi_i}{\partial T} + \Phi_i\right\}\nabla\mathbf{u}$$
$$-\frac{m}{\rho}D\left\{\frac{\partial n}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \nabla_i(n\nabla\mathbf{u})\right\} - \frac{mn}{\rho}D_\rho\left\{\frac{\partial \rho}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \nabla_i(\rho\nabla\mathbf{u})\right\}$$
$$-\frac{mn}{\rho}D_T\left\{\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \nabla_i(\Theta\nabla\mathbf{u})\right\},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)T + \Theta(\nabla\mathbf{u})\left(1 - \frac{3n}{2\rho c_v}\right) + \frac{nT}{\rho c_v}(\nabla\mathbf{u})$$
$$= \frac{1}{\rho c_v}\left(1 - \frac{3n}{2\rho c_v}\right)\left\{\nabla(\kappa\nabla T) + \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\zeta - \frac{2\eta}{3}\right)\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2\right\}$$
$$+\frac{1}{\rho c_v}\nabla\{\kappa_n\nabla n + n\kappa_T\nabla T + n\kappa_\rho\nabla\rho\} + \frac{3}{2}(\nabla\mathbf{u})^2\left\{\rho n\frac{\partial \zeta_n}{\partial \rho} + \Theta n\frac{\partial \zeta_n}{\partial T} - \frac{2}{3}n\zeta_n\right\}$$
$$+\frac{1}{\rho c_v}\left\{\frac{m}{\rho}\mathbf{\Phi}\nabla p - \frac{3n\zeta_n}{2}\left(\frac{\Delta p}{\rho} - \frac{\nabla p\nabla\rho}{\rho^2} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)\right\},$$

де ми ввели позначення для деяких величин (див. також (87), (97), (118), (120))

$$\mathbf{\Phi} = -D\nabla n - nD_T\nabla T - nD_\rho\nabla\rho, \tag{132}$$

$$u_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}, \tag{133}$$

$$c_v = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T}\right)_\rho, \tag{134}$$

а також знайшли нові кінетичні коефіцієнти, пов'язані зі взаємодією частинок та середовища:

$$\kappa_n = \frac{1}{3}\sum_{\tilde{\mathbf{p}}}\left(\frac{\tilde{p}}{m}\right)^2\left(\frac{\tilde{p}^2}{2m} - \frac{3T}{2}\right)A(\tilde{p}), \tag{135}$$

$$\kappa_T = \frac{1}{3T}\sum_{\tilde{\mathbf{p}}}\left(\frac{\tilde{p}}{m}\right)^2\left(\frac{\tilde{p}^2}{2m} - \frac{3T}{2}\right)G(\tilde{p}),$$

$$\kappa_\rho = \frac{1}{3\rho}\sum_{\tilde{\mathbf{p}}}\left(\frac{\tilde{p}}{m}\right)^2\left(\frac{\tilde{p}^2}{2m} - \frac{3T}{2}\right)R(\tilde{p}),$$

$$\eta_n = \frac{1}{15}\sum_{\tilde{\mathbf{p}}}\left(\frac{\tilde{p}}{m}\right)^2\frac{\tilde{p}^2}{T}B(\tilde{p}), \tag{136}$$

$$\zeta_n = \left(\frac{2}{3} - \frac{\Theta}{T}\right)\frac{m}{3}\sum_{\tilde{\mathbf{p}}}\left(\frac{\tilde{p}}{m}\right)^2 F(\tilde{p}).$$

Рівняння (130) і становлять повну систему рівнянь, що описують гідродинамічний етап еволюції частинок, які взаємодіють з гідродинамічним середовищем.

VI. АНАЛІЗ РІВНЯНЬ ГІДРОДИНАМІКИ

Передусім звернімо увагу на те, що система рівнянь (130) містить члени, викликані взаємодією частинок і середовища, яких немає у звичних рівняннях гідродинаміки і які пов'язані з появою нових кінетичних коефіцієнтів. Рівняння (126) для густини частинок має структуру рівняння дифузії, причому у виразі для дифузійного потоку частинок $\mathbf{\Phi}$ (див. (132)) є три доданки. Перший описує дифузійний потік, викликаний ґрадієнтом густини частинок, другий доданок є дифузійним потоком, поява якого пов'язана з ґрадієнтом температури, а третій є потоком, викликаним ґрадієнтом густини самого середовища. Зі співвідношення (127) випливає, що для реальних систем коефіцієнт D_ρ від'ємний, $D_\rho < 0$ тобто, частинки "витісняються" частинками середовища зі щільніших до менш щільних його ділянок.

Розгляньмо тепер докладніше рівняння для швидкости середовища. Поява в ньому співмножника $(1 - mn/\rho)$ пояснюється тим, що на гідродинамічному етапі еволюції середовище рухається разом із "вмороженим" у нього газом частинок як єдине ціле, відповідно ефективна густина середовища в рівняннях змінюється на сумарну густину середовища та частинок. У межах нашої теорії, коли густина частинок уважається малою, тобто $mn \ll \rho$, цей співмножник близький до одиниці. Останній доданок у лівій частині рівняння для швидкости — $\nabla_i(nT)/\rho$ — описує внесок тиску частинок у рух системи. У лівій частині цього ж рівняння містяться члени, що характеризують дисипативні процеси, пов'язані з перенесенням імпульсу частинками. Так, поряд зі звичайним дисипативним членом, що описує дисипацію енерґії за рахунок в'язкости рідини, з'являється такий же за структурою член, що описує дисипацію енерґії за рахунок перенесення імпульсу частинками. Разом з коефіцієнтами першої та другої в'язкости середовища η й ζ з'являються коефіцієнти першої та другої в'язкости $n\eta_n$ й $n\zeta_n$, які пропорційні густині частинок. Оцінки співвідношень цих величин буде наведено дещо нижче. Останні ж чотири доданки в правій частині рівняння для середньої швидкости середовища виникають у зв'язку з перенесенням імпульсу дифузійним потоком частинок.

Рівняння для температури також містить нові, порівняно зі звичним рівнянням, доданки. Характерним для таких доданків є співмножник $(1 - 3n/(2\rho c_v))$, який описує внесок газу частинок до теплоємности. У межах запропонованої теорії цей співмножник теж близький до одиниці. Перший доданок у правій частині рівняння для температури описує перенесення тепла за рахунок теплопровідности середовища та його нагрівання, викликане в'язкими дисипативними процесами. Другий доданок пов'язаний з перенесенням тепла частинками з урахуванням як звичайної теплопровідности, так і перенесення енерґії дифузійним потоком частинок. Останні доданки описують дисипативні процеси, пов'язані зі взаємодією дифузійного потоку частинок з елементом середовища, що рухається з прискоренням, та процеси, викликані в'язкістю підсистеми частинок.

Звернімось тепер до оцінки різних кінетичних коефіцієнтів та характерних часів протікання різних дисипативних процесів. Оцінюючи коефіцієнти дифузії у τ наближенні, маємо:

$$|D_T| \sim \frac{1}{T}\frac{m}{m_m}D, \quad |D_\rho| \sim \frac{1}{T}\frac{m}{m_m}D. \tag{137}$$

Звичайно в системі відносні відхилення гідродинамічних параметрів від їхнього середнього значення невеликі. Наприклад, різниця між мінімальною та максимальною температурою в різних частинах системи набагато менша від мінімальної температури. Позначмо максимальне відхилення густини частинок від її середнього значення в деякий момет часу як δn, максимальне відхилення температури від її середнього значення — як δT, максимальне відхилення густини середовища від її середнього значення — як $\delta\rho$. Тоді легко знайти умови, при яких самодифузія частинок є найшвидшим (найбільш інтенсивним) із дифузійних процесів:

$$\frac{\delta n}{n} \gg \frac{m}{m_m}\frac{\delta T}{T}, \quad \frac{\delta n}{n} \gg \frac{m}{m_m}\frac{\delta\rho}{\rho}. \tag{138}$$

Для легких частинок, коли відношення m/m_m мале, така ситуація може реалізовуватися у випадку малости початкових збурень параметрів гідродинамічного середовища. У цьому разі нерівноважний стан підсистеми частинок описується рівнянням дифузії

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla (n\mathbf{u}) = D\Delta n, \tag{139}$$

у якому коефіцієнт дифузії D визначається рівноважними параметрами гідродинамічного середовища.

Наведемо тепер оцінки деяких характерних часів, пов'язаних з дисипативними процесами в системі. Позначмо характерні довжини вільного пробігу частинок і частинок середовища як b_m та b_p відповідно (причому через малу взаємодію частинок із середовищем маємо $b_m \ll b_p$), а їх середньоквадратичні швидкості як u_m та u_p. Літерою l позначимо характерні розміри просторових неоднорідностей системи. Із оцінки інтеґрала зіткнень τ — наближенням маємо

$$\mathcal{L}_{\mathbf{p}} (\mathbf{x}; f_0 (\mathbf{p}', \mathbf{x}') + \delta f_0) \sim -\delta f/\tau_h, \tag{140}$$
$$\tau_h \sim \frac{b_p}{u_p}.$$

У цій формулі τ_h — характерний час переходу системи до гідродинамічного етапу еволюції. Тепер ми можемо знайти характерний час релаксації τ_p за рахунок самодифузії частинок у випадку, коли середовище майже рівноважне. Оцінюючи величини, що входять до рівняння, яке описує еволюцію густини частинок у системі (130), здобудемо співвідношення $\dfrac{\delta n}{\tau_p} \sim D\dfrac{\delta n}{l^2}$. Користуючись рівняннями (118), (120) та (125), знайдемо:

$$\tau_p \sim \frac{l^2}{D} \sim \tau_h \frac{l^2}{b_p^2} \sim \frac{l^2}{\tau_h u_p^2}. \tag{141}$$

З останнього співвідношення ми бачимо, що якщо розмір самої системи більший за довжини вільного пробігу частинок, то в цій системі реалізується суттєво гідродинамічний етап еволюції частинок, що може бути описаний системою рівнянь (130).

Наведемо також оцінку внеску частинок у дисипативні процеси. Користуючись τ-наближеням та вважаючи сриредовище газоподібним, отримаємо

$$\frac{n\eta_n}{\eta} \sim \frac{n\kappa_T}{\kappa} \sim \frac{nm_m}{\rho}\sqrt{\frac{m_m}{m}}\frac{b_p}{b_m}. \tag{142}$$

Остання формула дає змогу нам оцінити внесок частинок у дисипативні процеси. Звідси видно (див. (130)), що цей внесок може бути суттєвим навіть за малої кількости частинок, тобто коли $1 \gg mn/\rho$.

---

[1] Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды в 3-х томах. Т. 2* (Киев, Наукова думка, 1970).

[2] А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики* (Москва, Наука, 1977).

[3] С. В. Пелетминский, А. Н. Тарасов, Укр. физ. журн. **26**, 473 (1981).

[4] С. В. Пелетминский, А. И. Соколовский, Теор. мат. физ. **18**, 121 (1974).

[5] E. P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932)

[6] С. В. Пелетминский, В. Д. Цуканов, Теор. мат. физ. **7**, 395 (1971).

A REDUCED DESCRIPTION METHOD IN THE DYNAMIC THEORY OF PARTICLES INTERACTING WITH MEDIUM

S. O. Nikolayenko[1], Yu. V. Slyusarenko[2]

[1]*Kharkiv National University, Ukraine*

[2]*National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology", Kharkiv, Ukraine*

e-mail: Slusarenko@kipt.kharkov.ua

In our work we consider spatially inhomogeneous states of particles, weakly interacting with hydrodynamic medium involving Bogolubov's reduced description method. It has been shown that such a system has both kinetic and hydrodynamic stages of evolution. On the kinetic stage a one-particle distribution function is a reduced description parameter for particles, and, therefore, a medium is described by five hydrodynamic parameters (density, energy density and velocity). The coupled system of equations of motion for reduced description parameters is obtained. A transition from the kinetic to hydrodynamic stage of evolution for particles interacting with the medium has been also studied using a reduced description method. The hydrodynamic parameters of the medium and the density of particles are chosen as the reduced description parameters. Consequently, a coupled system of equations, which completely describes the evolution of our system on the hydrodynamic stage, has been obtained. These equations can describe such systems as neutrons propagating into the hydrodynamic medium without multiplication and capture.