

ФОРМУВАННЯ ВЕЛИКОМАСШТАБНОЇ СТРУКТУРИ ВСЕСВІТУ: ТЕОРІЯ І СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Б. Новосядлий

*Астрономічна обсерваторія Львівського національного університету
імені Івана Франка, вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005, м. Львів*
(Отримано 22 січня 2007 р.; в остаточному вигляді — 30 червня 2007 р.)

Представлено огляд проблеми формування великомасштабної структури Всесвіту. Викладено теорію космологічних збурень у калібрувально-інваріантному підході, яку застосовано до опису конкретних елементів структури різного масштабу та флюктуацій температури реліктового випромінювання. Описано також сучасний стан спостережувальної космології та узгодженість теоретичних передбачень із експериментальними даними.

Ключові слова: космологічні моделі, теорія збурень, великомасштабна структура Всесвіту, флюктуації температури реліктового мікрохвильового випромінювання.

PACS number(s): 98.80.Ft, 98.80.Es, 98.65.Dx

ВСТУП

Формування великомасштабної структури Всесвіту є центральною проблемою сучасної космології. До її елементів відносять галактики, скупчення та надскупчення галактик, порожнини в їх розподілі, хмари нейтрального водню в міжгалактичному середовищі (Ly_α хмари), збурення густини, швидкості та метрики-простору часу в епоху космологічної рекомбінації, які зумовлюють флюктуації температури реліктового випромінювання. Характеристиками великомасштабної структури є просторові (дво- і триточкові) кореляційні функції галактик та багатих скупчень галактик, їх пекулярні швидкості, функція мас та рентгенівської світності скупчень галактик, розподіли об'єктів за червоними зміщеннями. Їхні значення залежать від спектра потужності скалярних збурень густини речовини на лінійній стадії розвитку, який називають початковим спектром збурень. Його форма (залежність амплітуди від масштабу) на великих масштабах (більших за масштаб горизонту частинки на момент рекомбінації) збігається з формою первісного спектра, який згенерований у ранню епоху внаслідок квантових флюктуацій метрики простору-часу. На менших масштабах — залежить від точних значень параметрів космологічної моделі та співвідношень густин компонентів речовини й енергії, які заповнюють Всесвіт.

Спостережувані властивості нашого Всесвіту вказують на те, що на ранній стадії ($10^{-43} \leq t \leq 10^{-10}$ сек) він пройшов принаймні через одну короткочасну епоху експоненційного розширення — інфляційну стадію. Такі моделі називають інфляційними космологічними моделями.

Ранні моделі інфляції передбачали масштабно-інваріантний первісний спектр потужності збурень густини у скалярній моді — спектр Зельдовича-Гаріссона: $P(k) \propto k^{n_s}$ з $n_s = 1$. Реалістичніші моделі інфляції передбачають відхилення від плоского спектра, як у бік пологіших $n_s < 1$, так і крутіших $n_s > 1$, залежно від конкретної моделі скалярного поля, інфлатона, що забезпечує інфляцію.

У наступних параграфах викладено теорію космологічних збурень у калібрувально-інваріантному підході та проаналізовано узгодженість її передбачень із даними спостережувальної космології. Оскільки дані вимірювань анізотропії реліктового випромінювання в багатьох експериментах, таких, як Boomerang, MAXIMA, DASI, Archeops, CBI, WMAP, остаточно довели існування акустичних піків у спектрі потужності його флюктуацій температури, які формуються скалярною модою збурень із адіабатичними початковими умовами, то саме цей клас космологічних збурень аналізуємо з погляду формування великомасштабної структури Всесвіту.

I. МОДЕЛЬ ВСЕСВІТУ АЙНШТАЙНА– ДЕ СІТТЕРА–ФРІДМАНА–ЛЕМЕТРА

Основою всіх космологічних моделей, які обговорюють у науковій літературі, є розв'язок рівнянь Айнштайна для однорідного ізотропного Всесвіту. За динамічними властивостями їх можна розділити на кілька типів:

— модель порожнього Всесвіту з космологічною сталою (модель де Сіттера 1917 р.);

— моделі з матерією без космологічної сталої (моделі Фрідмана 1922 року з додатною і від'ємною кривиною 3-и простору та з нульовою кривиною Айнштайна-де Сіттера 1932 р.);

— моделі з матерією та космологічною сталою (стаціонарна модель Айнштайна 1917р., моделі Леметра 1927 р.).

Розгляньмо найзагальнішу модель із матерією, космологічною сталою та довільною кривиною 3-простору.

Отже, у такому Всесвіті гіперповерхня сталого часу є однорідною й ізотропною, кривина 3-простору K стала (не залежить від просторових координат) і його метрику можна записати так:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + \chi^2(r) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (1)$$

$$\chi^2(r) = \begin{cases} r^2 & , K = 0 \\ \sin^2 r & , K > 0 \\ \sinh^2 r & , K < 0, \end{cases} \quad (2)$$

Метрика 4-простору в цих випадках має вигляд

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (3)$$

$$= -a^2(\eta) d\eta^2 + a^2(\eta) \gamma_{ij} dx^i dx^j = a^2(\eta) \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Отже, далі ми будемо використовувати фундаментальний метричний тензор простору-часу

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-a^2(\eta), a^2(\eta), a^2(\eta)\chi^2(r), a^2(\eta)\chi^2(r)\sin^2\vartheta), \quad (4)$$

метричний тензор конформного до нього 4-простору

$$\gamma_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \chi^2(r), \chi^2(r)\sin^2\vartheta) \quad (5)$$

та метричний тензор 3-простору (гіперповерхні, ортогональної до лінії часу)

$$\gamma_{ij} = \text{diag}(1, \chi^2(r), \chi^2(r)\sin^2\vartheta). \quad (6)$$

Надалі ми покладатимемо $c = 1$, тому часова змінна t має розмірність довжини. Множник $a(t) = a(\eta)$ відіграє функцію радіуса 3-сфери в евклідовому 4-просторі для задання координат у 3-просторі додатної кривини, функцію радіуса 3-псевдосфери в евклідовому 4-просторі для задання координат у 3-просторі від'ємної кривини та функцію масштабного множника у 3-просторі нульової кривини. Далі називатимемо його просто масштабним множником. Тут і далі латинські індекси i, j, \dots пробігають значення 1,2,3, а грецькі $\nu, \mu, \dots = 0, 1, 2, 3$. Кривина 3-и простору зводиться до значень $K = \pm 1$ для 3-просторів додатної і від'ємної кривини відповідним нормуванням масштабного множника $a(\eta)$. У цих випадках масштабний множник a має розмірність довжини (радіус 3-сфери або 3-псевдосфери), а координати конформного часу η і простору r — безрозмірні. Для 3-простору Евкліда — $K = 0$ — зручно нормувати масштабний фактор на одиницю на сучасний момент часу — $a(\eta_0) = 1$. У цій моделі a безрозмірне, а координати часу і простору мають розмірність довжини.

Рівняння Айнштайна 1917 р. з космологічною сталою Λ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda \quad (7)$$

для такої метрики й тензора енергії-імпульсу $T_{\mu\nu}$ ідеальної рідини зводяться до звичайних диференціальних рівнянь для функції $a(\eta)$ (далі $\dot{\equiv} d/d\eta$):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + K = \frac{8\pi G}{3}a^2(\rho_m + \rho_{\text{rad}}) + \frac{1}{3}\Lambda a^2, \quad (8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{4\pi G}{3}a^2(\rho_m + 3p_m + \rho_{\text{rad}} + 3p_{\text{rad}}) + \frac{1}{3}\Lambda a^2, \quad (9)$$

де $\rho_{(m,\text{rad})} = -T_{0(m,\text{rad})}^0$, $p_{(m,\text{rad})} = T_{1(m,\text{rad})}^1 = T_{2(m,\text{rad})}^2 = T_{3(m,\text{rad})}^3$, а всі інші компоненти тензора енергії імпульсу дорівнюють нулеві через однорідність й ізотропність 3-простору.

Із закону збереження енергії-імпульсу

$$T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0 \quad (10)$$

(тут і далі “;” означатиме коваріантну похідну по координаті з указаним індексом) випливає, що

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (11)$$

Система рівнянь (8)–(9) повинна бути доповнена рівнянням стану $p(\rho)$. Для загального випадку $p = \omega\rho$, який включає практично всі космологічні застосування рівнянь Айнштайна–Фрідмана (8)–(9), останнє рівняння інтегрується й дає

$$\rho(\eta) = \rho(\eta_0) \left(\frac{a(\eta)}{a(\eta_0)}\right)^{-3(\omega+1)}. \quad (12)$$

Для баріонної матерії з нехтівно малим тиском або холодної темної матерії — середовищ із пилоподібним рівнянням стану ($\omega = 0$), $\rho_m(\eta) = \rho_m(\eta_0) [a(\eta_0)/a(\eta)]^3$. Для випромінювання $\omega = 1/3$ і $\rho_{\text{rad}}(\eta) = \rho_{\text{rad}}(\eta_0) [a(\eta_0)/a(\eta)]^4$. Для лоренц-інваріантної густини енергії вакууму або “силового поля”, яке описується космологічною сталою, ($\omega = -1$), $\rho_\Lambda(\eta) = \rho_\Lambda(\eta_0) = \text{const}$. Надалі всі змінні величини в теперішній момент часу позначатимемо індексом 0.

Якщо ввести означення безрозмірних величин густини матерії Ω_m , космологічної сталої Ω_Λ , кривини 3-простору Ω_K так, що

$$\Omega_m \equiv \left(\frac{8\pi G\rho_m a^2}{3(\dot{a}/a)^2}\right)_{\eta_0}, \quad \Omega_{\text{rad}} \equiv \left(\frac{8\pi G\rho_{\text{rad}} a^2}{3(\dot{a}/a)^2}\right)_{\eta_0},$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \left(\frac{\Lambda a^2}{3(\dot{a}/a)^2}\right)_{\eta_0}, \quad \Omega_K \equiv \left(\frac{-K}{(\dot{a}/a)^2}\right)_{\eta_0}, \quad (13)$$

то рівняння (8)–(9) в позначеннях (13) набирає вигляду

$$H = H_0 \left(\Omega_{\text{rad}} \frac{a_0^4}{a^4} + \Omega_m \frac{a_0^3}{a^3} + \Omega_K \frac{a_0^2}{a^2} + \Omega_\Lambda \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

$$q = \frac{H_0^2}{H^2} \left(\Omega_{\text{rad}} \frac{a_0^4}{a^4} + \frac{1}{2}\Omega_m \frac{a_0^3}{a^3} - \Omega_\Lambda \right), \quad (15)$$

де $H \equiv a^{-1}da/dt = a^{-2}da/d\eta = \dot{a}/a^2$ — стала Хаббла на поточний момент часу η , а $q \equiv -(\ddot{a}a/\dot{a}^2 - 1)$ — параметр прискорення. (В останньому рівнянні покладено $p_m = 0$). На цей момент $\eta = \eta_0$ рівняння Айнштайна дають такі співвідношення:

$$\Omega_{\text{rad}} + \Omega_m + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1, \quad (16)$$

$$q_0 = \Omega_{\text{rad}} + \Omega_m/2 - \Omega_\Lambda. \quad (17)$$

Як бачимо, темп розширення Всесвіту визначається його складниками. Це рівняння дає змогу пов'язати червоне зміщення z спостережуваного об'єкта з конформним часом моменту випромінювання η квантів світла, які ми реєструємо в цей момент часу η_0 . Справді, оскільки, за означенням,

$$z + 1 = \frac{a_0}{a}, \quad (18)$$

то

$$\eta_0 - \eta = \frac{1}{H_0 a_0} \int_0^z \frac{dz'}{[\Omega_{\text{rad}}(z'+1)^4 + \Omega_m(z'+1)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(z'+1)^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (19)$$

Кванти електромагнетного випромінювання, як і інші безмасові частинки, поширюються вздовж геодезійних, для яких $ds = 0$. Для сигналів, що поширюються радіально, із (4) маємо диференціальне співвідношення: $d\eta = dr$. Інтегруючи його в припущенні, що початок системи відліку на Землі, отримаємо відстань до об'єкта, який випромінив сигнал у момент космологічного часу η : $r = \eta_0 - \eta$. Отже, величина $\eta_0 - \eta$, як функція червоного зміщення z є важливою для багатьох космологічних та астрофізичних застосувань. У загальному випадку цей інтеграл можна порахувати тільки чисельно. Для наочности наведемо аналітичні вирази для 2-х простих (але важливих) моделей: де Сіттера ($\Omega_m = \Omega_{\text{rad}} = 0$, $\Omega_K = 0$, $\Omega_\Lambda = 1$) —

$$\eta_0 - \eta = \frac{z}{H_0 a_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}},$$

і Айнштайна–де Сіттера ($\Omega_m = 1$, $\Omega_K = 0$, $\Omega_\Lambda = 0$) —

$$\eta_0 - \eta = \frac{2}{H_0 a_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{z+1}} \right).$$

Перша модель описує дуже ранній (початкова інфляційна стадія) і дуже пізній (кінцева інфляційна стадія) Всесвіт, коли у ньому домінувало й домінуватиме щось на кшталт космологічної сталої. Друга — період його розквіту, коли формувалася його структура, галактики, народжувалися зорі...

Пам'ятаючи, що конформний час η зв'язаний із фізичним t диференціальним співвідношенням

$$dt = a(\eta)d\eta,$$

можна отримати зв'язок між червоним зміщенням спостережуваного об'єкта та моментом фізичного часу t , коли випромінювання було випущене

$$t = \frac{1}{H_0} \int_z^\infty \frac{dz'}{(z'+1)(\Omega_{\text{rad}}(z'+1)^4 + \Omega_m(z'+1)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(z'+1)^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (20)$$

Якщо нижня межа в цьому інтегралі $z = 0$, то отримаємо вік Всесвіту сьогодні t_0 .

Отже, маємо 5 параметрів — Ω_{rad} , Ω_m , Ω_Λ , Ω_K і H_0 (із них незалежними є 4 внаслідок (16)), які визначають вік Всесвіту, швидкість його розширення в довільний момент часу, параметр прискорення, відстань до горизонту частинки та зв'язок супутньої відстані r (через яку виражають усі інші спеціально означені відстані — фізичну, фотометричну, означену за кутовими розмірами та ін.) із червоним зміщенням. Із них найнадійніше прямими вимірами визначений радіаційний складник, зумовлений електромагнетним реліктовим випромінюванням:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{rad}}^{(e.m.)} = \Omega_\gamma &\equiv \frac{4\sigma T_0^4}{3H_0^2/8\pi G} \\ &= 2.47 \cdot 10^{-5} h^{-2} \left(\frac{T_0}{2.725} \right)^4, \end{aligned} \quad (21)$$

де $h \equiv H_0/100\text{км/с/Мпк}$, T_0 — сучасна температура реліктового випромінювання, яка, згідно з вимірами в

космічних експериментах COBE [1]¹ і WMAP [2,3], дорівнює 2.725 ± 0.001 . Із тесту видима зоряна величина — червоне зміщення для наднових типу Ia, реалізованого за допомогою космічного телескопа ім. Габбла, впливає обмеження на Ω_m і Ω_Λ виду: $\Omega_m - 0.75\Omega_\Lambda = -0.25 \pm 0.125$ [4, 5], яке вказує на позитивне значення Ω_Λ у співвідношенні приблизно 3:2 зі значенням Ω_m . Їхня сума близька до 1. Отже, $\Omega_{\text{rad}} \ll \Omega_m$, Ω_Λ і ним можна знехтувати в аналізі динаміки розширення Всесвіту в епоху $a(\eta) \gg a_{\text{eq}} \equiv a(\eta_{\text{eq}})$, де η_{eq} — момент рівності густини енергії випромінювання й матерії,

$$a_{\text{eq}} \equiv 4.15 \cdot 10^{-5} \left(\frac{1+f_\nu}{1.683} \right) \left(\frac{T_0}{2.725} \right)^4 (\Omega_m h^2)^{-1}, \quad (22)$$

де f_ν — частка густини енергії, яка припадає на легкі нейтрино, на час η_{eq} . Якщо всі три сорти нейтрино безмасові або їх маси менші від 1 еВ, то $f_\nu = 0.683$.

Із рівнянь (14)–(15) також впливає, що у Всесвіті з нульовою кривиною 3-простору космологічна стала домінує за густиною на $z \leq z_\Lambda = (\Omega_\Lambda/\Omega_m)^{1/3} - 1$

¹Дж. Мазеріві за дослідження спектра реліктового випромінювання присуджена Нобелівська премія в галузі фізики за 2006 р.

($\rho_m \leq \rho_\Lambda$), а прискорення розширення змінює знак на $z_q = (2\Omega_\Lambda/\Omega_m)^{1/3} - 1$ так, що $q > 0$ на $z > z_q$, і $q < 0$ на $z < z_q$. Тобто у нашому Всесвіті з $\Omega_\Lambda = 0.74$ і $\Omega_m = 0.26$ космологічна стала почала домінувати за густиною із $z_\Lambda = 0.42$, а прискорене розширення розпочалось ще із $z_q = 0.79$.

Для останньої з омег — Ω_K — до сьогодні ще немає прямих методів її визначення, а непрямі вказують на те, що у всій доступній для спостережень ділянці вона близька до 0, тобто геометрія 3-простору є евклідовою або майже евклідовою.

Визначення сталої Габбла за червоним зміщенням та фотометричною відстанню об'єктів різної природи сьогодні має ще значно більші систематичні похибки, ніж статистичні: $H_0 = (74 \pm 4 \pm 8) \text{ км/с/Мпк}$ [6–11]. Крім того, цей метод сягає відстаней тільки до 1 Гпк і, по суті, дає значення сталої Габбла в цьому околі доволі нас, і його співвідношення із глобальним

H_0 необхідно ще з'ясувати. Можливо, саме тому значення H_0 , отримані на основі методу Зельдовича–Сюняєва та гравітаційного лінзування, нижчі на 15–30%. Отже, визначенню, за спостереженнями, підлягають 4 параметри — Ω_m , Ω_Λ , Ω_K і H_0 . Враховуючи співвідношення (16), отримуємо тільки 3 незалежні з них.

II. ТЕОРІЯ КОСМОЛОГІЧНИХ ЗБУРЕНЬ. ОДНОКОМПОНЕНТНЕ СЕРЕДОВИЩЕ

Теоретичною основою формування великомасштабної структури Всесвіту є теорія гравітаційної нестійкості Всесвіту, який розширюється, започаткована роботою Є. Ліфшица в 1946 р. [12, 13].

Означимо малі за амплітудою збурення метрики простору-часу й тензора енергії-імпульсу так:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\nu} + a^2 h_{\mu\nu}, & \bar{g}_{00} &= -a^2, & \bar{g}_{ij} &= a^2 \gamma_{ij} & |h_{\mu\nu}| &\ll 1 \\ T_\nu^\mu &= \bar{T}_\nu^\mu + \theta_\nu^\mu, & \bar{T}_0^0 &= -\bar{\rho}, & \bar{T}_j^i &= \bar{p} \delta_j^i & |\theta_\nu^\mu|/\bar{\rho} &\ll 1, \end{aligned} \quad (23)$$

де риска означає незбурені фонові величини. Малі збурення метрики математично представляються як тензорне поле $h_{\mu\nu}$, задане в 4-просторі з фоновією метрикою $\bar{g}_{\mu\nu}$, так що всі тензорні операції над ними виконуються з використанням незбуреної метрики (4). Очевидно, що $h_{\mu\nu}$, як і $\bar{g}_{\mu\nu}$, є симетричним тензором 2-го рангу в 4-просторі й містить 10 незалежних компонент:

$$h_{00} \equiv -2A, \quad h_{0i} \equiv -B_i, \quad h_{ij} \equiv 2H_{ij}.$$

Рівняння Айнштайна для збурень можна розв'язати, якщо задано систему відліку та систему координат або якщо збурення (23) представлено в калібрувально-інваріантних змінних. Суть переходу до таких змінних полягає у вилученні зі загального розв'язку рівнянь Айнштайна з метрикою й тензором енергії-імпульсу загального виду (23) тої частини розв'язків, яка зумовлена довільністю в координатних перетвореннях тензорних величин та інваріантністю щодо таких перетворень рівнянь Айнштайна (докладніше про це див. [12]–[18] і посилання в них). Тут і далі будемо використовувати позначення праці [18] — єдиної оглядової роботи в цій галузі, опублікованої в українських наукових виданнях (див. також книгу [19]). Оскільки існує довільність у виборі системи координат, то завжди є можливість 4 компоненти метричного тензора звести до наперед заданого вигляду перетворенням координат $\tilde{x}^\mu = f^\mu(x^\nu)$. Отже, залишається 6 фізичних ступенів вільності, які, однак, залежні від вибору f^μ .

A. Калібрувально-інваріантні збурення метрики, густини та швидкості речовини

Для виявлення співвідношення між фізичними й координатними ступенями вільності (останню ще називають калібрувальним ступенем вільності) зручно розщепити компоненти за модами — скалярною, векторною та тензорною, як це було запропоновано в піонерській праці Ліфшица 1946 року [12]. Суть такого розщеплення полягає в тому, що будь-яке 3-векторне поле $B_i(\mathbf{x})$ можна записати як суму поздовжнього (longitudinal) і поперечного (transverse) складників

$$B_i = B_i^{(L)} + B_i^{(T)}, \quad \nabla \times \mathbf{B}^{(L)} = \nabla \cdot \mathbf{B}^{(T)} = 0, \quad (24)$$

де $\nabla \times$ — ротор, а $\nabla \cdot$ — дивергенція у 3-и просторі довільної кривини, тобто узагальнені коваріантні похідні по просторових координатах. Їхня назва походить від того, що в розкладі по плоских хвилях поздовжній складник паралельний хвильовому вектору, а поперечний — перпендикулярний. Такий розклад не однозначний, але завжди здійснений. Поздовжній складник можна представити градієнтом відповідної скалярної функції, тоді як поперечний є вихровим вектором, що не може бути отриманий коваріантним диференціюванням скалярної функції. Ці два складники незалежні й у лінійній теорії не впливають на розвиток один одного.

Аналогічний розклад можна здійснити для тензора 2-го рангу $H_{ij}(\mathbf{x})$, з тою різницею лише, що тут є уже три можливості: обидва індекси — поздовжні компоненти; один — поздовжня, другий — поперечна; обидва індекси — поперечні:

$$H_{ij} = H_{ij}^{(LL)} + H_{ij}^{(LT)} + H_{ij}^{(TT)}, \quad (25)$$

де перші два доданки є узагальненням (24) для тензора 2-го рангу, а останній є тензором з нульовою дивергенцією: $\gamma^{jk}\nabla_k H_{ij}^{(TT)} = 0$. Перший доданок, LL складник, можна представити як суму діагонального й безслідового тензорів: $H_{ij}^{(LL)} = H^L\gamma_{ij} + H_{ij}^T$. Решта складників — LT і TT — є теж безслідовими. Безслідовий симетричний тензор H_{ij}^T можна записати як градієнт скалярного поля H_T

$$H_{ij}^T = \left(\nabla_i \nabla_j - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \nabla^2 \right) H_T, \quad (26)$$

а симетричний безслідовий тензор $H^{(LT)}$ — як градієнт поперечного векторного поля $H_i^{(V)}$:

$$H_{ij}^{(LT)} = \frac{1}{2} \left(\nabla_i H_j^{(V)} - \nabla_j H_i^{(V)} \right). \quad (27)$$

Вихрове векторне поле $H_j^{(V)}$ та “вихрове безслідове тензорне поле” $H_{ij}^{(TT)}$ задовольняють умови

$$\nabla_i H_i^{(V)} = H_i^{(T)i} = \nabla_j H_i^{(TT)j} = 0.$$

Оскільки ми розвиваємо лінійну теорію збурень, то для розкладу за власними функціями скалярних величин скористаємось набором власних функцій Лапласіяна

$$\Delta Y^{(S)} = -k^2 Y^{(S)},$$

а векторних і тензорних — відповідно узагальненого рівняння Гельмгольца

$$\Delta Y_j^{(V)} = -k^2 Y_j^{(V)}, \quad \text{і} \quad \Delta Y_{ji}^{(T)} = -k^2 Y_{ji}^{(T)},$$

де $Y_j^{(V)}$ поперечний вектор — $\nabla^j Y_j^{(V)} = 0$, а $Y_{ji}^{(T)}$ — симетричний поперечний безслідовий тензор, для якого $Y_j^{(T)j} = \nabla^i Y_{ji}^{(T)} = 0$.

Аналогічно до (26)–(27) можна побудувати вектори й тензори скалярного типу та тензори векторного типу. Для цього означимо

$$Y_j^{(S)} \equiv -k^{-1} \nabla_j Y^{(S)}, \quad Y_{ij}^{(S)} \equiv k^{-2} \nabla_i \nabla_j Y^{(S)} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} Y^{(S)},$$

$$Y_{ij}^{(V)} \equiv -\frac{1}{2k} \left(\nabla_j Y_i^{(V)} + \nabla_i Y_j^{(V)} \right).$$

Векторне поле тепер можна записати як розклад

$$B_i = B Y_i^{(S)} + B^{(V)} Y_i^{(V)}, \quad (28)$$

а тензорне, як

$$H_{ij} = H_L Y^{(S)} \gamma_{ij} + H_T Y_{ij}^{(S)} + H^{(V)} Y_{ij}^{(V)} + H^{(T)} Y_{ij}^{(T)}, \quad (29)$$

де B , $B^{(V)}$, H_L , H_T , $H^{(V)}$ і $H^{(T)}$ функції η і k . Вигляд функцій $Y^{(S)}$, $Y_{ij}^{(V)}$ і $Y_{ij}^{(T)}$ для Всесвіту з $K = 0$ наведено у [20], а їх узагальнення для 3-простору з ненульовою кривизною, $K \neq 0$, зроблено в роботі [21]. Отже, довільні малі збурення метрики простору-часу можна розкласти на 3 типи залежно від того, як вони перетворюються зі зміною просторових координат — скалярні, векторні й тензорні. У лінійній теорії кожний тип, чи, інакше, мода збурень, розвиваються незалежно і для однорідного ізотропного фону можуть описуватись незалежно одна від одної за часовою і просторовою координатами. Тобто розклад просторової залежності кожної з мод збурень може бути свій. Надалі, поки ми не виходимо за межі лінійної теорії, розумітимемо просторову залежність будь-якої скалярної, векторної чи тензорної функцій як таку, що представлена в розкладі за відповідними функціями, а щоб не загроможувати формули інтегральними представленнями, їх просто опускатимемо. Рівняння записуватимемо для гармонік відповідного розкладу.

Нехай метрика однорідного ізотропного Всесвіту $\gamma_{\mu\nu}$ має вигляд (4). Здійснимо мале перетворення координат виду $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, де $|\xi^\mu| \ll |x^\mu|$, $x^0 \equiv \eta$, $\tilde{x}^0 \equiv \tilde{\eta}$. За допомогою тензорних перетворень,

$$g_{\alpha\beta}(x^\gamma) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\gamma),$$

в лінійному наближенні отримаємо

$$\tilde{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - 2 \frac{\dot{a}}{a} \xi^0 \gamma_{\alpha\beta} - \xi^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \gamma_{\alpha\beta}(x^\gamma) - \gamma_{\alpha\nu}(x^\gamma) \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} - \gamma_{\mu\beta}(x^\gamma) \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}.$$

Уведемо позначення: $\xi_0 \equiv T(\eta) Y^{(S)}(x^\gamma)$, $\xi_i \equiv L_i$. Останній можна вважати компонентами 3-вектора, який знову ж таки розкладемо на “скалярний” і “вихровий” складники, кожен з яких представимо у розкладі за власними функціями рівняння Гельмгольца

$$L_i(\eta, x^k) = L(\eta) Y_i^{(S)}(x^k) + L^{(V)} Y_i^{(V)}(x^k). \quad (30)$$

Таке мале перетворення координат приводить до малих змін метрики простору-часу чи перетворень збурень метрики виду:

$$\tilde{h}_{00} = h_{00} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} T + \dot{T} \right) Y^{(S)}, \quad \tilde{h}_{0i} = h_{0i} - T Y_{,i}^{(S)} - \dot{L} Y_i^{(S)} - \dot{L}^{(V)} Y_i^{(V)},$$

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij} - 2 \frac{\dot{a}}{a} T Y^{(S)} \gamma_{ij} - L Y_{ij}^{(S)} - L^{(V)} Y_{ij}^{(V)} - L Y_{j|i}^{(S)} - L^{(V)} Y_{j|i}^{(V)}. \quad (31)$$

(Тут і далі " | " над рядком чи під рядком означатиме відповідно контра- чи коваріантну похідну у 3-просторі з метрикою γ_{ij} по змінній, зазначеній індексом після неї.) Застосовуючи такі перетворення до метрики зі збуреннями $h_{\mu\nu}$ з урахуванням (28), (29) і (30), компоненти розкладу збурень A , B , $B^{(V)}$, H_L , H_T , $H^{(V)}$ і $H^{(T)}$ перетворюватимуться так:

$$\tilde{A} = A - \frac{\dot{a}}{a}T - \dot{T}, \quad \tilde{B} = B + \dot{L} + kT, \quad \tilde{B}^{(V)} = B^{(V)} + \dot{L}^{(V)}, \quad (32)$$

$$\tilde{H}_L = H_L - \frac{\dot{a}}{a}T - \frac{k}{3}L, \quad \tilde{H}_T = H_T + kL, \quad \tilde{H}^{(V)} = H^{(V)} + kL^{(V)}, \quad \tilde{H}^{(T)} = H^{(T)}. \quad (33)$$

Використавши ці співвідношення, можна побудувати величини, які не змінюють свого вигляду при малих перетвореннях координат. Такі величини називають калібрувально-інваріантними. Як бачимо, тензорна компонента $H^{(T)}$ не змінилася. Отже, тензорні збурення метрики є калібрувально-інваріантними величинами. Скалярні компоненти (A , B , H_L , H_T) і векторні ($B^{(V)}$, $H^{(V)}$) змінилися, але певною комбінацією компонент у цих двох групах можна побудувати калібрувально-інваріантні величини. Справді, легко бачити, що величина

$$\sigma^{(V)} = k^{-1}\dot{H}^{(V)} - B^{(V)} = k^{-1}\dot{\tilde{H}}^{(V)} - \tilde{B}^{(V)} \quad (34)$$

є інваріантною. Розрахована в одній системі координат у певній точці фізичного 4-простору, вона залишається такою ж у будь-якій системі координат у тій самій точці фізичного простору. Це також означає, що вибором координат не можна усунути "фізичні" векторні збурення. Можна лише певним вибором ξ_i занулити $B^{(V)}$ або $H^{(V)}$. Справді, покладаючи, наприклад, $kL^{(V)} = H^{(V)}$, отримаємо, що $\tilde{H}^{(V)} = 0$, але $\tilde{B}^{(V)} \neq 0$ і в цій системі координат $\dot{\tilde{B}}^{(V)} = -\sigma^{(V)}$. Таке калібрування називають **векторним**. (Загалом тензор $\sigma^{(V)}Y_{ij}^{(V)}$ є тензором зсуву на гіперповерхні сталого часу).

Із скалярних компонент метричного тензора можна побудувати кілька калібрувально-інваріантних величин [15, 16].

Поздовжнє або конформно-ньютонівське калібрування. Часто вживаними через їхню просту фізичну інтерпретацію є такі дві незалежні калібрувально-інваріантні комбінації скалярних компонент метричного тензора:

$$\begin{aligned} \Phi &= H_L + \frac{1}{3}H_T - \frac{\dot{a}}{a}k^{-2}(\dot{H}_T - kB) \\ &= \tilde{H}_L + \frac{1}{3}\tilde{H}_T - \frac{\dot{a}}{a}k^{-2}(\dot{\tilde{H}}_T - k\tilde{B}), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Psi &= A - k^{-2}(\ddot{H}_T - k\dot{B}) - \frac{\dot{a}}{a}k^{-2}(\dot{H}_T - kB) \\ &= \tilde{A} - k^{-2}(\ddot{\tilde{H}}_T - k\dot{\tilde{B}}) - \frac{\dot{a}}{a}k^{-2}(\dot{\tilde{H}}_T - k\tilde{B}). \end{aligned} \quad (36)$$

Для того, щоб зрозуміти "геометричну суть" цих калібрувальних величин, скористаємося довільністю у виборі функцій ξ_ν так, щоб "занулити" H_T і B . Для цього необхідно покласти $L = -k^{-1}H_T$ і $T =$

$k^{-1}B + k^{-2}\dot{H}_T$. У цих координатах за відсутності векторної й тензорної моди збурень метрика (4) і (23) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\bar{g}_{\mu\nu} + a^2 h_{\mu\nu}^{(S)}) = -a^2(1 + 2\Psi Y^{(S)})d\eta^2 \\ &\quad + a^2(1 + 2\Phi Y^{(S)})\gamma_{ij}dx^i dx^j. \end{aligned} \quad (37)$$

Тобто, за наявності тільки скалярних збурень можна вибрати таку систему координат, у якій метрика залишатиметься діагональною, а малі поправки до незбуреної метрики є калібрувально-інваріантними величинами Ψ і Φ для часової і просторової компонент відповідно. За геометричною суттю таке калібрування (систему відліку) називають поздовжнім, або діагональним (longitudinal gauge, $H_T = B = 0$). Із метрики (37) випливає фізичний зміст калібрувально-інваріантних величин Ψ і Φ . Очевидно, що Ψ є амплітудою просторової залежності інтервалу власного часу від інтервалу координатного часу вздовж нормалі до гіперповерхні сталого часу з нульовим зсувом. Скаляр кривини такої поверхні

$$R = a^{-2}(6K + 4(k^2 - 3K))\Phi Y^{(S)},$$

тому Φ є амплітудою збурень кривини. За її фізичною реалізацією ми назвали її системою відліку, супутньою до незбуреного космологічного фону [25, 26]. Оскільки Ψ і Φ пов'язані зі класичним ньютонівським гравітаційним потенціалом збурень, то це калібрування ще називають конформно-ньютонівським калібруванням [24, 32]. У літературі величини Ψ і Φ називають потенціалами Бардіна.

Синхронне калібрування. У науковій літературі країн СНД воно більше відоме як синхронна система координат (і система відліку). Із рівнянь (32) випливає, що завжди можна вибором T , L і $L^{(V)}$ домогтися $\tilde{A} = \tilde{B} = \tilde{B}^{(V)} = 0$, тобто $h_{00} = h_{0i} = 0$ і синхронність системи відліку забезпечується і зі збуреннями. Причому ще залишається довільність у заданні такої системи відліку. Особливо відчутна вона, коли аналізуються тільки скалярні збурення. Вона "пролазить" у кінцеві результати у вигляді фіктивних (нефізичних) розв'язків. Метод їх усунення запропонував Ліфшиц [12-14]. Щобільше, цими розв'язками можна скористатися для знаходження фізичних розв'язків, як це було зроблено в нашій праці [25, 26]. У цьому калібруванні за відсутності векторної й тензорної мод збурень метрика (4) і (23) набуває вигляду:

$$ds^2 = (\bar{g}_{\mu\nu} + a^2 h_{\mu\nu}^{(S)}) \\ = -a^2 d\eta^2 + a^2 (\gamma_{ij} + H_L Y^{(S)} \gamma_{ij} + H_T Y_{ij}^{(S)}) dx^i dx^j.$$

Збурення в тензорі енергії-імпульсу. Нехай енергія й імпульс у кожній точці матеріального середовища (в наближенні суцільного середовища) описуються загальним симетричним тензором енергії-імпульсу $T_\nu^\mu = \bar{T}_\nu^\mu + \theta_\nu^\mu$. Означимо густину енергії ρ і 4-вектор швидкості потоку \mathbf{u} густини енергії так, що густина енергії — це проекція 0-компонент тензора енергії-імпульсу на 4-вектор \mathbf{u} , а потік енергії — проекція просторових компонент на 4-вектор \mathbf{u} :

$$-T_\nu^0 u^\nu = \rho, \quad T_\nu^\mu u^\nu = -\rho u^\mu, \quad u_\mu u^\mu = -1. \quad (38)$$

Як і в параграфі 1, приймаємо, що незбурені компоненти вектора 4-швидкості є $\bar{u}^\alpha = a^{-1}(1, 0, 0, 0)$ ($\bar{u}_\alpha = a(-1, 0, 0, 0)$). Збурення цих величин запишемо так:

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta), \quad u^\mu = \bar{u}^\mu + \delta u^\mu. \quad (39)$$

Уважаємо збурення малими: $\delta \ll 1$, $\delta u^\mu \ll 1$. У лінійній теорії збурень нехтуємо квадратичними членами. З умови нормування $u_\mu u^\mu = -1$ випливає, що

$$u^0 = \frac{1}{a}(1 - AY^{(S)}). \quad (40)$$

Перепозначмо для зручності просторову частину 4-вектора швидкості й розкладімо її, як і раніше, на вектор-градієнт і вектор-ротатор:

$$\delta u^i / \bar{u}^0 = v^i = v Y^{(S)i} + v^{(V)} Y^{(V)i}. \quad (41)$$

Розкладімо тензор енергії-імпульсу на скалярну, векторну й тензорну незалежні та незвідні одна до одної компоненти, подібно до того, як ми вчинили з метричним тензором. Для цього введемо проекційний тензор $P_\nu^\mu \equiv u^\mu u_\nu + \delta_\nu^\mu$, за допомогою якого виділимо тангенціальний складник тензора енергії-імпульсу $\tau^{\mu\nu}$, ортогональний до вектора u , так:

$$\tau^{\mu\nu} = P_\alpha^\mu P_\beta^\nu T^{\alpha\beta}. \quad (42)$$

Цей тензор називають тензором напружень, або тензором тиску. За відсутності збурень маємо $\tau_0^0 = \tau_i^0 = 0$, $\tau_j^i = \bar{p}\delta_j^i$. Його $\binom{0}{i}$ і $\binom{0}{j}$ компоненти залишаються нульовими і за наявності малих збурень (у лінійному наближенні). Тензор τ_j^i узагалі може містити скалярну, векторну й тензорну незалежні моди збурень. Виділімо їх. Представмо спочатку τ_j^i як суму діагонального й безслідового тензорів:

$$\tau_j^i = \bar{p} \left[(1 + \Pi_L) \delta_j^i + \Pi_j^i \right], \quad \Pi_i^i = 0. \quad (43)$$

Перший доданок ураховує ізотропний тиск, другий — анізотропний складник тиску, зумовлений, наприклад, беззіткнювальними частинками із залишковими тепловими швидкостями (реліктові нейтрино з масою в кілька еВ) чи реліктовими фотонами, розсіяними в плазмі з неоднорідною густиною електронів і протонів. Для ідеальної рідини $\Pi_j^i = 0$. Безслідовий тензор

Π_j^i , аналогічно до H_{ij} , розкладімо на скалярний (обидва індекси — компоненти вектора-градієнта), векторний (один індекс — компоненти вектора-градієнта, другий — компоненти вектора-ротатора) і тензорний (обидва індекси — компоненти вектора-ротатора) складники

$$\Pi_j^i = \Pi^{(S)} Y_j^{(S)i} + \Pi^{(V)} Y_j^{(V)i} + \Pi^{(T)} Y_j^{(T)i}.$$

Застосовуючи ті ж перетворення координат до компонент тензора енергії імпульсу і його складників, що й до метрики (30)–(31), отримаємо перетворення, аналогічні до (32)–(33):

$$\tilde{\delta} = \delta - \frac{\dot{p}}{\rho} T = \delta + 3(1 + \omega) \frac{\dot{a}}{a} T, \quad \tilde{v} = v + \dot{L}, \\ \tilde{v}^{(V)} = v^{(V)} + \dot{L}^{(V)}, \\ \tilde{\Pi}_L = \Pi_L + \frac{\dot{p}}{\bar{p}} T = \Pi_L + 3(1 + \omega) \frac{c_s^2 \dot{a}}{\omega a} T, \quad \tilde{\Pi}^{(S)} = \Pi^{(S)}, \\ \tilde{\Pi}^{(V)} = \Pi^{(V)}, \quad \tilde{\Pi}^{(T)} = \Pi^{(T)}. \quad (44)$$

Як бачимо, всі 3 складники безслідового тензора зсуву Π_j^i є калібрувально-інваріантними (з точністю до другого порядку малости) при малих довільних перетвореннях координат. Це наслідок теореми Стюарта–Вокера для безслідового тензора. Четвертий інваріант можна отримати простою комбінацією першого й останнього виразів (44):

$$\Gamma = \Pi_L - \frac{c_s^2}{w} \delta,$$

де $c_s^2 \equiv \dot{p}/\dot{\rho}$ — квадрат адіябатичної швидкості звуку, а $w \equiv p/\rho$ — ентальпія. У [16] показано, що Γ пропорційна дивергенції потоку ентропії збурень. Очевидно, що для адіябатичних збурень, які є основним предметом досліджень цієї роботи, $\Gamma = 0$.

Калібрувально-інваріантну характеристику збурення густини та швидкості можна отримати комбінацією δ , v і $v_i^{(V)}$ з відповідними компонентами збурень метрики:

$$V \equiv v - \frac{1}{k} \dot{H}_T, \quad (45)$$

$$D \equiv \delta + 3(1 + \omega) \frac{1}{k} \frac{\dot{a}}{a} (v - B), \quad (46)$$

$$D_g \equiv \delta + 3(1 + \omega) \left(H_L + \frac{1}{3} H_T \right), \quad (47)$$

$$D_s \equiv \delta - 3(1 + \omega) \frac{1}{k} \frac{\dot{a}}{a} \left(B - \frac{1}{k} \dot{H}_T \right), \quad (48)$$

$$V^{(V)} \equiv v^{(V)} - \frac{1}{k} \dot{H}^{(V)}, \quad (49)$$

$$\Omega^{(V)} \equiv v^{(V)} - B^{(V)} = \sigma^{(V)} + V^{(V)}. \quad (50)$$

Калібрувально-інваріантні величини (45), (46), (48), (49) і (50) увів Бардін і в праці [15] позначив $v_s^{(0)}$, ϵ_m , ϵ_g , $v_s^{(1)}$ і $v^{(1)}$ відповідно. Їхній фізичний зміст стає зрозумілим, якщо застосувати згадані вище калібрування. В конформно-ньютонівському

калібруванні $H_T = B = 0$ і $V = v$, $D_s = \delta$. Отже, збурення густини та швидкості речовини, визначені в системі відліку, супутній до незбуреного фону, чи конформно-ньютонівському калібруванні, є калібрувально-інваріантними величинами. Наведена тут калібрувально-інваріантна величина D_g пов'язана з нею простим співвідношенням

$$D_g = D_s + 3(1 + \omega)\Phi$$

(комбінація калібрувально-інваріантних величин є калібрувально-інваріантною величиною) і являє собою збурення густини в системі відліку, у якій флюктуації скаляра кривини гіперповерхні сталого часу відсутні [16].

Перша з наведених калібрувально-інваріантних характеристик збурення — D , дорівнює збуренню густини δ в системі відліку, у якій $v = B$. Але це умова ортогональності світових ліній матерії до гіперповерхні сталого часу $t = \text{const}$, тобто D являє собою збурення густини на просторовій гіперповерхні, у кожній точці якої матерія нерухома. Прикладом може бути пилоподібне середовище, у якому можна реалізувати систему відліку, що є синхронною і супутньою одночасно — $v = B = 0$.

Векторні збурення мають значно меншу калібрувальну довільність, оскільки перетворення часової координати не породжують векторних складників збурень метрики чи матерії. У векторному калібруванні ($H^{(V)} = 0$) $V^{(V)} = v^{(\text{vec})}$, а $\Omega^{(V)} = v^{(\text{vec})} + \sigma^{(V)}$. Перший з них є амплітудою тензора зсуву

$$\sigma_{ij} = a \left(\dot{H}_T - kv \right) Y_{ij}^{(S)},$$

а другий — амплітудою тензора завихрення

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &\equiv \frac{1}{2} P_i^k (u_{k;l} - u_{l;k}) P_j^l \\ &= a \left(v^{(V)} - B^{(V)} \right) \left(Y_{ij}^{(V)} - Y_{ji}^{(V)} \right). \end{aligned}$$

Оскільки жодні малі перетворення координат виду $\tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$ не міняють тензорних компонент збурень метрики $H^{(T)}$ і тензора енергії-імпульсу $\Pi^{(T)}$, то

вони автоматично є калібрувально-інваріантними величинами.

Докладніший виклад фізичного змісту наведених тут калібрувально-інваріантних величин можна знайти у працях [15, 16, 32, 33].

В. Рівняння еволюції амплітуди збурень

Уперше розв'язки для всіх мод збурень у синхронній системі відліку отримав Ліфшиц у своїй класичній праці [12]. Розв'язки рівнянь для скалярної моди збурень у конформно-ньютонівському калібруванні та їх зв'язок із розв'язками в синхронному наведено в наших роботах [25, 26]. У праці [24] подано рівняння для збурень у синхронному і в конформно-ньютонівському калібруваннях та багатокомпонентного середовища. Там же описано програму числового інтегрування цієї системи рівнянь, яка є загальнодоступною (<http://arcturus.mit.edu/cosmics/>) і на основі якої створено пакет програм для комп'ютерного розрахунку спектрів потужності скалярної і тензорної мод збурень (СМВFAST [34, 35], СМВCODE [36], СМВЕASY [37]). Тут ми наводимо послідовний калібрувально-інваріантний підхід, розвинутий у працях [15, 16, 18], і ті аналітичні розв'язки, які будуть необхідними в цій роботі.

Слід зауважити, що відмінність між координатними значеннями збурення густини δ і швидкості речовини v в інших відмінних від конформно-ньютонівського калібрування та калібрувально-інваріантними характеристиками цих фізичних параметрів (V , D , D_g , D_s) є суттєвою для збурень із масштабом, більшим за горизонт ($k\eta \ll 1$), де збурення метрики сумірні за величиною зі збуренням густини. Коли масштаб збурень значно менший за горизонт частинки, то різниця між ними щезає. У цьому випадку для опису еволюції збурень достатньо рівнянь класичної гідродинаміки. Повна теорія повинна охоплювати всі стадії еволюції великомасштабної структури Всесвіту, тому наводимо рівняння для збурень, отримані з рівнянь Айнштайна (7) та рівнянь збереження (10):

рівняння зв'язку $\delta\mathfrak{G}_\alpha^0 = 8\pi G\delta T_\alpha^0 -$

$$(k^2 - 3K)\Phi = 4\pi G a^2 \rho D, \quad (51)$$

$$k \left(\frac{\dot{a}}{a} \Psi - \dot{\Phi} \right) = 4\pi G a^2 (\rho + p) V, \quad (52)$$

$$\frac{1}{2} (2K - k^2) \sigma^{(V)} = 8\pi G a^2 (\rho + p) V^{(V)}, \quad (53)$$

рівняння динаміки $\delta\mathfrak{G}_j^i = 8\pi G\delta T_j^i -$

$$-k^2 (\Phi + \Psi) = 8\pi G a^2 p \Pi^{(S)}, \quad (54)$$

$$k \left(\dot{\sigma}^{(V)} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \sigma^{(V)} \right) = 8\pi G a^2 p \Pi^{(V)}, \quad (55)$$

$$\ddot{H}^{(T)} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{H}^{(T)} + (2K + k^2) H^{(T)} = 8\pi G a^2 p \Pi^{(T)}, \quad (56)$$

рівняння збереження $\delta T_{\alpha;\beta}^{\beta} = 0$ –

$$\dot{D}_g + 3(c_s^2 - w) \frac{\dot{a}}{a} D_g + (1+w)kV + 3w \frac{\dot{a}}{a} \Gamma = 0, \quad (57)$$

$$\dot{V} + (1 - 3c_s^2) \frac{\dot{a}}{a} V = k(\Psi - 3c_s^2 \Phi) + \frac{c_s^2 k}{1+w} D_g + \frac{wk}{1+w} \left[\Gamma - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{3K}{k^2} \right) \Pi^{(S)} \right], \quad (58)$$

$$\dot{V}^{(V)} + (1 - 3c_s^2) \frac{\dot{a}}{a} V^{(V)} = \frac{p}{2(\rho+p)} \left(k - \frac{2K}{k} \right) \Pi^{(V)}. \quad (59)$$

У більшості застосувань цих рівнянь до проблем космології припускається, що космологічна рідина є ідеальною рідиною (в українській літературі частіше вживається термін “ідеальний газ”), а отже, анізотропна частина тензора напружень $\Pi_j^i = \Pi^{(S)} = \Pi^{(V)} = \Pi^{(T)} \equiv 0$, тобто праві частини рівнянь динаміки у всіх складниках дорівнюють нулеві. Для скалярної моди це веде за собою рівність $\Psi = -\Phi$. Ми працюємо в межах стандартної космологічної парадигми, згідно з якою структура утворилася шляхом гравітаційного зростання адіабатичних збурень густини речовини, згенерованих в інфляційну епоху. Для таких збурень $\Gamma = 0$. Збурення густини речовини, як видно з рівнянь для калібрувальних-інваріантних змінних, зв’язані тільки зі скалярною модою збурень.

III. ЕВОЛЮЦІЯ СКАЛЯРНИХ ЗБУРЕНЬ

Рівняння еволюції скалярних адіабатичних збурень густини космологічного середовища, добрим наближенням якого є ідеальна рідина, мають вигляд [15, 16, 18]:

$$\dot{D}_g + 3(c_s^2 - w) \frac{\dot{a}}{a} D_g + (1+w)kV = 0, \quad (60)$$

$$\dot{V} + (1 - 3c_s^2) \frac{\dot{a}}{a} V = k(1 + 3c_s^2) \Psi + \frac{c_s^2 k}{1+w} D_g, \quad (61)$$

$$(3K - k^2) \Psi = 4\pi G a^2 \rho D, \quad (62)$$

$$\dot{\Psi} + \frac{\dot{a}}{a} \Psi = 4\pi G a^2 (\rho + p) \frac{V}{k}. \quad (63)$$

Отже, для 3 невідомих функцій (Ψ , D_g , V) маємо 4 рівняння. Четверта невідома функція в цих рівняннях – D – не є незалежною, тому що може бути представлена через інші три:

$$\begin{aligned} D &= D_g + 3(1+w) \left(\Psi + \frac{\dot{a}}{a} \frac{V}{k} \right) \\ &= D_s + 3(1+w) \frac{\dot{a}}{a} \frac{V}{k}. \end{aligned} \quad (64)$$

Система, однак, не переозначена, оскільки всі рівняння сумісні через тотожності Біянкі.

Наведемо їхні розв’язки спочатку для епохи домінування випромінювання, яка наступила зразу після того, як збурення були згенеровані, а потім – для епохи домінування речовини, або епохи формування

структури Всесвіту. Як було вже згадано у Вступі, спостереження вказують на те, що кривизна 3-и простору сьогодні нехтівно мала, тому, як впливає з параграфа 1, її внесок у динаміку розширення Всесвіту в ранні епохи був ще меншим. Отже, покладаємо $K = 0$. Роль космологічної сталої в еволюції збурень у ранню епоху теж не значна, тому приймаємо тут $\Lambda = 0$.

А. Епоха домінування випромінювання

У цю епоху $w = c_s^2 = 1/3$, $a \propto \eta$ і рівняння для збурень (60)–(63) набирають вигляду:

$$\dot{D}_g = -\frac{4}{3} k V, \quad (65)$$

$$\dot{V} = 2k\Psi + \frac{1}{4} k D_g, \quad (66)$$

$$-2k^2 \eta^2 \Psi = 3D_g + 12\Psi + \frac{12}{k\eta} V, \quad (67)$$

$$\dot{\Psi} + \frac{1}{\eta} \Psi = \frac{2}{k\eta^2} V. \quad (68)$$

Із них можна отримати одне диференціальне рівняння 2-го порядку для D_g

$$\ddot{D}_g + \frac{12k}{k^3 \eta^3 + 6k\eta} \dot{D}_g + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{k^2 \eta^2 + 6} \right) k^2 D_g = 0, \quad (69)$$

загальним розв’язком якого є

$$D_g = C_1 \left(\cos x - 2 \frac{\sin x}{x} \right) + C_2 \left(\sin x + 2 \frac{\cos x}{x} \right), \quad (70)$$

де $x \equiv k\eta/\sqrt{3}$, а C_1 і C_2 – сталі інтегрування. З рівняння (65) отримуємо розв’язок для амплітуди швидкості V

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{3}}{4} C_1 \left(\sin x + 2 \frac{\cos x}{x} - 2 \frac{\sin x}{x^2} \right) \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{4} C_2 \left(-\cos x + 2 \frac{\sin x}{x} + 2 \frac{\cos x}{x^2} \right), \end{aligned} \quad (71)$$

а з рівняння (67) – для амплітуди потенціалу Ψ

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{2} C_1 \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) \\ &- \frac{1}{2} C_2 \left(\frac{\sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x^3} \right). \end{aligned} \quad (72)$$

Зі співвідношення (64) між калібрувальньо-інваріантними величинами знаходимо розв'язки для D і D_s :

$$D = C_1 \left(\cos x - \frac{\sin x}{x} \right) + C_2 \left(\sin x + \frac{\cos x}{x} \right) = -2x^2 \Psi, \quad (73)$$

$$D_s = C_1 \left(\cos x - 2 \frac{\sin x}{x} - 2 \frac{\cos x}{x^2} + 2 \frac{\sin x}{x^3} \right) + C_2 \left(\sin x + 2 \frac{\cos x}{x} - 2 \frac{\sin x}{x^2} - 2 \frac{\cos x}{x^3} \right). \quad (74)$$

Проаналізуємо поведінку цих калібрувальньо-інваріантних величин у ранньому Всесвіті, коли рівняння стану стало ультрарелятивістським ($P = \frac{1}{3}\rho$) після інфляції і всіх інших можливих фазових переходів і станів. Очевидно, що принаймні вже в лептонній ері ($10^{-6} - 1$ с) це рівняння стану було справедливим. Цій епісі відповідають червоні зміщення $z \sim 10^9 - 10^{12}$. Горизонт частинки в цю епоху змінюється від ~ 100 м до $\sim 10^9$ м. Оскільки збуренням масштабу галактик відповідає хвильове число $k_{\text{gal}} \sim 10^{-21} \text{ м}^{-1}$, а скупчень галактик — $k_{\text{cl}} \sim 10^{-23} \text{ м}^{-1}$ (у супутніх координатах), то для них $x < 10^{-12} \ll 1$. Тобто в цю епоху розмір елементів великомасштабної структури значно перевищував горизонт частинки $k_{\text{gal,cl}}^{-1} \gg \eta$ й акустичний горизонт $k_{\text{gal,cl}}^{-1} \gg c_s \eta = \eta/\sqrt{3}$. Умова $x \ll 1$ дає змогу розкласти тригонометричні функції в розв'язках (70)–(74) у ряд Маклорена, які з точністю до членів 2-го порядку малости набирають вигляду:

$$D_g = C_1 \left(-1 - \frac{x^2}{6} \right) + C_2 \left(\frac{2}{x} - \frac{x^3}{12} \right), \quad (75)$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} C_1 \left(\frac{x}{3} - \frac{x^3}{10} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} C_2 \left(\frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{3} \right), \quad (76)$$

$$\Psi = \frac{1}{6} C_1 \left(1 - \frac{x^2}{10} \right) - \frac{1}{2} C_2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x} \right), \quad (77)$$

$$D = -\frac{1}{3} C_1 \left(x^2 - \frac{x^4}{10} \right) + C_2 \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2} \right), \quad (78)$$

$$D_s = C_1 \left(-\frac{1}{3} - \frac{7}{30} x^2 \right) + C_2 \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \right). \quad (79)$$

Таким чином, рівняння для еволюції амплітуди збурень скалярної моди мають два фундаментальні розв'язки — наростаючий, із константою інтегрування C_1 , і спадний з константою інтегрування C_2 . Ці константи загалом є комплексними функціями хвильового числа k і задаються початковими умовами, які можуть бути довільними, але мають задовольняти умову лінійності. Для довільного збурення, згенерованого в ранню епоху, кількість фізичних ступенів вільності в заданні початкових умов максимальна, коли амплітуди обох мод сумірні. Отже, якщо на початок лептонної ери наростаюча і спадна моди сумірні за величиною, то на її кінець амплітуда спадної приблизно в 10^{10} разів менша. Інша аргументація,

яка наводиться в літературі при опусканні з аналізу спадного розв'язку, пов'язана з утратою регулярності чи однорідності й ізотропності при $t \rightarrow 0$ внаслідок її розбіжності. Із переходом до інфляційних моделей ця аргументація втрачає значення, оскільки ці розв'язки не можна протягнути через інші епохи. Їх необхідно “зшивати” з відповідними розв'язками “пограничної” епохи, інфляційної, як мінімум. Отже, доходимо обґрунтованого висновку, що тільки наростаючий фундаментальний розв'язок рівнянь еволюції космологічних скалярних адіябатичних збурень зв'язаний з існуючою структурою Всесвіту. А отже, розв'язок оберненої задачі — за спостережуваною структурою Всесвіту отримати інформацію про початкові умови й фізичні процеси в ранньому Всесвіті — повинен базуватись на наростаючій скалярній моді космологічних збурень. На найбільш ранній момент, коли умови отримання цих розв'язків виконуються, співвідношення між амплітудами наростаючого розв'язку калібрувальньо-інваріантних величин таке:

$$V_{(1)} = -\frac{x}{4\sqrt{3}} D_{g(1)}, \quad \Psi_{(1)} = -\frac{1}{6} D_{g(1)}, \\ D_{(1)} = \frac{x^2}{3} D_{g(1)}, \quad D_{s(1)} = \frac{1}{3} D_{g(1)}.$$

Система спостерігачів (уявних, звичайно), які реалізують конформно-ньютонівську систему відліку, на основі космологічних вимірювань могла б установити, що збурення метрики й густини речовини галактичних масштабів приблизно однакові за величиною.

Отже, поки масштаб збурень більший за горизонт частинки (чи звуковий горизонт, оскільки вони сумірні), то амплітуда збурень у калібрувальньо-інваріантних величинах зростає згідно з (75)–(79). Фізичний масштаб збурень $l_{\text{gal,cl}} \sim a k_{\text{gal,cl}}^{-1}$ збільшується пропорційно до масштабного фактора. Оскільки горизонт частинки в моделях з переважанням за густиною гравітуючої матерії зростає швидше від фізичного масштабу збурень, то завжди наступить той момент, коли збурення за розмірами стане меншим за розмір горизонту частинки на цей час, тобто коли $x \sim 1$. Для збурень масштабу галактики цьому моменту часу (~ 1 рік) відповідає червоне зміщення $\sim 10^6$. Збурення з розміром багатого скупчення галактик (~ 5 Мпк) входить у горизонт частинки в момент часу ~ 200 років, йому відповідає червоне зміщення $\sim 5 \cdot 10^4$. Для аналізу розвитку амплітуди збурень у цей час необхідно користуватися точними розв'язками (70)–(74). Подивімося тепер, як із часом змінюється амплітуда тих збурень, які давно ввійшли в горизонт і їх розмір набагато менший за горизонт частинки, $x \gg 1$. Легко бачити, що в цей час

$$D_g = D = D_s = C_1 \cos x, \quad V = \frac{\sqrt{3}}{4} C_1 \sin x, \\ \Psi = -\frac{1}{2} C_1 \frac{\cos x}{x^2}, \quad (80)$$

тобто збурення поведуться як стоячі акустичні хвилі. Тепер уже $\Psi \ll D$ і часовий розвиток калібрувальньо-інваріантних величин збурень повністю збігається

з результатами координатного опису розвитку збурень у межах класичної гідродинаміки. На завершення цього параграфу наведемо графічну залежність (рис. 1) амплітуд калібрувально-інваріантних величин від часу (70)–(72)

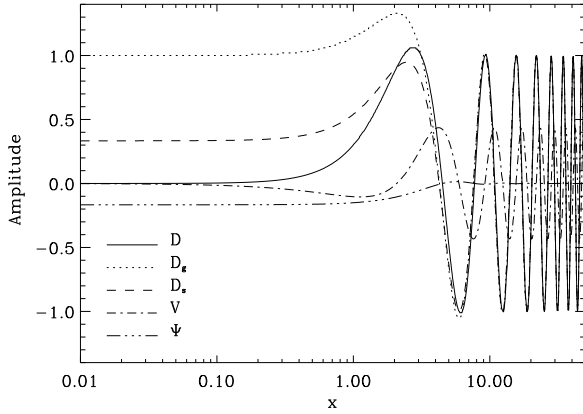


Рис. 1. Епоха домінування випромінювання. Залежність амплітуд калібрувально-інваріантних величин D , D_g , D_s , V , Ψ зростаючої моди збурень від конформного часу η , зведеного до безрозмірних одиниць $x = k\eta/\sqrt{3}$. Стала інтегрування C_1 покладена тут рівною -1 .

В. Епоха домінування матерії

На момент часу, який відповідає червоному зміщенню $z_{eq} \approx a_{eq}^{-1}$ (рівняння (22)), густина релятивістського складника речовини ($\rho_{\gamma+\nu} \propto a^{-4}$) і нерелятивістської баріонної й темної матерії ($\rho_m \propto a^{-3}$) зрівнюються, після чого визначальну роль у динаміці розширення Всесвіту починає відігравати матерія. У баріонній моделі без темної матерії з $\Omega_m = \Omega_b \approx 0.1$ (баріонна модель) такий момент рівності густин настає одночасно з космологічною рекомбінацією $z_{rec} \approx a_{rec}^{-1}$. До цього моменту часу весь водень йонізований, і внаслідок жорсткого зв'язку (через томсонівське розсіювання) випромінювання з речовиною плазма веде себе як суцільне середовище з ультрарелятивістським рівнянням стану і швидкістю звуку $c_s \approx 1/\sqrt{3}$. До цього моменту часу амплітуди калібрувально-інваріантних величин збурень еволюціонують згідно з (70)–(74) для зростаючого розв'язку. Після рекомбінації, яку можна вважати миттєвою, середовище стає цілком прозорим, випромінювання від'єднується від матерії, тиск і швидкість звуку спадають до таких низьких величин, що масштаб галактичних збурень робиться значно більшим від масштабу Джинса. Тиск стає несуттєвим у динаміці розширення й еволюції збурень. Отже, наступне наближення — це суцільне середовище з нульовим тиском $P = 0$ і нульовою кривиною Z -простору.

Рівняння (60)–(63) в цьому випадку ($a \propto \eta^2$) набувають вигляду

$$\dot{D}_g = -kV, \quad (81)$$

$$\dot{V} + \frac{2}{\eta}V = k\Psi, \quad (82)$$

$$6D_g + (18 + k^2\eta^2)\Psi + \frac{36}{k\eta}V = 0, \quad (83)$$

$$\dot{\Psi} + \frac{2}{\eta}\Psi = \frac{6}{k\eta^2}V. \quad (84)$$

Із них можна отримати диференціальне рівняння 2-го порядку для будь-якої калібрувально-інваріантної величини D_g , D , V чи Ψ . Для останньої рівняння є найпростішим,

$$\ddot{\Psi} + \frac{6}{\eta}\dot{\Psi} = 0,$$

з очевидними фундаментальними розв'язками:

$$\Psi = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x^{-5}, \quad (85)$$

де $x \equiv k\eta$, а \tilde{C}_1 і \tilde{C}_2 — константи інтегрування, які загалом є комплексними функціями хвильового числа k і задаються початковими умовами або умовами зшивання розв'язків на межі епох. Із рівнянь (81)–(84) і (64) отримуємо розв'язки для інших калібрувально-інваріантних величин:

$$D_g = -\tilde{C}_1 \left(5 + \frac{x^2}{6} \right) - \frac{1}{6}\tilde{C}_2 x^{-3}, \quad (86)$$

$$V = \frac{1}{3}\tilde{C}_1 x - \frac{1}{2}\tilde{C}_2 x^{-4}, \quad (87)$$

$$D = -\frac{1}{6}\tilde{C}_1 x^2 - \frac{1}{6}\tilde{C}_2 x^{-3} = -\frac{1}{6}x^2\Psi, \quad (88)$$

$$D_s = -\tilde{C}_1 \left(2 + \frac{x^2}{6} \right) - \tilde{C}_2 \left(\frac{1}{6}x^{-3} - 3x^{-5} \right). \quad (89)$$

Як і в попередній епосі, маємо два фундаментальні розв'язки — зростаючий (константа інтегрування \tilde{C}_1) і спадаючий (константа інтегрування \tilde{C}_2). Очевидно, що формування структури Всесвіту описується зростаючим розв'язком. Спадний необхідний, однак на початку епохи, коли зшиваються розв'язки на момент зміни рівняння стану.

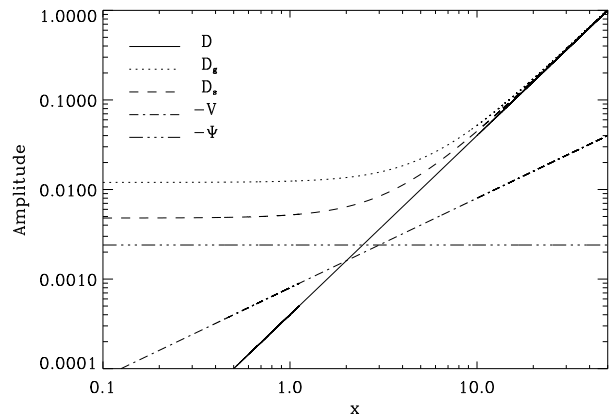


Рис. 2. Епоха домінування матерії. Залежність амплітуд калібрувально-інваріантних величин D , D_g , D_s , V , Ψ зростаючої моди збурень від конформного часу η , зведеного до безрозмірних одиниць $x = k\eta$. Амплітуди збурень густини нормовані на 1 для $k\eta = 50$.

Відстань до горизонту частинки на момент космологічної рекомбінації $\sim 200h^{-1}$ Мпк, тому для елементів великомасштабної структури масштабу галактик, скупчень і навіть надскупчень галактик $x \gg 1$. Для них $D_g \approx D_s \approx D = -x^2\Psi/6$, тобто $|\Psi| \ll D$, і різниця між координатним описом (у конформно-ньютонівській, синхронній, супутній чи інших системах відліку) і калібрувально-інваріантним описом щезає. Розвиток збурень цих масштабів із достатньою точністю описується і в межах класичної гідродинаміки [38]. На рис. 2 показано залежність амплітуд калібрувально-інваріантних величин (85)–(89) від $x = k\eta$. Як бачимо, D , D_g і D_s відрізняються на масштабах, більших за горизонт частинки $\lambda > \eta$. Важливою рисою цієї моделі є незмінність гравітаційного потенціалу з часом.

С. Моделі з космологічною сталою і 3-кривиною

На пізніх етапах еволюції Всесвіту ($z < 10$) слід очікувати впливу космологічної сталої та кривини 3-простору на темп зростання амплітуди збурень. Для оцінки такого впливу проаналізуємо систему рівнянь (60)–(63) при $\Omega_\Lambda \neq 0$ і $\Omega_K \neq 0$. Рівняння (61) і (63) можна звести до одного рівняння для потенціалу Ψ

$$\ddot{\Psi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Psi} + \left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - K\right)\Psi = 0,$$

або для збурення густини D

$$\ddot{D} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{D} + \left(\frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - K\right)D = 0,$$

де a є розв'язком рівняння (14). Останнє рівняння з використанням (14) можна звести до вигляду

$$\begin{aligned} & D'' \left(\Omega_m + \frac{a}{a_o}\Omega_K + \frac{a^3}{a_o^3}\Omega_\Lambda \right) \\ & + D' \left(\frac{3}{2a}\Omega_m + \frac{2}{a_o}\Omega_K + 3\frac{a^2}{a_o^3}\Omega_\Lambda \right) - D\frac{3}{2a^2}\Omega_m = 0, \end{aligned} \quad (90)$$

де $(') \equiv \frac{d}{da}$, a_o – масштабний фактор у сучасну епоху. Загальний розв'язок цього рівняння є таким:

$$D(a) = C_1 \frac{a_o}{a} X^{1/2} \int_0^a X^{-3/2} da + C_2 \frac{a_o}{a} X^{1/2}, \quad (91)$$

де $X = (a_o/a)\Omega_m + \Omega_K + (a/a_o)^2\Omega_\Lambda$, C_1 , C_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов. Із рівнянь (60)–(63) можна отримати розв'язки для амплітуд інших калібрувально-інваріантних величин збурень. Залежності амплітуд калібрувально-інваріантних величин D , D_g , D_s , V та Ψ зростаючої моди збурень ($k = 0.006h$ Мпк) від масштабного фактора a показані на рис. 3 для моделі з матерією космологічною сталою, а на рис. 4 – для моделі з від'ємною кривиною 3-простору.

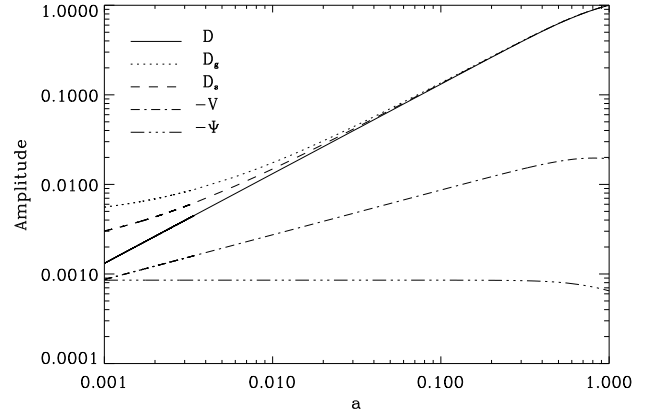


Рис. 3. Модель з космологічною сталою ($\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_m = 0.27$, $\Omega_K = 0$): залежність амплітуд калібрувально-інваріантних величин D , D_g , D_s , V , Ψ зростаючої моди збурень ($k = 0.006h/\text{Мпк}$) від масштабного фактора a . Амплітуди збурень густини нормовані на 1 для сучасного моменту часу.

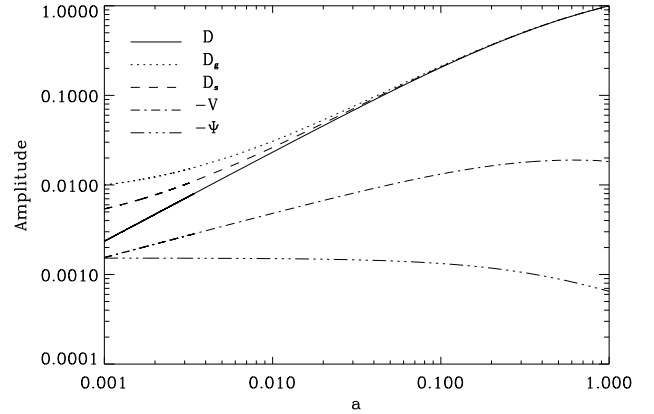


Рис. 4. Модель із кривиною 3-простору < 0 ($\Omega_K = 0.73$, $\Omega_m = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0$): залежність амплітуд калібрувально-інваріантних величин D , D_g , D_s , V , Ψ зростаючої моди збурень ($k = 0.006h/\text{Мпк}$) від масштабного фактора a . Амплітуди збурень густини нормовані на 1 для сучасного моменту часу.

Важливою відмінністю розвитку збурень у цих моделях у порівнянні із показаними на рис.2 є сповільнення зростання амплітуд на пізніх етапах еволюції та змінність гравітаційного потенціалу з часом. Перша дозволяє погодити теоретичні передбачення розподілу квазарів, галактик та скупчень галактик за червоними зміщеннями зі спостережуваними, а друга зумовлює інтегральний ефект Сакса–Вольфа у формуванні спектра потужності флюктуацій температури реліктового випромінювання.

Розв'язки (91) часто використовуються в теорії формування великомасштабної структури Всесвіту, тому проаналізуємо докладніше його асимптотики при $a \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$ та різних співвідношеннях Ω_m , Ω_K та Ω_Λ .

а). Коли $a \rightarrow 0$, (91) зводиться до розв'язків (88):

$D(a) \approx 2/5 C_1/\Omega_m a + \sqrt{\Omega_m} C_2 (a_o/a)^{3/2}$. Перший розв'язок — зростаючий за амплітудою розв'язок скалярної моди збурень у пилоподібному Всесвіті, другий — спадний. Оскільки в епоху космологічної рекомбінації $D(a_{\text{rec}}) \sim 10^{-5}$, то другий розв'язок можна опустити в аналізі розвитку збурень у післярекомбінаційну епоху — $C_2 \sim D(a_{\text{rec}})(a_{\text{rec}}/a_o)^{3/2}$ ($a_{\text{rec}} \ll a_o$).

б). Коли $a \rightarrow \infty$ (пізня стадія еволюції моделей з космологічною сталою > 0 , стадія де Сігтера), (91) $\rightarrow D(a) \approx D(a_1) + 1/(2\Omega_\Lambda) C_1(a_1^{-2} - a^{-2}) + \sqrt{\Omega_\Lambda} C_2$, де

$$D(a_1) = C_1 \frac{a_o}{a_1} \sqrt{X(a_1)} \int_0^{a_1} X^{-3/2} da,$$

$a \geq a_1 \gg a_o$. Отже, малі збурення густини речовини на десігтерівській стадії розширення Всесвіту “застигають”.

Ці асимптотики не залежать від значення параметра кривини 3-простору $|\Omega_K| \leq \Omega_\Lambda$. Якщо $\Omega_\Lambda \approx 0$ і $\Omega_K > 0$ при $a \rightarrow 0$, отримаємо такі ж асимптотичні розв'язки, як у випадку а), а при $a \rightarrow \infty$ (91) $\rightarrow D(a) \approx D(a_1) + a_o/\Omega_K C_1(1 - a_1/a) + \sqrt{\Omega_K} C_2 a_o/a$ для $a \geq a_1 \gg a_o$. Отже, у відкритій фрідманівській моделі Всесвіту ($\Omega_K > 0$) наростаючий розв'язок рівнянь еволюції амплітуди збурень густини речовини теж асимптотично прямує до сталого значення, “застигає”.

Найцікавішим є перехідний період, у якому ми проводимо спостереження і їх аналіз. Динаміка розвитку амплітуди збурень густини в діапазоні червоних зміщень від 0 до 100 для трьох класів моделей показана на рис. 7 суцільними лініями. Зростаючий розв'язок (91) використовується для зв'язку характеристик великомасштабної структури Всесвіту з початковим спектром потужності збурень густини речовини в Λ CDM моделях.

IV. КОСМОЛОГІЧНІ ЗБУРЕННЯ В БАГАТОКОМПОНЕНТНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Спостережуваний Всесвіт можна описати моделлю однокомпонентного середовища на ранніх стадіях його еволюції задовго до космологічної рекомбінації та деякий період після неї, коли роль випромінювання вже не суттєва, а вплив космологічної сталої ще не суттєвий. Але в період відриву реліктового випромінювання від баріонної речовини ми повинні враховувати в динаміці розвитку збурень обидві ці компоненти, а також наявність темної матерії. В епоху формування великомасштабної структури Всесвіту та її елементів важливими компонентами, що визначають її спостережувані характеристики, є темна матерія, темна енергія та баріонна речовина. В моделях із квінтесенцією у вигляді поля-відстежувача на всіх етапах еволюції збурень необхідно брати до уваги наявність не менш як двох компонент одночасно. Отже, приходимо до необхідності розширення теорії космологічних збурень для багатоконпонентного середовища. Її основи закладені у фундаментальній праці [16].

Зрозуміло, що збурення метричного тензора — геометричної частини рівнянь Айнштайна — є тими ж, що й у розглянутому вже випадку однокомпонентного середовища. Відмінності з'являються в матеріальній частині рівнянь, тому що: а) кожна компонента збурена за властивою для неї природою; б) взаємодія між компонентами приводить до перетікання енергії між ними; в) з'являються додаткові невизначеності у фіксації системи відліку, усереднення спостережень у якій дає один і той самий космологічний фон (додатковий калібрувальний ступінь вільності).

Уважаємо, що загальний тензор енергії-імпульсу системи є сумою тензорів енергії-імпульсу кожної компоненти

$$T_\nu^\mu = \sum_n T_{(n)\nu}^\mu. \quad (92)$$

Тут і далі індекс у дужках означатиме номер компоненти (наприклад, 1 — електромагнетне випромінювання, 2 — баріонна речовина, 3 — холодна темна матерія і т. д.). Для консервативної в цілому системи виконується закон збереження повного тензора енергії-імпульсу

$$T_{\nu;\mu}^\mu = \sum_n T_{(n)\nu;\mu}^\mu = 0, \quad (93)$$

але для кожної компоненти через взаємодію між ними з'являється 4-вектор джерела потоку енергії $Q_{(n)}$:

$$T_{(n)\nu;\mu}^\mu = Q_{(n)\nu}. \quad (94)$$

З (93) впливає рівняння зв'язку між усіма $Q_{(n)\nu}$:

$$\sum_n Q_{(n)\nu} = 0. \quad (95)$$

Уважаємо, що кожна компонента описується тензором енергії-імпульсу ідеальної рідини:

$$T_{(n)\nu}^\mu = (\rho_{(n)} + p_{(n)})u_\nu u^\mu + p_{(n)}\delta_\nu^\mu,$$

де $\rho_{(n)}$ і $p_{(n)}$ — густина енергії і тиск n -ої компоненти. У незбуреному випадку

$$u_\nu = (-a, 0, 0, 0), \quad u^\nu = (a^{-1}, 0, 0, 0),$$

що веде за собою

$$Q_{(n)\nu} = (-aQ_{(n)}, 0, 0, 0), \quad Q_{(n)}^\nu = (a^{-1}Q_{(n)}, 0, 0, 0).$$

Рівняння руху для цієї компоненти набирає вигляду

$$\dot{\rho}_{(n)} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1 - q_{(n)})h_{(n)}, \quad (96)$$

де

$$h_{(n)} = \rho_{(n)} + p_{(n)}, \quad q_{(n)} \equiv Q_{(n)}/\left(3\frac{\dot{a}}{a}h_{(n)}\right).$$

Складаючи рівняння (96) для всіх n з урахуванням (95), отримаємо рівняння (11), у якому $\rho = \sum_n \rho_{(n)}$, $p = \sum_n p_{(n)}$, $h = \rho + p$.

Як і в однокомпонентному середовищі 4-швидкість кожної компоненти означена як одиничний часоподібний власний вектор $u_{(n)}^\nu$, а густина енергії і тиск — відповідно $0 - 0$ та $i - i$ компоненти відповідного тензора енергії-імпульсу:

$$T_{0(n)}^0 = -\rho_{(n)} \quad T_{i(n)}^i = p_{(n)} \delta_i^i.$$

Аналогічно представляються також збурення густини та швидкості кожної компоненти —

$$\rho_{(n)} = \bar{\rho}_{(n)} (1 + \delta_{(n)}), \quad u_{(n)}^\nu = \bar{u}_{(n)}^\nu + \delta u_{(n)}^\nu,$$

які в розкладі за власними функціями рівняння Гельмгольца мають вигляд

$$\begin{aligned} \rho_{(n)} &= \bar{\rho}_{(n)} (1 + \delta_{(n)} Y), \quad u_{(n)}^i / \bar{u}_{(n)}^0 = v_{(n)} Y^i, \\ u_{(n)}^0 &= \bar{u}_{(n)}^0 (1 - AY), \quad u_{i(n)} / \bar{u}_{0(n)} = - (v_{(n)} - B) Y_i, \\ u_{0(n)} &= \bar{u}_{0(n)} (1 + AY). \end{aligned}$$

Компонентами тензора енергії-імпульсу для n -ої компоненти є:

$$\begin{aligned} T_{0(n)}^0 &= -\rho_{(n)} (1 + \delta_{(n)} Y), \quad T_{0(n)}^i = -h_{(n)} v_{(n)} Y^i, \\ T_{i(n)}^0 &= h_{(n)} (v_{(n)} - B) Y_i, \\ T_{j(n)}^i &= p_{(n)} (\delta_j^i + \Pi_{L(n)} \delta_j^i + \Pi_{T(n)} Y_j^i), \end{aligned}$$

де $\Pi_{L(n)}$ і $\Pi_{T(n)}$ — це відповідно амплітуди ізотропного й анізотропного складників збурення тиску n -ої компоненти.

Легко бачити, що величини збурень усієї матерії, які входять до правої (матеріальної) частини рівнянь Айнштайна, є сумою відповідних величин за всіма компонентами

$$\begin{aligned} \rho \delta &= \sum_n \rho_{(n)} \delta_{(n)}, \quad hv = \sum_n h_{(n)} v_{(n)}, \\ p \Pi_L &= \sum_n p_{(n)} \Pi_{L(n)}, \quad p \Pi_T = \sum_n p_{(n)} \Pi_{T(n)}. \end{aligned}$$

Із урахуванням (92), (95) отримаємо такі самі рівняння еволюції скалярних збурень усієї матерії у вибраній системі відліку, як і в однокомпонентному середовищі. Уведемо калібрувальні-інваріантні величини збурень і наведемо рівняння їх динаміки для кожної компоненти.

При калібрувальних перетвореннях амплітуди збурень n -ої компоненти перетворюються подібно, як і в однокомпонентному середовищі, за винятком тих коефіцієнтів, які з'являються при перетвореннях густини енергії внаслідок відмінності рівнянь (11) і (96):

$$\begin{aligned} v_{(n)} &= \bar{v}_{(n)} + \dot{L}, \quad \delta_{(n)} = \bar{\delta}_{(n)} + 3(1 + \omega_{(n)})(1 - q_{(n)}) \frac{\dot{a}}{a} T, \\ \Pi_{L(n)} &= \bar{\Pi}_{L(n)} + 3(1 + \omega_{(n)})(1 - q_{(n)}) \frac{c_{(n)}^2}{\omega_{(n)}} \frac{\dot{a}}{a} T, \quad \Pi_{T(n)} = \bar{\Pi}_{T(n)}. \end{aligned}$$

Калібрувальні-інваріантні величини збурень будуються подібно, як і в однокомпонентному середовищі:

$$V_{(n)} \equiv v_{(n)} - \frac{1}{k} \dot{H} T, \quad D_{(n)} \equiv \delta_{(n)} + 3(1 + \omega_{(n)})(1 - q_{(n)}) \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{k} (v_{(n)} - B), \quad \Gamma_{(n)} \equiv \Pi_{L(n)} - \frac{c_{(n)}^2}{\omega_{(n)}} \delta_{(n)}. \quad (97)$$

Для збурення густини енергії n -ої компоненти маємо кілька альтернативних означень

$$D_{c(n)} \equiv \delta_{(n)} + 3(1 + \omega_{(n)})(1 - q_{(n)}) \frac{1}{k} \frac{\dot{a}}{a} (v - B), \quad (98)$$

$$D_{g(n)} \equiv \delta_{(n)} + 3(1 + \omega_{(n)})(1 - q_{(n)}) \left(H_L + \frac{1}{3} H_T \right), \quad (99)$$

$$D_{s(n)} \equiv \delta_{(n)} - 3(1 + \omega_{(n)})(1 - q_{(n)}) \frac{1}{k} \frac{\dot{a}}{a} \left(B - \frac{1}{k} \dot{H} T \right), \quad (100)$$

які пов'язані між собою співвідношеннями

$$\begin{aligned} D_{s(n)} &= D_{g(n)} - 3(1 + \omega_{(n)})(1 - q_{(n)}) \Phi \\ &= D_{(n)} - 3(1 + \omega_{(n)})(1 - q_{(n)}) \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{k} V_{(n)} = D_{c(n)} - 3(1 + \omega_{(n)})(1 - q_{(n)}) \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{k} V. \end{aligned} \quad (101)$$

Калібрувальні-інваріантна величина збурення $D_{(n)}$ — це збурення густини в системі відліку, супутній до n -ої компоненти, а $D_{c(n)}$ — в системі відліку супутній

до середньої швидкості всієї матерії.

Радикальною відмінністю розгляданого випадку від однокомпонентного середовища є наявність ще

однієї величини — функції джерела $Q_{\nu(n)}$, яка феноменологічно описує взаємодію компонент й обмін енергією-імпульсом між ними. Як і в [16], запишемо її в розкладі на дві частини — проєкції на 4-вектор середньої швидкості u^ν й ортогональний до неї складник:

$$Q_{\nu(n)} = \tilde{Q}(n)u_\nu + f_{\nu(n)}, \quad f_{\nu(n)}u^\nu = 0. \quad (102)$$

Оскільки u_ν і $f_{\nu(n)}$ — величини 1-го порядку малости в лінійній теорії збурень, то в системі відліку, супутній до центра мас, $f_{0(n)} = 0$ завжди. Тобто цей складник є 3-вектором, який описує “збурений” складник 4-вектора функції джерела, ортогональний до 3-вектора швидкості цієї компоненти. “Збурені” складники функції джерела записуємо в розкладі за власними функціями рівняння Гельмгольца так:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(n) &= Q(n)(1 + \epsilon(n))Y, \\ f_i(n) &= \frac{\dot{a}}{a}h_{(n)}f(n)Y_i. \end{aligned}$$

Оскільки при калібрувальних перетвореннях

$$\epsilon(n) = \bar{\epsilon}(n) - \frac{\dot{Q}(n)}{Q(n)}T,$$

то можна побудувати кілька калібрувально-інваріантних величин, аналогічних до (97)–(100)

$$E_{(n)} \equiv \epsilon(n) - \frac{1}{k} \frac{\dot{Q}(n)}{Q(n)}(v(n) - B), \quad (103)$$

$$E_{c(n)} \equiv \epsilon(n) - \frac{1}{k} \frac{\dot{Q}(n)}{Q(n)}(v - B) = E_{(n)}$$

$$+ \frac{1}{k} \frac{\dot{Q}(n)}{Q(n)}(V(n) - V), \quad (104)$$

$$E_{g(n)} \equiv \epsilon(n) - \frac{\dot{Q}(n)}{Q(n)} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^{-1} \left(H_L + \frac{1}{3} H_T \right), \quad (105)$$

$$E_{s(n)} \equiv \epsilon(n) + \frac{1}{k} \frac{\dot{Q}(n)}{Q(n)} \left(B - \frac{1}{k} \dot{H}_T \right), \quad (106)$$

які так співвідносяться між собою:

$$\begin{aligned} E_{s(n)} &= E_{g(n)} + \frac{\dot{Q}(n)}{Q(n)} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^{-1} \Phi = E_{(n)} + \frac{1}{k} \frac{\dot{Q}(n)}{Q(n)} V(n) \\ &= E_{c(n)} + \frac{1}{k} \frac{\dot{Q}(n)}{Q(n)} V. \end{aligned} \quad (107)$$

Ортогональний складник функції джерела не змінюється при калібрувальних перетвореннях — $f(n) = \bar{f}(n)$, а отже є калібрувально-інваріантною величиною.

Рівняння Айнштайна (зв’язку й еволюційні) для калібрувально-інваріантних величин всієї матерії є тими ж, що й рівняння (51), (52) і (54), де, замість ρ , p , D , V і $\Pi^{(S)}$, необхідно покласти

$$\rho = \sum_n \rho(n), \quad p = \sum_n p(n), \quad \rho D = \sum_n \rho(n) D(n),$$

$$V = \sum_n (\rho(n) + p(n)) V(n) / (\rho + p),$$

$$\Pi^{(S)} = \sum_n p(n) \Pi(n) / p. \quad (108)$$

Рівняння ж руху для кожної компоненти отримуємо з рівнянь збереження енергії-імпульсу (94) кожної компоненти:

$$\begin{aligned} \dot{D}_{g(n)} + 3 \left[c_{(n)}^2 + q(n) - \omega(n) + q(n)\omega(n) \right] \frac{\dot{a}}{a} D_{g(n)} + (1 + \omega(n))kV(n) \\ = a\rho(n)^{-1} \left(\mathcal{A}Q(n) + E_{s(n)}Q(n) - \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} \dot{Q}(n)\Phi \right) - 3\frac{\dot{a}}{a}\omega(n)\Gamma(n), \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(n) + \left[1 - 3c_{(n)}^2 + 3(1 + c_{(n)}^2)q(n) \right] \frac{\dot{a}}{a} V(n) = 3\frac{\dot{a}}{a}q(n)V + k \left(\Psi - 3c_{(n)}^2(1 - q(n))\Phi \right) \\ + \frac{c_{(n)}^2 k}{1 + \omega(n)} D_{g(n)} + \frac{\omega(n)k}{1 + \omega(n)} \left[\Gamma(n) - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{3K}{k^2} \right) \Pi(n) \right] + \frac{\dot{a}}{a} f(n). \end{aligned} \quad (110)$$

Тут $\mathcal{A} \equiv \Psi - (2 - a\ddot{a}/\dot{a}^2)\Phi - a\dot{\Phi}/\dot{a}$ (калібрувально-інваріантна величина введена в [16]).

Для інтегрування системи диференціальних рівнянь Айнштайна (51), (52) і (54) із (108) та рівнянь збережень (109)–(110) необхідно ще задати функції $Q_{\nu(n)}$ (102) або одну з калібрувально-інваріантних величин (103)–(106) та $f(n)$, які описують взаємодію (негравітаційну) компонент. Для збурень із масштабом, більшим за горизонт частинки, їх можна опустити, для менших масштабів вони залежать від конкрет-

ного фізичного механізму взаємодії. Далі буде розглянуто баріонно-фотонну плазму, в якій взаємодія між частинками зумовлена ефектами розсіяння Томсона та Комптона.

Отже, для розрахунку збурень густини енергії випромінювання та флюктуацій температури реліктового випромінювання, які зумовлені адіабатичними збуреннями в епоху космологічної рекомбінації, необхідно враховувати взаємодію випромінювання з баріонною плазмою через томсонівське й комптонівське

розсіювання, перерозподіл квантів за частотами, поляризацією та напрямками поширення.

Якщо складниками густини енергії Всесвіту є беззйткновальні частинки, холодна та гаряча темна матерія, то для обчислення компонент тензора енергії-імпульсу використовують рівняння Больцмана для еволюції функції розподілу частинок у фазовому просторі.

V. РІВНЯННЯ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЇ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ЧАСТИНОК У ФАЗОВОМУ ПРОСТОРІ

Оскільки ми розглядаємо скалярні збурення, то введемо рівняння Больцмана в конформно-ньютонівському калібруванні (37). Фазовий простір описуємо шістьма змінними — трьома положеннями x^i і супутніми до них компонентами імпульсу P_i . Для частинки з масою m супутній імпульс $P_i = mU_i$, де $U_i = dx_i / (-ds^2)^{1/2}$. Супутній і власний імпульси $p^i = p_i$ пов'язані співвідношенням

$$P_i = a(1 + \Phi)p_i. \quad (111)$$

За відсутності збурень метрики рівняння Гамільтона показують, що супутній імпульс є сталою величиною, а власний — є функцією від a^{-1} . Функція розподілу визначає кількість частинок в елементарному об'ємі $dx^1 dx^2 dx^3 dP_1 dP_2 dP_3$ фазового простору

$$f(x^i, P_j, \eta) dx^1 dx^2 dx^3 dP_1 dP_2 dP_3 = dN. \quad (112)$$

Важливо, що f є скалярною величиною, інваріантною при канонічних перетвореннях. Основним наближенням розподілу частинок є розподіл Фермі-Дірака для ферміонів (знак +) та Бозе-Айнштайна для бозонів (знак -):

$$f_0 = f_0(\epsilon) = \frac{g_s}{h_p^3} \frac{1}{e^{\epsilon/k_B T_0} \pm 1}, \quad (113)$$

де $\epsilon = a(p^2 + m^2)^{1/2} = (P^2 + a^2 m^2)$, $T_0 = aT$ — температура частинок у сучасну епоху, фактор g_s — кількість ступенів вільності, h_p і k_B — константи Планка і Больцмана відповідно.

У збуреному просторі-часі x^i і P_i залишаються канонічно спряженими змінними, а рівнянням руху частинок є рівняння Гамільтона. Щоб вилучити збурення метрики з означення імпульсів частинок, використовують замість P_j величину $q_j \equiv ap_j$ [22], а 3-імпульс q_j представляється як добуток абсолютного значення імпульсу й одиничного вектора його напрямку: $q_j = qn_j$, де $n^i n_i = \delta_{ij} n^i n_i = 1$. Змінивши так координати фазового простору, отримуємо $f(x^i, q, n_j, \eta)$ замість $f(x^i, P_j, \eta)$. Це перетворення не канонічне (q_i не є канонічно спряженою змінною для x^i), але його коректність забезпечується відповідними перетвореннями імпульсів у рівняннях Гамільтона. Оскільки q_j не канонічний імпульс, то $d^3 x d^3 q$ —

не кількість частинок. У конформно-ньютонівському калібруванні, наприклад, кількість частинок — це $(1 + 3\Phi) f d^3 x d^3 q$, що є зрозумілим, оскільки власною відстанню є $a(1 + \Phi) dx^i$.

За наявності збурень енергія частинки є означається як енергія, виміряна супутнім до неї спостерігачем $\epsilon = (q^2 + a^2 m^2)^{1/2}$. Звідси можна отримати часову компоненту 4-імпульсу: $P_0 = -(1 + \Psi)\epsilon$. Для ультрарелятивістських частинок, таких, як нейтрино та фотони, ϵ в розподілах Фермі-Дірака та Бозе-Айнштайна можна просто замінити на q .

Вираз для тензора енергії-імпульсу, записаний через функцію розподілу, загалом має вигляд

$$T_{\mu\nu} = \int dP_1 dP_2 dP_3 (-g)^{-1/2} \frac{P_\mu P_\nu}{P_0} f(x^i, P_j, \eta), \quad (114)$$

де g — визначник $g_{\mu\nu}$. Функцію розподілу можна записати як суму функції розподілу в нульовому наближенні та збуреної частини в нових змінних q та n_j :

$$f(x^i, P_j, \eta) = f_0(q) [1 + F(x^i, q, n_j, \eta)]. \quad (115)$$

У конформно-ньютонівському калібруванні в лінійному наближенні $(-g)^{-1/2} = a^{-4}(1 - \Psi - 3\Phi)$ і $dP_1 dP_2 dP_3 = (1 + 3\Phi) q^2 dq d\Omega$ ($d\Omega$ — тілесний кут зв'язаний з напрямком імпульсу n_i). Використовуючи вирази $\int d\Omega n_i n_j = 4\pi \delta_{ij}/3$ і $\int d\Omega n_i = \int d\Omega n_i n_j n_k = 0$, з рівняння (114) в лінійному наближенні за збуреннями отримаємо

$$T_0^0 = -a^{-4} \int q^2 dq d\Omega \sqrt{q^2 + m^2 a^2} f_0(q) (1 + F), \quad (116)$$

$$T_i^0 = a^{-4} \int q^2 dq d\Omega q n_i f_0(q) F, \quad (117)$$

$$T_j^i = a^{-4} \int q^2 dq d\Omega \frac{q^2 n_i n_j}{\sqrt{q^2 + m^2 a^2}} f_0(q) (1 + F). \quad (118)$$

При цьому використали представлення P_i через добуток q і n_i , а вираз для енергії $\epsilon(q, \eta) = (q^2 + a^2 m^2)^{1/2}$ підставляли лише в інтеграл, а в аргументі незбуреної функції розподілу залишали q . Масштабний фактор a та F визначені в точці (x^i, η) конформно-ньютонівського калібрування.

Еволюцію функції розподілу описуємо рівнянням Больцмана, яке у змінних (x^i, q, n_j, η) записується так:

$$\begin{aligned} \frac{Df}{d\eta} &= \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dq}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{dn_i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial n_i} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_C, \end{aligned} \quad (119)$$

де права частина містить доданки, вигляд яких залежить від конкретного фізичного механізму взаємодії. Із рівнянь для геодезійних

$$P^0 \frac{dP^\mu}{d\eta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta = 0,$$

одержимо

$$dq/d\eta = -q\dot{\Phi} - \epsilon(q, \eta) n_i \partial_i \Psi.$$

Тут $dn_i/d\eta \in O(h)$. І оскільки величина $\partial f/\partial n_i$ є також величиною першого порядку малости, то доданком $(dn_i/d\eta)(\partial f/\partial n_i)$ у рівнянні Больцмана можна знехтувати в лінійному наближенні. Ураховуючи це, із (119) отримуємо таке рівняння для збуреної частини функції розподілу в k -просторі для скалярної моди збурень:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \eta} + i \frac{q}{\epsilon} (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}) F + \frac{d \ln f_0}{d \ln q} \left[-\dot{\Phi} - i \frac{\epsilon}{q} (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \Psi \right] \\ = C[f], \end{aligned} \quad (120)$$

де $C[f] \equiv \frac{1}{f_0} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_C$. Складники рівняння Больцмана залежать від кута між напрямком імпульсу $\hat{\mathbf{n}}$ та \mathbf{k} . Якщо залежність імпульсу від початкових збурень у фазовому просторі є аксіально симетрична відносно k , тоді виникає аксіальна симетрія. Якщо виникають аксіально асиметричні збурення густини нейтрино чи інших невзаємодіючих компонент, то вони згенерували б не скалярні метричні збурення, і це проявилось б на інших компонентах. Отже, початкова залежність імпульсу є аксіально симетричною, і F залежить лише від q та $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

Холодна темна матерія. Зі середини 80-их років прогрес у фізиці елементарних частинок примножив “зоопарк” можливих кандидатів на темну матерію. Здобула популярність (і практично донині її утримує) холодна форма темної матерії, яку вперше запропонував П. Піблс у 1982 р. [23]. Частинки цієї форми матерії дерелятивізувались під впливом розширення ще на ранніх стадіях еволюції Всесвіту, вони беруть участь у гравітаційній взаємодії і, можливо, слабкій. Ця модель темної матерії добре пояснює динаміку гало галактик, утворення галактик, скупчень галактик, їхні властивості та спостережувану великомасштабну структуру Всесвіту. Але, на жаль, попри наявність багатьох гіпотетичних частинок як кандидатів на елементне наповнення цього виду темної матерії, реально таких частинок досі не детектовано. Незважаючи на їхні досить загальні природні властивості (участь у гравітаційній і, можливо, слабкій взаємодіях, здатність кластеризуватися, утворюючи протяжні гало об’єктів через беззіткнювальний характер взаємодії на стадії колапсу), встановлено, що вони становлять не менше 20–30% всієї густини енергії. Для застосування рівняння Больцмана для них необхідно зробити припущення про функцію розподілу f_0 . Але оскільки їхні залишкові теплові швидкості є малими, то наближення ідеальної рідини з пилоподібним рівнянням стану $p_{\text{cdm}} = 0$ є достатньо точним для аналізу формування великомасштабної структури Всесвіту.

Масивні нейтрино можуть бути складником темної матерії і впливати на формування великомасштабної структури Всесвіту. На початку 80-х років фізики-експериментатори запідозрили, що нейтрино мають масу спокою ~ 30 еВ. Оскільки реліктових нейтрино за концентрацією в $\sim 10^9$ разів більше від протонів,

то цього достатньо, щоб вони були тою матерією, якої бракує для пояснення багатьох властивостей спостережуваного Всесвіту. На епоху рівності густини матерії й випромінювання швидкості нейтрино були близькі до релятивістських, тому такий вид темної матерії отримав назву гарячої. Хоча наступні експерименти не підтвердили такої величини маси спокою в нейтрино, експерименти кінця 90-х років на нейтринному детекторі Суперкаміоканде [27, 28] зміцнили ті підозри і дали нижню межу на її значення ~ 0.04 еВ. Верхня межа на масу спокою нейтрино ≤ 1 еВ на досить високому рівні достовірності ($\geq 95.4\%$) встановлена на основі даних спостережувальної космології — просторового розподілу галактик, скупчень галактик, їхньої функції мас та ін. (див. [29, 73] і посилання у них). Середню густину та тиск гарячої (нейтринної) компоненти темної матерії можна обчислити за функцією розподілу

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_h &= a^{-4} \int q^2 dq d\Omega \epsilon f_0(q), \\ \bar{p}_h &= \frac{1}{3} a^{-4} \int q^2 dq d\Omega \frac{q^2}{\epsilon} f_0(q). \end{aligned}$$

Для N_ν сортів нейтрино однакових мас m_ν (вироджені) для густини в одиницях критичної отримавмо $\Omega_\nu = N_\nu m_\nu h^{-2}/94$, де маса виражена в електронвольтах. Із експериментальних обмежень на масу і кількість сортів нейтрино випливає, що $0.001 \leq \Omega_\nu \leq 0.03$. Це значить, що масивні нейтрино можуть становити не більше 10% густини темної матерії. Сучасна точність даних експериментальної космології та визначення на їхній основі параметрів космологічних моделей вимагає врахування цієї компоненти в теорії формування великомасштабної структури Всесвіту, якщо її внесок є поблизу верхньої межі допустимих значень Ω_ν .

Числовим інтегруванням рівняння Больцмана (120) для збуреної частини функції розподілу нейтрино з $m_\nu \neq 0$ та $C[f] = 0$ (беззіткнювальні частинки) можна отримати його розв’язки в k -просторі для заданого імпульсу q та напрямку \mathbf{n} . Інтегруванням у (116)–(118) за q і \mathbf{n} можна вираховувати праві частини рівняння Айнштайна. Інтегрування за напрямками спрощується розкладом $F(\mathbf{k}, q, \mathbf{n}, \eta)$ за поліномами Лежандра:

$$F(\mathbf{k}, q, \mathbf{n}, \eta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-i)^\ell (2\ell + 1) F_\ell(k, q, \eta) P_\ell(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}).$$

Рівняння (120) дає ієрархічну систему рівнянь для F_ℓ :

$$\begin{aligned} \dot{F}_0 &= -\frac{qk}{\epsilon} F_1 + \dot{\Phi} \frac{d \ln f_0}{d \ln q}, \\ \dot{F}_1 &= \frac{qk}{3\epsilon} (F_0 - 2F_2) - \frac{\epsilon k}{3q} \Psi \frac{d \ln f_0}{d \ln q}, \\ \dot{F}_\ell &= \frac{qk}{(2\ell + 1)\epsilon} [\ell F_{\ell-1} - (\ell + 1) F_{\ell+1}], \quad \ell \geq 2. \end{aligned} \quad (121)$$

Вона обривається на $\ell = 50$, що відповідає масштабу беззіткнювального загасання збурень густини масивних нейтрино (див. роботи [22, 24, 34] та цитування в

них). За отриманими числовими розв'язками цієї системи рівнянь збурення густини та швидкості обчислюємо так:

$$D_s^{(h)} = \frac{4\pi}{a^4 \bar{\rho}_h} \int q^2 dq \epsilon f_0(q) F_0(k, q, \eta),$$

$$V^{(h)} = \frac{4\pi k}{a^4 (\bar{\rho}_h + \bar{P}_h)} \int q^2 dq q f_0(q) F_1(k, q, \eta).$$

Фотони та безмасові нейтрино є ультрарелятивістськими частинками ($\rho_{(\gamma,\nu)} = 3p_{(\gamma,\nu)}$) з $m_{(\gamma,\nu)} = 0$ та $\epsilon_{(\gamma,\nu)} = q_{(\gamma,\nu)}$. Рівняння (120) для них у зв'язку з цим можна представити в калібрувально-інваріантних величинах так. Оскільки $f_0(q)$ залежить від температури, а в ділянці збурень $T(\eta, \hat{\mathbf{n}}) = T(\eta) (1 + \Delta(\eta, x^i, n_j))$, то

$$F(x^i, q, n_j, \eta) = -q \frac{df_0}{dq} \Delta(\eta, x^i, n_j). \quad (122)$$

Підставляючи його в рівняння (120), отримуємо рівняння для $\Delta(\eta, x^i, n_j)$:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \eta} + ik\mu \Delta = ik\mu \Psi - \dot{\Phi} + \tilde{C}[f], \quad (123)$$

де $\mu = k^{-1} \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$, $\tilde{C}[f] \equiv -C[f]/(q \frac{df_0}{dq})$. Використовуючи співвідношення між калібрувально-інваріантними величинами, наведеними в параграфі 2.1, можна побудувати калібрувально-інваріантну величину

$$\mathcal{M} \equiv \Delta + H_L + \frac{1}{3} H_T + i\mu(k^{-1} \dot{H}_T - B). \quad (124)$$

Розкладаючи Δ і \mathcal{M} в ряд за сферичними функціями та використовуючи лоренц-інваріантність функції розподілу частинок f , можна показати, що всі компоненти розкладу, починаючи із квадрупольного, є калібрувально-інваріантними величинами [17, 18]. Використовуючи співвідношення (35)–(36), рівняння (123) зводимо до вигляду:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \eta} + ik\mu \mathcal{M} = ik\mu (\Phi - \Psi) + \tilde{C}[f]. \quad (125)$$

Ці рівняння є основними для розрахунку компонент тензора енергії-імпульсу фотонів та безмасових нейтрино. Зокрема, в термінах збурень компонент тензора-енергії імпульсу (параграф 2.1) розв'язок рівняння (125) дає [17]:

$$D_g^{(\gamma,\nu)} = \frac{1}{\pi} \int \mathcal{M} d\Omega \quad (126)$$

$$V^{(\gamma,\nu)} = \frac{3i}{4\pi} \int \mu \mathcal{M} d\Omega \quad (127)$$

$$\Pi^{(\gamma,\nu)} = -\frac{3}{\pi} \int \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1) \mathcal{M} d\Omega. \quad (128)$$

Для безмасових нейтрино рівняння (125) має найпростіший вигляд, оскільки $\tilde{C}[f] \equiv 0$. Інтеграл зіткнень для фотонів, які розсіюються на вільних електронах без обміну енергією (ефект Томсона), в

калібрувально-інваріантних змінних має такий вигляд [18]:

$$\tilde{C}[f] = \sigma_T n_e \left[\frac{1}{4} D_g^{(\gamma)} - i\mu V^{(b)} - \mathcal{M} + \frac{3}{16\pi} (n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \int \mathcal{M}(n') (n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) d\Omega' \right]. \quad (129)$$

Останні два доданки в розкладі за сферичними гармоніками дають $-(3\mu^2 - 1)(\mathcal{M}_2 - \sqrt{6}E_2)/20$, де E_2 — квадрупольний складник поляризації, зумовленої скалярною модою збурень. Метод розв'язку рівнянь (125) для безмасових нейтрино з $\tilde{C}[f] \equiv 0$ та фотонів з інтегралом зіткнень (129) докладно описаний у працях [17, 18, 20, 24, 34]. Суть методу полягає в розкладі \mathcal{M} за сферичними гармоніками, унаслідок чого із (125) отримуємо систему ієрархічних рівнянь загального виду $\dot{\mathcal{M}}_\ell = F(\mathcal{M}_\ell, \mathcal{M}_{\ell-1}, \mathcal{M}_{\ell+1})$ з $\ell \geq 1$, яка обривається на масштабах загасання відповідних компонент [24]. Як правило, це масштаби з $\ell \sim 1500$, що дає систему ~ 3000 рівнянь. Розвинутий у роботі [34] метод інтегрування цієї системи рівнянь уздовж променя зору суттєво зменшив кількість рівнянь та відповідно тривалість їх інтегрування на сучасних комп'ютерах. Він реалізований у програмах вільного доступу SMBFAST [34, 35], SAMBCODE [36], SM-BEASY [37].

Із рівняння (125) можна отримати класичний результат Сакса–Вольфа для флюктуацій температури реліктового випромінювання. Для цього припускаємо, що сфера останнього розсіювання реліктового випромінювання є безмежно тонкою, а оптична товщина за томсонівським розсіюванням між спостерігачем і нею $\tau(z) = \int_0^z c\sigma_T n_e(z) H^{-1}(z)(z+1)^{-1} dz$ дорівнює нулеві. Це означає, що $n_e(\eta) = 0$ для $\eta_{\text{rec}} \leq \eta \leq \eta_0$. Формальний розв'язок (125) отримуємо його інтегруванням в інтервалі $\eta_{\text{rec}} \leq \eta \leq \eta_0$:

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right) (\eta_0, \mathbf{n}) = \frac{1}{4} D_s^{(\gamma)}(\eta_{\text{rec}}, \mathbf{n}) + V_i^{(\gamma)}(\eta_{\text{rec}}, \mathbf{n}) n^i + (\Phi - \Psi)(\eta_{\text{rec}}, \mathbf{n}) - \int_{\eta_{\text{rec}}}^{\eta_0} (\dot{\Phi} - \dot{\Psi})(\eta) d\eta. \quad (130)$$

Тут опущені монопольний $(\Phi - \Psi)(\eta_0, \mathbf{n})$ та дипольний $V_i^{(\gamma)}(\eta_0, \mathbf{n}) n^i$ складники, які пов'язані із гравітаційним потенціалом у ділянці спостерігача та його рухом щодо реліктового випромінювання, а також використано очевидне співвідношення $(\Delta T/T)(\eta_{\text{rec}}, \mathbf{n}) = D^{(\gamma)}/4$, яке випливає із закону Стефана–Больцмана та співвідношення між калібрувально-інваріантними величинами (64), (101). Для адіябатичних збурень у наближенні тісного зв'язку між фотонами й баріонною плазмою до рекомбінації справедливі співвідношення: $D_s^{(\gamma)} = 4D_s^{(m)}/3$ і $V^{(\gamma)} = V^{(m)}$. Уважаючи, що після рекомбінації справедливі розв'язки рівнянь збурень для пилоподібного середовища з $\Psi = -\Phi$ та $D_s^{(m)} = D^{(m)} + 5\Phi$, остаточно отримуємо:

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) = \frac{1}{3} \Phi(\eta_{\text{dec}}, \mathbf{n}) + 2 \int_0^{\omega_e} \frac{\dot{\Phi}_A(\eta_0 - \omega, \mathbf{n})}{\partial \eta} d\omega + n_i V^i(\eta_{\text{dec}}, \mathbf{n}) + \frac{1}{3} \Delta^{(m)}(\eta_{\text{dec}}, \mathbf{n}), \quad (131)$$

Змінна $\omega(\eta)$ — афінний параметр уздовж геодезійної, що починається від спостерігача і закінчується в точці на сфері останнього розсіювання. Перший доданок у (131) — це добре відомий ефект Сакса–Вольфа, зумовлений гравітаційним потенціалом збурення на сфері останнього розсіювання, другий — інтегральний ефект Сакса–Вольфа, який є важливим тільки в пізніші часи в моделях з $\Omega_\Lambda \neq 0$ або $\Omega_K \neq 0$, коли $\dot{\Phi} \neq 0$ (див. рис. 3–4). Третій доданок — ефект Доплера, зумовлений збуренням швидкості, а останній — акустичний, або адіябатичний, зумовлений збуренням густини баріонно-фотонної плазми на сфері останнього розсіювання. Вираз (131) для флюктуацій температури реліктового випромінювання справедливий для збурень із масштабом, значно більшим, ніж горизонт частинки в момент космологічної рекомбінації ($\approx 2^\circ$ в кутових одиницях). Його можна також отримати шляхом інтегрування вздовж геодезійної рівняння поширення електромагнетного випромінювання у Всесвіті зі скалярними збуреннями метрики простору-часу, густини та швидкості речовини [18, 40]. Для менших масштабів наближення тонкої сфери вже не може бути застосованим, і для інтегрування рівняння (125) необхідно знати залежність концентрації вільних електронів від часу. Йонізаційна історія Всесвіту, чи космологічна рекомбінація водню та гелію, є важливими складниками теорії формування великомасштабної структури.

VI. КОСМОЛОГІЧНА РЕКОМБІНАЦІЯ ВОДНЮ ТА ГЕЛІЮ

Розрахунок швидкості зміни концентрації вільних електронів у період відриву теплового електромагнетного випромінювання від речовини, яке є спостережуваним реліктом молодого Всесвіту, набув актуальності відразу після експериментального підтвердження гарячої моделі Великого вибуху — відкриття реліктового випромінювання Пензіасом і Вільсоном у 1965 р. [41]².

Уперше такий розрахунок проведений у роботах [42] та [43] в 1968 році. У наступних працях [44–49] детально вивчено основні процеси, а точність розрахунку кінетики рекомбінації доведено до кількох відсотків. Найповніший сучасний аналіз кінетики космологічної рекомбінації здійснено в роботі [50], у якій враховано багаторівневу структуру атома водню й гелію (≈ 300 рівнів), нерівноважну кінетику та, практично, всі процеси, що визначають термічний стан плазми. Ці ж автори створили програму RECFAST [51], яка забезпечує точність розрахунку концентрації вільних електронів $\sim 1\%$. Її використовують у програмі SMBFAST [34, 35] для розрахунку спектра потужності флюктуацій густини речовини, температури та по-

ляризації реліктового випромінювання. Наведемо основні рівняння цієї теорії з огляду на їх широке використання та інтенсивні дослідження в цій галузі, які тривають.

Уведемо такі позначення: n_{H} і n_{HI} — концентрації відповідно нейтральних атомів та йонів водню, n_{HeI} , n_{HeII} і n_{HeIII} — концентрації нейтральних атомів, однократно і двічі йонізованого гелію, $n_e = n_{\text{HI}} + n_{\text{HeII}} + 2n_{\text{HeIII}}$ — концентрація вільних електронів, $n_{\text{H}} = n_{\text{H}} + n_{\text{HI}}$ — загальна концентрація водню, $n_{\text{He}} = n_{\text{HeI}} + n_{\text{HeII}} + n_{\text{HeIII}}$ — загальна концентрація гелію. Зручно перейти до відносних концентрацій: $x_{\text{HI}} \equiv n_{\text{HI}}/n_{\text{H}}$ — відносний уміст нейтрального водню, $x_{\text{HII}} \equiv n_{\text{HII}}/n_{\text{H}}$ — відносний уміст йонізованого водню, $x_{\text{HeI}} \equiv n_{\text{HeI}}/n_{\text{He}}$ — відносний уміст нейтрального гелію, $x_{\text{HeII}} \equiv n_{\text{HeII}}/n_{\text{He}}$ — відносний уміст один раз йонізованого гелію, $x_{\text{HeIII}} \equiv n_{\text{HeIII}}/n_{\text{He}}$ — відносний уміст двічі йонізованого гелію, $x_e \equiv n_e/n_{\text{H}}$ — відносний вміст електронів. Відношення загальних концентрацій гелію й водню позначмо $f_{\text{He}} \equiv n_{\text{He}}/n_{\text{H}}$, яке виражається через масову частку первинного гелію Y_P , так що $f_{\text{He}} = Y_P/4(1 - Y_P)$ (надалі в розрахунках покладемо $Y_P = 0.24$ [52]). Для них виконуються очевидні співвідношення: $x_e = x_{\text{HII}} + f_{\text{He}}x_{\text{HeII}} + 2f_{\text{He}}x_{\text{HeIII}}$, $x_{\text{HI}} + x_{\text{HII}} = 1$, $x_{\text{HeI}} + x_{\text{HeII}} + x_{\text{HeIII}} = 1$. Усі наступні аналітичні вирази й числові результати наводимо для відносних концентрацій атомів, йонів та електронів.

Як впливає із цитованих вище праць та детальних числових розрахунків, наведених у [50, 51], на ранніх етапах розвитку Всесвіту ($z > 10^4$) всі атоми водню й гелію повністю йонізовані квантами теплового випромінювання, так що $x_{\text{HII}} = 1$, $x_{\text{HI}} = 0$, $x_{\text{HeIII}} = 1$, $x_{\text{HeI}} = x_{\text{HeII}} = 0$ і $x_e = 1 + 2f_{\text{He}}$. Це пов'язано з тим, що густина квантів теплового випромінювання, здатних йонізувати водень і гелій, значно (в $\approx 10^9$ разів) перевищує концентрацію атомів. Унаслідок розширення Всесвіту енергія квантів падає $\propto (z + 1)$, як і температура теплового випромінювання у функції Планка $T_{\text{R}}(z) = (2.725 \pm 0.001 \text{ K})(z + 1)$ [2], його густина енергії $\propto (z + 1)^4$, а концентрація й масова густина баріонної речовини та темної матерії $\propto (z + 1)^3$. На $z \sim 8000$ кванти електромагнетного випромінювання з енергією, більшою від потенціалу йонізації HeII, з основного і другого рівнів перебувають у короткохвильовому “хвості” функції Планка, і їх кількості уже не достатньо, щоб утримувати весь гелій у стадії HeIII. Він починає рекомбінувати, і на $z \sim 7000$ з'являються йони HeII. У цей період характерний час томсонівського розсіювання ($t_{\text{T}} \approx 3m_e c(1 + x_e + f_{\text{He}})/(8\sigma_{\text{T}} a_{\text{R}} T_{\text{R}}^4 x_e)$) та характерні часи рекомбінації водню ($t_{\text{HI}} \approx 1/n_e \alpha_{\text{HI}}$) і гелію ($t_{\text{HeII}} \approx 1/n_e \alpha_{\text{HeII}}$) значно менші від характерного часу розширення Всесвіту ($t_{\text{Hubble}} \approx 2/3H_0(1 + z)^{3/2}$), тому температура матерії T_{m} дорівнює температурі випромінювання T_{R} і рекомбінація HeII відбувається

²За експериментальне виявлення реліктового випромінювання А. Пензіас і Р. Вільсон у 1978 р. удостоєні Нобелівської премії в галузі фізики

в умовах, за яких виконуються умови докладного балансу для всіх рівнів на кожен момент часу, тобто в умовах термодинамічної рівноваги. У виразах для характерних часів через m_e позначено масу електрона, c — швидкість світла, σ_T — ефективний переріз томсонівського розсіювання, a_R — радіаційну сталу, α_i — ефективні коефіцієнти рекомбінації на основні рівні атомів водню H I й однократно йонізованого гелію He II . Швидкість 2-х фотонного переходу $2s - 1s$ велика й електрони, які каскадно рекомбінують, швидко досягають основного стану He II . Відносну концентрацію йонізованого гелію $x_{\text{He III}}$ описуємо формулою Саха:

$$\frac{x_e x_{\text{He III}}}{x_{\text{He II}}} = \frac{(2\pi m_e k T_m)^{3/2}}{h^3 n_{\text{H}}} e^{-\chi_{\text{He II}}/k T_m}. \quad (132)$$

Значення всіх атомних сталих і коефіцієнтів, які входять у рівняння (132)–(142) і використані в числових розрахунках, наведено в статтях [55, 56]. Оскільки в цей час водень і гелій повністю йонізовані ($x_{\text{H I}} = 0$, $x_{\text{H II}} = 1$, $x_{\text{He I}} = 0$), $x_{\text{He II}} = 1 - x_{\text{He III}}$, то $x_e = 1 + f_{\text{He}}(1 + x_{\text{He III}})$, то рівняння легко розв'язуємо щодо x_e . За його допомогою можна легко перекопатись, що вже на $z \sim 5000$ практично весь гелій перебуває в стадії однократно йонізації. Такий стан зберігається до $z \sim 3500$, коли починає рекомбінувати He I . У цей період $t_{\text{Hubble}} : t_T : t_{\text{H I}} : t_{\text{He I}} \approx 1 : 0.0000003 : 0.0003 : 0.001$ і умови ще близькі до стану термодинамічної рівноваги. Поки частка $n_{\text{He I}}$ від усього гелію менша від 1%, роль метастабільного рівня $2s$ в кінетиці рекомбінації He I незначна і концентрація йонізованого гелію $x_{\text{H II}}$ досить точно описується формулою Саха

$$\frac{x_e x_{\text{He II}}}{x_{\text{He I}}} = 4 \frac{(2\pi m_e k T_m)^{3/2}}{h^3 n_{\text{H}}} e^{-\chi_{\text{He I}}/k T_m}. \quad (133)$$

Тепер $x_{\text{He III}} = 0$ і $x_{\text{He I}} = 1 - x_{\text{He II}}$. Для точного розрахунку $x_{\text{He II}}$ необхідно знати точне значення $x_e =$

$x_{\text{H II}} + f_{\text{He}} x_{\text{He II}}$. І хоча $x_{\text{H II}} \approx 1$, зменшення частки $n_{\text{H II}}$ від усього водню внаслідок рекомбінації на 0.1% приводить до сумірної зміни n_e внаслідок рекомбінації He I через переважаючий уміст водню ($f_{\text{He}} = 0.079$). Отже, на цьому етапі необхідно вже враховувати рекомбінацію водню, яка в цей час ще достатньо точно описується формулою Саха:

$$\frac{x_e x_{\text{H II}}}{x_{\text{H I}}} = \frac{(2\pi m_e k T_m)^{3/2}}{h^3 n_{\text{H}}} e^{-\chi_{\text{H I}}/k T_m}. \quad (134)$$

Система цих двох рівнянь зводиться до одного алгебраїчного кубічного рівняння для x_e , яке має один дійсний корінь:

$$x_e = 2\sqrt{-A/3} \cos(\alpha/3) - B/3, \quad (135)$$

де $B = R_{\text{H I}} + R_{\text{He I}}$, $R_{\text{He I}}$ і $R_{\text{H I}}$ праві частини рівнянь (133) і (134), $\cos \alpha = C/2\sqrt{-A^3/27}$, $A = D - B^2/3$, $D = R_{\text{H I}}R_{\text{He I}} - R_{\text{H I}} - f_{\text{He}}R_{\text{He I}}$, $C = 2B^3/27 - BD/3 - E$, $E = -R_{\text{H I}}R_{\text{He I}}(1 - f_{\text{He}})$ [55, 56].

Зі спадом $x_{\text{He II}}$ зростає концентрація атомів He I в основному стані $1s$, які, поглинаючи кванти основної серії, накопичуються в метастабільному стані $2s$ та в $2p$ за рахунок великої густини дифузного випромінювання, що виникає при переходах $2p - 1s$. Звідти вони йонізуються вже квантами меншої енергії, континууму наступної серії, яких більше (випадок B рекомбінації). Отже, рекомбінація He I затримується, і цей ефект називають ефектом “горловини пляшки”. Він приводить також до порушення рівноважного заселення рівнів та йонізаційно-рекомбінаційної рівноваги. Рівняння Саха вже адекватно не описує стану йонізації гелію, тому необхідно розв'язувати рівняння нерівноважної рекомбінації [51]:

$$\frac{dx_{\text{He II}}}{dz} = \left(x_{\text{He II}} x_e n_{\text{H}} \alpha_{\text{He II}} - \beta_{\text{He I}} (1 - x_{\text{He II}}) e^{-h\nu_{\text{He I}2s}/k T_m} \right) \times \frac{1 + K_{\text{He I}} \Lambda_{\text{He}} n_{\text{H}} (1 - x_{\text{He II}}) e^{-h\nu_{ps}/k T_m}}{H(z)(1+z) (1 + K_{\text{He I}} (\Lambda_{\text{He}} + \beta_{\text{He I}}) n_{\text{H}} (1 - x_{\text{He II}}) e^{-h\nu_{ps}/k T_m})}, \quad (136)$$

де

$$\alpha_{\text{He I}} = q \left[\sqrt{\frac{T_m}{T_2}} \left(1 + \sqrt{\frac{T_m}{T_2}} \right)^{1-p} \left(1 + \sqrt{\frac{T_m}{T_1}} \right)^{1+p} \right]^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-1} \quad (137)$$

— коефіцієнт рекомбінації гелію He I [53], $\beta_{\text{He I}}$ — коефіцієнт фотойонізації, $K_{\text{He I}} \equiv \lambda_{\text{He I}2p}^3 / [8\pi H(z)]$ — множник, який враховує “почервоління” квантів резонансної лінії основної серії He I ($2^1p - 1^1s$ переходу), значення решти параметрів, які входять до корекційного множника, що “підправляє” результати 3-рівневої моделі йона He II до багаторівневої. Як і в попередньому випадку, рівняння кінетики рекомбінації He I необхід-

но розв'язувати разом з відповідним рівнянням для водню, але поки $n_{\text{H II}}$ становить менше від 1% від n_{H} , $x_{\text{H II}}$ достатньо точно описується формулою Саха. Зі зростанням $x_{\text{H I}}$ збільшується оптична глибина в лінії $\text{Ly}\alpha$, дифузне випромінювання в ній переводить більшість атомів H I у стан $2p$. Миттєвий спонтанний перехід на основний рівень породжує квант, який швидко поглинається сусіднім атомом, і стан системи не

змінюється. Важливим у кінетиці рекомбінації є метастабільний $2s$ -рівень, який заселяється як “знизу” двофотонним поглинанням та ударним збудженням, так і рекомбінацією “зверху”. Тривалість життя атома в цьому стані достатня, щоб “дочекатися” йонізуючого кванта континууму бальмерівської серії. Отже, нейтральні атоми водню йонізуються як з основного стану L_c квантами, так і з $2s$ -рівня квантами бальмерівського континууму, яких значно більше. Рекомбінація водню затримується (ефект “горловини пляшки”), і необхідно застосувати рівняння нерівноважної кінетики [51]:

$$\frac{dx_{\text{HII}}}{dz} = \left(x_e x_{\text{HII}} n_{\text{H}} \alpha_{\text{H}} - \beta_{\text{H}} (1 - x_{\text{HII}}) e^{-h\nu_{2s}/kT_m} \right) \times \frac{1 + K_{\text{H}} \Lambda_{\text{H}} n_{\text{H}} (1 - x_{\text{HII}})}{H(z) (1 + z) (1 + K_{\text{H}} (\Lambda_{\text{H}} + \beta_{\text{H}}) n_{\text{H}} (1 - x_{\text{HII}}))}, \quad (138)$$

де

$$\alpha_{\text{H}} = F \cdot 10^{-19} a t^b / (1 + c t^d) \quad \text{m}^3 \text{s}^{-1} \quad (139)$$

— коефіцієнт рекомбінації водню [54], $t = T_m/10^4$, $K_{\text{H}} \equiv \lambda_{\text{H}2p}^3 / [8\pi H(z)]$ — множник, який урахує червоне зміщення $\text{Ly}\alpha$ -квантів, зумовлене розширенням Всесвіту, F — підгінний множник 3-х рівневої моделі до багаторівневої (детальніше див. [50, 51]). Коефіцієнти фотойонізації в (136) і (138) розраховуються через коефіцієнти В-рекомбінації так:

$$\beta = \alpha (2\pi m_e k T_m / h^2)^{3/2} e^{-h\nu_{2s-1s}/kT_m}. \quad (140)$$

Температура матерії T_m практично дорівнює температурі випромінювання T_R аж до $z \sim 800$, оскільки до цього моменту характерний час томсонівського розсіювання квантів теплового випромінювання на вільних електронах значно менший за характерний час розширення Всесвіту, $t_{\text{T}}/t_{\text{Hubble}} < 10^{-3}$. Отже, до цього моменту швидкість зміни температури описується адіабатичним охолодженням випромінювання ($\gamma = 4/3$) внаслідок розширення Всесвіту:

$$\frac{dT_m}{dz} = \frac{T_m}{(1+z)}. \quad (141)$$

І лише після рекомбінації на червоних зміщеннях $z < 800$ адіабатичне охолодження ідеального газу ($\gamma = 5/3$) починає переважати нагрівання за рахунок ефекту Комптона, який “підтягує” температуру газу до температури випромінювання. Охолодження газу за рахунок вільно-вільних, зв’язано-вільних та зв’язано-зв’язаних переходів, ударної йонізації, як і нагрів за рахунок фотойонізацій та ударної рекомбінації, дають внесок у швидкість зміни температури, який не перевищує соті частки відсотка від основних процесів — адіабатичного охолодження та ефекту Комптона [50]. Отже, в цю епоху достатньо точним є таке рівняння для швидкості зміни температури матерії [51]:

$$\frac{dT_m}{dz} = \frac{8\sigma_{\text{T}} a_{\text{R}} T_{\text{R}}^4}{3H(z)(1+z)m_e c} \frac{x_e}{1 + f_{\text{He}} + x_e} (T_m - T_{\text{R}}) + \frac{2T_m}{(1+z)}, \quad (142)$$

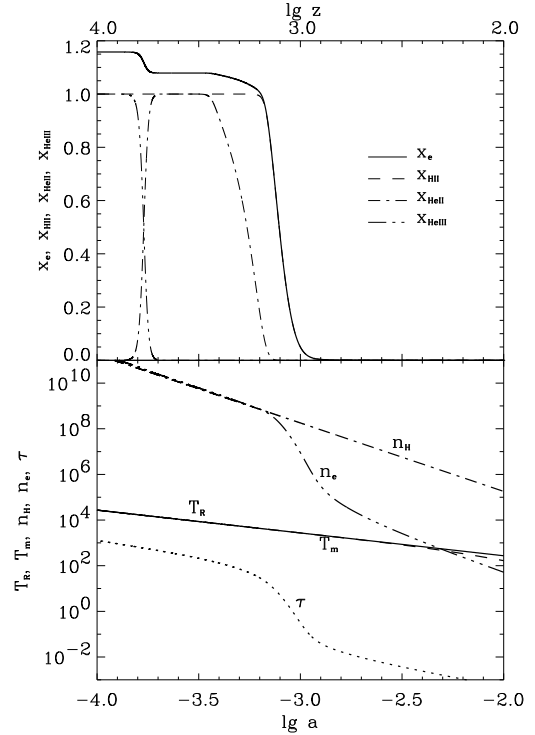


Рис. 5. Рекомбінація водню та гелію в стандартній CDM-моделі ($\Omega_b = 0.05$, $\Omega_{\text{CDM}} = 0.95$, $\Omega_{\Lambda} = 0$, $h = 0.5$). На верхній панелі суцільною лінією показано залежність повної концентрації вільних електронів від червоного зміщення, на нижній — залежності температури випромінювання T_R , температури матерії T_m , концентрації водню n_{H} , концентрації електронів n_e та оптичної глибини $\tau(z) = \int_0^z \sigma_{\text{T}} n_e(z) H^{-1}(z) (z+1)^{-1} dz$ за томсонівським розсіюванням від червоного зміщення.

Результати розрахунків рекомбінації водню та гелію в стандартній CDM-моделі, проведених на основі рівнянь (132)–(142) та програми RECFAST, доповненої розв’язком (135), показано на рис. 5. Там же подано залежності фонових значень температури випромінювання T_R , температури матерії T_m , концентрації водню n_{H} , концентрації електронів n_e та оптичної глибини τ за томсонівським розсіюванням від червоного зміщення. Унаслідок розширення Всесвіту рекомбінація водню й гелію не завершується повністю, а сповільнюється настільки, що деякий ступінь йонізації зберігається на малих червоних зміщеннях. Таку залишкову йонізацію називають загартовувальною. Розрахунки показують, що на $z = 200$ $x_e \approx x_{\text{HII}} = 6.7 \cdot 10^{-4}$, $x_{\text{HeII}} = 9.2 \cdot 10^{-10}$, а на $z = 0$ $x_e \approx x_{\text{HII}} = 4.1 \cdot 10^{-4}$, $x_{\text{HeII}} = 8.1 \cdot 10^{-10}$ (поява молекул водню H_2 , H_2^+ та від’ємних йонів H^- не змінює суттєво цих величин, оскільки їх концентрація на кілька порядків менша [50]). Загартовувальні значення йонізації зменшуються зі збільшенням концентрації баріонів. Так, при $\Omega_b = 0.06$ на $z = 200$ $x_e \approx x_{\text{HII}} = 6.3 \cdot 10^{-4}$, $x_{\text{HeII}} = 2.0 \cdot 10^{-10}$. Значно більша чутливість загартовувального значення ступеня йонізації гелію (HeII) у порівнянні з воднем (HII) пояснюється тим, що рекомбінація гелію починається раніше, коли концентрація йонів висока, і триває в умовах високої концентрації електронів, зумовленої йонізацією водню.

ВІІ. ЕВОЛЮЦІЯ ЗБУРЕНЬ У БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ МОДЕЛЯХ

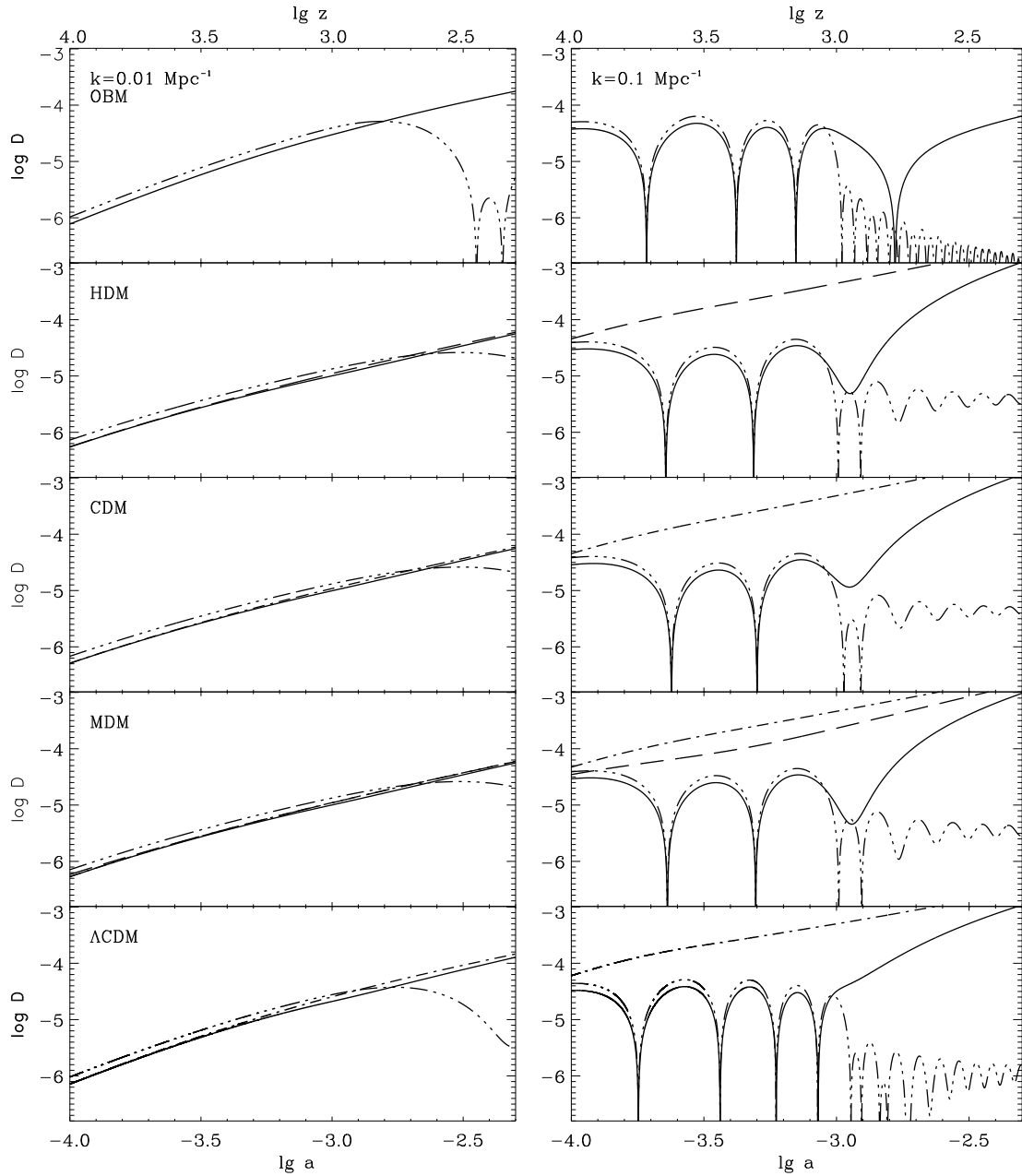


Рис. 6. Еволюція адіабатичних збурень густини баріонів (суцільна лінія), холодної темної матерії (штрих-точкова лінія), гарячої темної матерії (штрихована лінія) та теплового випромінювання (штрих-триточкова лінія) в різних моделях (зверху вниз): відкритій баріонній моделі (ОВМ), моделі з гарячою темною матерією (HDM), моделі з холодною темною матерією (CDM), моделі зі змішаною темною матерією (MDM) та моделі з космологічною сталою й холодною темною матерією (Λ CDM). У лівій колонці масштаб збурень більший за горизонт частинки на момент рекомбінації ($k = 0.01$), у правій — менший ($k = 0.1$). Нормування амплітуди збурень: $\Delta(z_{\text{rec}}) = 10^{-5}$.

Для дослідження еволюції збурень у багатоконпонентних моделях Всесвіту необхідно розв'язати наведені в попередніх параграфах рівняння Айнштейна для збурень густини та швидкості речовини й метрики простору-часу сумісно з рівняннями Больцмана для випромінювання й нейтрино та рівняннями йонізаційно-рекомбінаційної рівноваги водню та гелію. Це можна здійснити числовими методами з вико-

ристанням загальнодоступних програм розв'язку систем звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку, таких, як DVERK. Існує кілька програмних реалізацій їх розв'язку. Тут використано числовий підхід [24] і їхній пакет програм COSMICS, який є у вільному доступі на сайті <http://arcturus.mit.edu/cosmics/>, для розрахунку амплітуди збурень густини баріонів у багатоконпонентному середовищі. На рис. 6 наведе-

но розрахунок еволюції збурень густини D компонент у космологічних моделях, які в різні часи аналізували з погляду пояснення формування великомасштабної структури Всесвіту: відкрита баріонна модель (OBM), модель з гарячою темною матерією (HDM), модель з холодною темною матерією (CDM), модель зі змішаною темною матерією (MDM) та моделі з космологічною сталою й холодною темною матерією (Λ CDM). У всіх цих моделях покладено $h = 0.68$, $T_0 = 2.725$ К, $Y_p = 0.24$ і три сорти нейтрино. Моделі різняться типом матерії, яка домінує за густиною, та співвідношенням густин між ними:

- OBM — $\Omega_b = 0.2$, $\Omega_\nu = 0$, $\Omega_{\text{CDM}} = 0$, $\Omega_\Lambda = 0$,
- HDM — $\Omega_b = 0.05$, $\Omega_\nu = 0.95$, $\Omega_{\text{CDM}} = 0$, $\Omega_\Lambda = 0$,
- CDM — $\Omega_b = 0.05$, $\Omega_\nu = 0$, $\Omega_{\text{CDM}} = 0.95$, $\Omega_\Lambda = 0$,
- MDM — $\Omega_b = 0.05$, $\Omega_\nu = 0.2$, $\Omega_{\text{CDM}} = 0.75$, $\Omega_\Lambda = 0$,
- Λ CDM — $\Omega_b = 0.05$, $\Omega_\nu = 0$, $\Omega_{\text{CDM}} = 0.23$, $\Omega_\Lambda = 0.74$.

Параметри останньої покладені такими, які визначені на основі даних WMAP-2006 та інших сучасних даних спостережувальної космології. У лівій колонці масштаб збурень ~ 300 Мпк ($k = 0.01$ Мпк $^{-1}$) є найбільшим за масштаб акустичного горизонту на момент космологічної рекомбінації (масштаб Джинса) — $\lambda_{\text{rec}}^s \simeq 160$ Мпк ($k_{\text{rec}}^s \simeq 0.039$ Мпк $^{-1}$). Амплітуди збурень таких масштабів у всіх компонентах нарастають $\sim a^{-1}$, як це було розглянуто в параграфі 3.1. Осциляції густини енергії теплового випромінювання після рекомбінації — результат розв'язку рівнянь Больцмана для фотонів, які поширюються вільно. У правій колонці показано еволюцію збурень із масштабом ~ 30 Мпк ($k = 0.1$ Мпк $^{-1}$), значно меншим за масштаб акустичного горизонту на момент космологічної рекомбінації. Він дорівнює горизонтові частинки на момент рівності густин релятивістської (випромінювання й легкі нейтрино) і нерелятивістської (частинки холодної темної матерії, баріони й масивні нейтрино), яку спостерігаємо, коли $a = a_{\text{eq}} \simeq 2 \cdot 10^{-4} \Omega_m h^2$. Такі збурення густини баріонно-фотонної плазми починають осцилювати з моменту входження в горизонт частинки ($a = a_{\text{eq}} \simeq 10^{-5}$) і тривають до моменту рекомбінації водню ($a_{\text{rec}} \simeq 10^{-3}$). В OBM-моделі розвиток збурення в баріонній компоненті після рекомбінації визначається, в основному, фазою осциляції на момент рекомбінації. Якщо збурення в момент рекомбінації було у фазі максимального стиску, то після рекомбінації воно розвиватиметься як додатне збурення — згущення, з якого в майбутньому утвориться скупчення галактик чи надскупчення. Якщо воно було у фазі максимального розширення — утвориться порожнина. Якщо фаза близька до $n\pi/2$, то $D \approx 0$ і наступний розвиток збурення визначається збуренням швидкості, яка максимальна в цій фазі. Спектр потужності в такій моделі буде осцилюючим (див. рис. 10). У моделях, у яких густина темної матерії переважає баріонну, визначальними у формуванні

структури є збурення густини і швидкості темної матерії. Баріони після рекомбінації незалежно від фази осциляції збурень їх густини на момент рекомбінації “падають” у потенціальні ями, утворені збуреннями густини темної матерії. Це добре ілюструють графіки у правій колонці рис. 6.

VIII. ФОРМУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ВЕЛИКОМАСШТАБНОЇ СТРУКТУРИ ВСЕСВІТУ

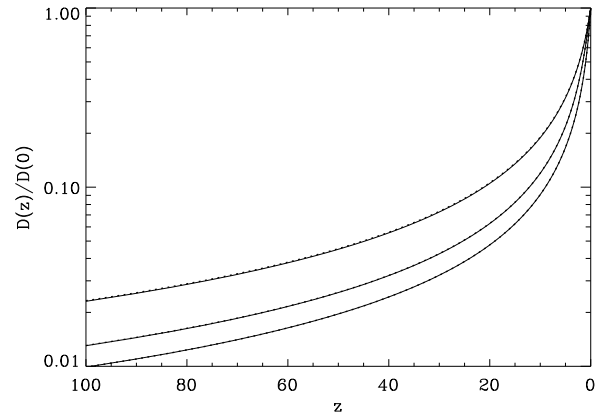


Рис. 7. Еволюція амплітуди збурення густини речовини $D(z)/D(0)$ в епоху формування структури Всесвіту для трьох класів моделей: CDM ($\Omega_m = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_K = 0$, нижня лінія), Λ CDM ($\Omega_m = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_K = 0$, середня лінія), OCDM ($\Omega_m = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_K = 0.73$, верхня лінія). Суцільною лінією показані точні зростаючі розв'язки (91), точковою — їх аналітичні апроксимації (143), які практично наклалися.

Після рекомбінації випромінювання вільно поширюється, не розсіюючись і не поглинаючись, оскільки оптична глибина за томсонівським розсіюванням швидко падає. Його густина енергії, перерахована в масову густина, є значно меншою від густини речовини, яка самогравітує, тому його роль в еволюції амплітуди збурень є нехтівно малою і її можна не брати до уваги в розрахунках характеристик великомасштабної структури Всесвіту. До складу баріонної речовини, в основному, входять нейтральний атомарний водень ($\approx 76\%$ масової частки баріонів), нейтральний гелій ($\approx 24\%$), їхні ізотопи, молекули водню і важчі елементи становлять долі відсотка від них ($\leq 10^{-4}$). Основну частку масової густини речовини, яка самогравітує, становить темна матерія ($\approx 22\%$ всієї густини маси-енергії), решта — темна енергія, яка феноменологічно описується рівняннями Айнштейна з космологічною сталою. Масштаб Джинса (межа гравітаційної нестійкості воднево-гелієвого середовища) після рекомбінації падає до субгалактичних масштабів — $M_J \approx 10^{23} (T/\mu)^{3/2} / \sqrt{\rho}$ [г] $\sim 5 \cdot 10^5 h^{-1} M_\odot$. Отже, у післярекомбінаційну епоху збурення густини речовини з розміром елементів великомасштабної структури досить точно описуються наближен-

ням однокомпонентного середовища з нехтівно малим тиском. Зручною калібрувально-інваріантною величиною для опису збурень густини в цьому випадку є D , яка відповідає збуренню густини в супутній до речовини сихронній системі координат. Замість аналізу збурення в кожній компоненті матерії використовують збурення, зважене за густиною компонент — $D = (\Omega_b D_b + \Omega_{\text{CDM}} D_{\text{CDM}} + \Omega_\nu D_\nu) / \Omega_m$. У випадку $\Omega_\Lambda = \Omega_K = 0$ маємо точний аналітичний розв'язок — $D \sim a(t) = (1+z)^{-1}$. Для $\Omega_\Lambda \neq 0$ чи $\Omega_K \neq 0$ швидкість зростання амплітуди збурення є меншою, якщо $\Omega_\Lambda > 0$ чи $\Omega_K > 0$, і більшою у випадку протилежних знаків цих величин, що випливає із числових розв'язків системи рівнянь (60)–(63). У проблемі формування великомасштабної структури Всесвіту, порівняння передбачень різних моделей із спостереженнями часто вживаною є аналітична апроксимація залежності амплітуди збурення густини від часу на пізніх етапах еволюції, запропонована в роботі [57]:

$$D(z) = A_0 \frac{5 \Omega(z)}{2(1+z)} \times \left[\frac{1}{70} + \frac{209\Omega(z) - \Omega^2(z)}{140} + \Omega^{4/7}(z) \right]^{-1}, \quad (143)$$

де

$$\Omega(z) = \Omega_m(1+z)^3 / (\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2),$$

A_0 — стала нормування, яка визначається за відомим значенням амплітуди збурень на заданому червоному зміщенні. На рис. 7 показано розвиток збурень в епоху формування структури для трьох класів моделей — з домінуванням матерії ($\Omega_m = 1$), з домінуванням темної енергії ($\Lambda > 0$) та з кривиною 3-простору $\Omega_K > 0$.

Елементи великомасштабної структури Всесвіту, такі, як галактики та скупчення галактик, є суттєво нелінійними неоднорідностями: $(\rho_{\text{gal}} - \rho) / \rho \gg 1$. Лінійна теорія збурень, яка представлена тут, описує адекватно еволюцію збурень, поки їхня амплітуда значно менша від одиниці. Частинки в ділянці таких збурень беруть участь у загальному розширенні Всесвіту, але їхня швидкість віддалення від центра збурення менша від габлівської, і ця різниця наростає внаслідок сповільнення під дією самогравітації згущення матерії. Якщо повна механічна енергія збуреної ділянки від'ємна, то наступить момент, коли розширення в цій ділянці зупиниться і почнеться зворотний процес колапсу збурення й формування елемента структури, галактики чи скупчення галактик. У ділянці від'ємних збурень, навпаки, сформується порожнина. Уперше задачу колапсу сферично-симетричної пілоподібної хмари в межах загальної теорії відносності проаналізував Толмен у 1934 р. (див. [14, 58], а також [59]). Не зважаючи на ідеалізацію задачі (сферична симетрія, пілоподібне середовище), її розв'язки широко використовують у проблемі формування великомасштабної структури Всесвіту. Зіставлення розв'язків нелінійної задачі з лінійною теорією дає змогу пов'язати такі характеристики великомасштабної структури Всесвіту, як функ-

ція мас багатих скупчень галактик, функція температури рентгенівських скупчень та ін., зі спектром потужності початкових (лінійних) збурень густини. Теоретичні основи такого підходу були закладені роботою [60] (формалізм Преса–Шехтера) та розвинуті в працях [61, 62]. Параметрами формалізму є амплітуда збурення густини речовини, формально обчисленої за лінійною теорією, при якій воно колапсує на заданому червоному зміщенні $z - \delta_c(z)$, та середня густина речовини у збуренні в одиницях середньої густини речовини у Всесвіті після встановлення динамічної рівноваги, вірялізації системи частинок — Δ_c . У моделі Айнштайна–де Сіттера ($\Omega_m = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_K = 0$) вони дорівнюють 1.69 і 178 відповідно і не залежать від червоного зміщення колапсу хмари. У праці [59] наведено їхні значення для моделей з довільними $\Omega_\Lambda \neq 0$ і $\Omega_K \neq 0$. Припускаючи, що елементи структури формуються у високих піках випадкового гауссівського поля збурень густини [63] з $D(z) \geq \delta_c(z+1)$, можна для заданої моделі з відомим початковим спектром потужності збурень густини речовини (див. наступний параграф) розрахувати момент формування елементів структури заданої маси чи частку сформованих об'єктів (точніше, їх гало) на заданому червоному зміщенні z від загального числа тепер ($z = 0$). На рис. 8 наведено такі розрахунки для Λ CDM-моделі з параметрами, визначеними на основі сукупності сучасних даних спостережувальної космології (див. параграф 10 цієї статті). Їх можна використати для тестування моделі за підрахунками кількості об'єктів різних мас на різних червоних зміщеннях.

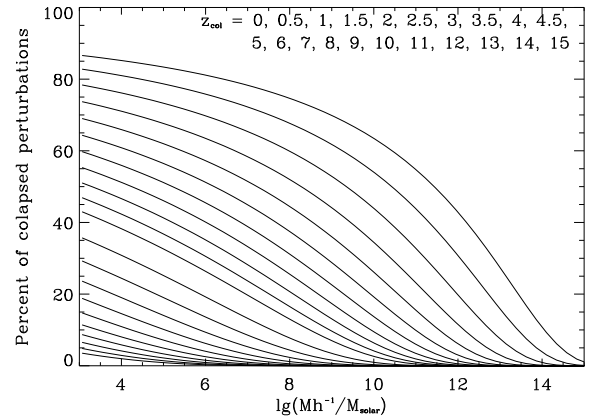


Рис. 8. Частка сколапсованих гало від усієї кількості об'єктів заданої маси на різних червоних зміщеннях z у Λ CDM-моделі з параметрами, отриманими в роботі [74] ($\Omega_\Lambda = 0.736$, $\Omega_m = 0.278$, $\Omega_b = 0.05$, $h = 0.68$, $\sigma_8 = 0.73$ та $n_s = 0.96$). Лінії відповідають різним червоним зміщенням від $z = 0$ до $z = 15$ з інтервалом 0.5 до $z = 5$ і 1 на більших z (z зростає зверху донизу).

Як бачимо, першими на $z \approx 15$ формуються об'єкти малих мас — надмасивні зорі ($M \sim 10^3 M_\odot$) першого покоління. Зі збільшенням їхньої кількості з часом (криві віднизу доверху в напрямку зменшення z) з'являються структури більших мас шляхом гравітаційного скупчування менш масивних об'єктів, сформо-

ваних раніше. Такий сценарій формування структури називається ієрархічним скупчуванням, або формуванням структури віднизу доверху (від малих мас до великих). У такому сценарії структура в менших масштабах розвинута більше, ніж у більших. Численні спостереження підтверджують саме такий сценарій формування великомасштабної структури Всесвіту і дають змогу відтворити початковий спектр збурень густини, за яким можна визначити параметри космологічної моделі.

ІХ. СПЕКТРИ ПОТУЖНОСТІ ЗБУРЕНЬ ГУСТИНИ ТА ТЕМПЕРАТУРИ РЕЛІКТОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

Розв'язок рівнянь еволюції збурень густини речовини дає залежність амплітуди фур'є-моди від часу, $\delta(k, t)$, яка дорівнює калібрувально-інваріантній величині $D(k, t)$, $D_s(k, t)$ або $D_g(k, t)$ у синхронній супутній системі відліку, конформно-ньютонівській або системі відліку постійної кривини 3-простору відповідно. Залежність від хвильового числа k має бути задана, або із спостережень або з теорії генерації космологічних збурень у ранньому Всесвіті. Як спостереження, так і теорія дають залежність амплітуд збурень від масштабу у формі спектра потужності збурень густини речовини:

$$P(k, t) = \langle \delta(k, t) \delta^*(k, t) \rangle.$$

Практично всі моделі раннього Всесвіту передбачають епоху експоненціального розширення, $a(t) \propto \exp(Ht)$, — інфляційну епоху, наслідком якої є масштабно-інваріантний спектр скалярних первинних збурень густини речовини (див. огляди [64, 65]):

$$P_i(k, t) = A_s(t) k^{n_s},$$

де $A_s(t)$ — амплітуда в момент фіксованого часу t в ранню епоху еволюції Всесвіту, n_s — спектральний індекс, які необхідно визначити на основі зіставлення модельних характеристик Всесвіту зі спостережуваними.

Очевидно, що масштабно-інваріантним є спектр на масштабах, значно більших за горизонт частинки на момент рекомбінації. Форма спектра потужності збурень меншого масштабу зазнала змін через зміну закону розвитку після входження в горизонт частинки та ефекти загасання. Така зміна тим більша, чим менший масштаб збурень. Характеристикою зміни форми первісного спектра збурень i -ої компоненти є перехідна функція, яку можна означити так:

$$T_i(k, t) \equiv |\delta_i(k_h \ll k_{\text{rec}}^s, t)| / |\delta_i(k, t)|,$$

за умови, що $|\delta_i(k_h, t)| = |\delta_i(k, t)|$ до входження збурення в горизонт частинки. Тобто перехідна функція — це відношення модулів амплітуд збурень двох масштабів $k_h \ll k_{\text{rec}}^s$ і k в довільний момент часу після рекомбінації, початкові амплітуди яких були однаковими в момент фіксованого часу t в ранню епоху

еволюції Всесвіту. Як випливає з рис. 6, для кожної компоненти фіксованої моделі вона різна. Тому багатоконпонентні моделі характеризують зваженою перехідною функцією за всіма компонентами:

$$T(k, t) = \sum_i \Omega_i T_i(k, t) / \sum_i \Omega_i.$$

Вона залежить від параметрів космологічної моделі та вмісту різних компонент речовини. З розв'язків системи рівнянь Айнштайна–Больцмана для різних k можна побудувати перехідну функцію для різних моделей. На рис. 9 зображено перехідні функції, розраховані за допомогою програми CMBFAST [34, 35] для тих самих моделей, що й на рис. 6.

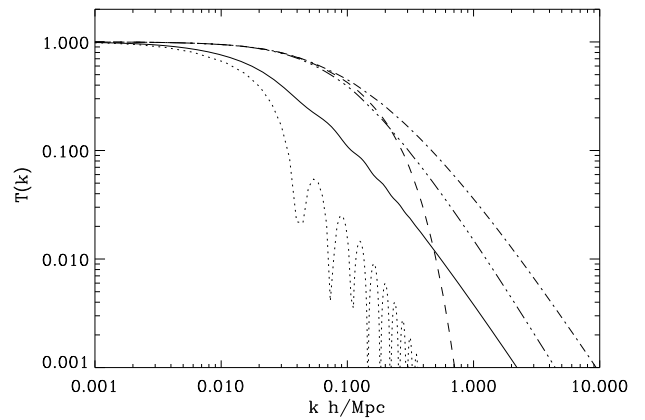


Рис. 9. Перехідна функція $T(k)$ в різних моделях: відкритій баріонній моделі (ОБМ) — точкова лінія, моделі з гарячою темною матерією (HDM) — штрихова лінія, моделі з холодною темною матерією (CDM) — штрих-точкова лінія, моделі зі змішаною темною матерією (MDM) — штрих-3-х-точкова лінія та моделі з космологічною сталою і холодною темною матерією (ΛCDM) — суцільна лінія. Параметри моделей ті ж, що й на рис. 6.

Якщо перехідна функція для заданої моделі відома, то спектр потужності збурень густини речовини на довільному червоному зміщенні ($\ll 1000$) можна розрахувати так:

$$P(k; z) = A_s k^{n_s} T^2(k; z) D^2(z) / D^2(0), \quad (144)$$

де A_s — стала нормування для скалярної моди збурень, а $D(z)/D(0)$ — фактор росту на лінійній стадії еволюції збурень, де $D(z)$ добре апроксимується виразом (143). Сталу нормування скалярної моди збурень знаходять із порівняння зі спостережуваними величинами. У роботі [66, 67] із даних COBE про флюктуації температури реліктового випромінювання отримано значення амплітуди збурень густини речовини δ_h на масштабі сучасного горизонту частинки. Стала нормування A_s визначається через неї тоді так:

$$A_s = 2\pi^2 \delta_h^2 (3000 \text{ Мпс}/h)^{3+n_s}. \quad (145)$$

Зручною величиною в аналізі формування великомасштабної структури Всесвіту є безрозмірна величина $\Delta^2(k) \equiv P(k)k^3/2\pi^2$, яка наближено дорівнює

середньоквадратичній величині збурення густини речовини в масштабі π/k Мпк. Для тих самих моделей, що й на рис. 6 і 9, спектри потужності в безрозмірній величині $\Delta^2(k)$ показано на рис. 10. Параметри Λ CDM-моделі отримані тут на основі сучасних спостережуваних даних про характеристики великомасштабної структури Всесвіту та флюктуації температури реліктового випромінювання, одержані в космічному експерименті WMAP. Отже, суцільна лінія (Λ CDM модель) показує спектр потужності флюктуації густини, найближчий до реального.

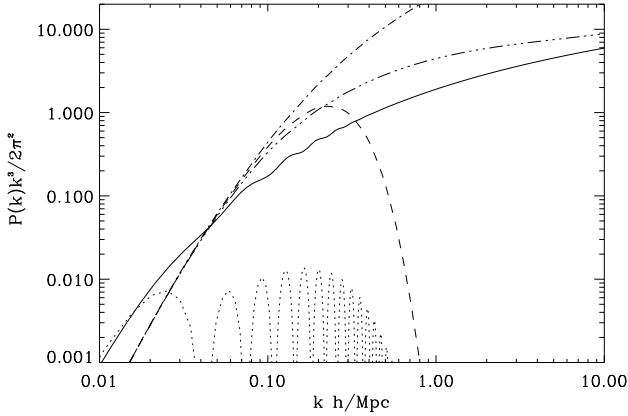


Рис. 10. Спектри потужності збурень густини речовини в різних моделях: відкритій баріонній моделі (OBM) — точкова лінія, моделі з гарячою темною матерією (HDM) — штрихована лінія, моделі з холодною темною матерією (CDM) — штрих-точкова лінія, моделі зі змішаною темною матерією (MDM) — штрих-3-х-точкова лінія та моделі з космологічною сталою і холодною темною матерією (Λ CDM) — суцільна лінія. Параметри моделей ті ж, що й на рис. 6.

Флюктуації температури реліктового випромінювання $\Delta T(\mathbf{n})/T$ зручно представляти розкладом за сферичними гармоніками

$$\Delta T(\mathbf{n})/T = \sum_{\ell, m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}),$$

де $l \geq 2$. Монопольний і дипольний складники ($l = 0, 1$) пов'язані із гравітаційним потенціалом і рухом спостерігача, тому не беруться до уваги, оскільки нас цікавлять первинні космологічні збурення. В однорідному ізотропному Всесвіті, унаслідок обертової симетрії, коефіцієнти (амплітуди) розкладу $a_{\ell m}$ не корелюють між собою при різних значеннях ℓ і m , звідки випливає, що $\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} C_{\ell}$. Величину C_{ℓ} називають спектром потужності флюктуацій температури реліктового випромінювання. Справді, кореляційна функція таких флюктуацій

$$\langle \Delta T(\mathbf{n}_1) \Delta T(\mathbf{n}_2) \rangle = T^2 \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} C_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta),$$

де $P_{\ell}(\cos \theta)$ — поліноми Лежандра, $\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = \cos \theta$. Середньоквадратичне значення таких флюктуацій тем-

ператури

$$\langle (\Delta T)^2 \rangle = T^2 \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} C_{\ell} \approx T^2 \int \frac{\ell(\ell + 1)}{2\pi} C_{\ell} d \ln \ell,$$

так що величина $\ell(\ell + 1)C_{\ell}/2\pi$ визначає потужність, яка припадає на одиничний логарифмічний інтервал ℓ . Саме ця величина найчастіше використовується в аналізі анізотропії реліктового випромінювання. Рівняння для її розрахунку на основі рівнянь Айнштейна та Больцмана в теорії калібрувально-інваріантних збурень описано в параграфі 5. Програма для числового розрахунку $\ell(\ell + 1)C_{\ell}/2\pi$ в класі Λ CDM моделей розроблена авторами статей [34, 35].

На рис. 11 показано спектри потужності флюктуації температури реліктового випромінювання для баріонної моделі (OBM), моделі з гарячою темною матерією (HDM), моделі з холодною темною матерією (CDM), моделі зі змішаною темною матерією (MDM) та моделі з космологічною сталою і холодною темною матерією (Λ CDM), розраховані за її допомогою. Параметри моделей наведені у параграфі 7.

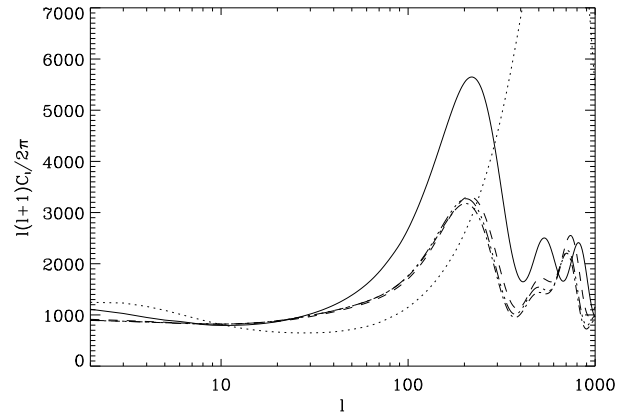


Рис. 11. Спектри потужності флюктуації температури реліктового випромінювання, зумовлені скалярною модою збурень у різних моделях: відкритій баріонній моделі (OBM) — точкова лінія, моделі з гарячою темною матерією (HDM) — штрихована лінія, моделі з холодною темною матерією (CDM) — штрих-точкова лінія, моделі зі змішаною темною матерією (MDM) — штрих-3-х-точкова лінія та моделі з космологічною сталою й холодною темною матерією (Λ CDM) — суцільна лінія. Параметри моделей ті ж, що й на рис. 6.

Х. СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Реліктове випромінювання. Найвагомійші експериментальні підтвердження теорії формування великомасштабної структури Всесвіту отримані в дослідженнях просторової структури флюктуацій температури реліктового випромінювання. Їх існування та зв'язок зі збуреннями густини було передбачено в роботі Сакса і Вольфа 1967 року [40]. Уперше вони зареєстровані в 1992 р. в космічному експерименті COBE (COsmic Background Explorer), метою якого були пошуки слідів таких флюктуацій у просто-

ровому розподілі квантів реліктового випромінювання [68]³. Виявлені флюктуації температури реліктового випромінювання на рівні $\sim 0.001\%$ в ділянках неба розміром $\sim 7^\circ$ чудово узгоджувались із законом наростання амплітуди збурень густини речовини (143). Важливим виявилось й інше: середньоквадратичні флюктуації температури випромінювання майже не залежали від масштабу в діапазоні кутових розмірів ділянок на небі від 7° до 180° . Така властивість передбачалась інфляційними моделями Всесвіту — швидке експоненціальне збільшення масштабів на ранній стадії ($a \sim e^{t/t_1}$, де t_1 початок інфляції) привело до розтягування ділянок з квантовими масштабами до макромасштабів зі збереженням спектра потужності $\langle \delta\delta^* \rangle \propto k$ (k — хвильове число збурення) та нормального розподілу амплітуд. Розраховуючи середньоквадратичні флюктуації температури реліктового випромінювання ($\langle \Delta T/T \rangle$) згідно з ефектом Сакса–Вольфа, для кутових масштабів $\geq 10^\circ$ отримуємо приблизно однакову величину. Експеримент COBE це блискуче підтвердив — вона виявилась рівною $\sim 10^{-5}$. Ця величина ще досі є своєрідним репером у дослідженнях великомасштабної структури Всесвіту. Понад два десятки експериментів — наземних і стратосферних — підтвердили цей результат.

І це ще не останнє теоретичне передбачення в космології, яке знайшло експериментальне підтвердження. Якщо структура — це результат розвитку адіабатичних флюктуацій густини, то на кутових масштабах, які відповідають масштабам горизонту на момент відриву реліктового випромінювання від речовини і менші в ~ 2 і ~ 4 рази, повинні спостерігатись “гарячі” й “холодні” плями — так звані акустичні піки (рис. 11). Майже одночасно вони були надійно виявлені в стратосферних експериментах BOOMERANG і MAXIMA [69, 70] на площадках неба розміром 240 кв. гр. і 44 кв. гр. відповідно. Остаточно це явище підтверджене в космічному експерименті WMAP [2, 3], у якому отримана карта флюктуацій температури реліктового випромінювання всього неба з роздільною здатністю ~ 13 дугових мінут. Виведений на орбіту довкола Сонця у 2001 році і розташований в точці Лагранжа L_2 , він виміряв флюктуації температури реліктового випромінювання по всій небесній сфері за один рік неперервних спостережень. У 2003 році опубліковано результати обробки даних, що були накопичені за перший рік спостережень [2], і ця подія ознаменувала початок нової епохи в космології — епохи прецизійної космології. Тоді вперше отримано спектр потужності флюктуацій температури реліктового випромінювання в найширшому діапазоні кутових масштабів — від $13'$ до 180° , що відповідає діапазону сферичних гармонік $2 \leq \ell \leq 1000$. Саме дані WMAP підтвердили достовірне існування акустичних піків і дали змогу надійно визначити їхнє положення та амплітуди. Саме така пікова структура спек-

тра потужності є остаточною доказом адіабатичної природи первинних збурень густини речовини та метрики простору–часу, з яких утворилися галактики та сформувалась великомасштабна структура Всесвіту. Співвідношення амплітуд акустичних піків та їхніх положень у кутовому спектрі потужності вказують на те, що моделі з темною матерією, темною енергією та масштабно-інваріантним спектром первинних скалярних збурень густини адекватно описують спостережуваний Всесвіт. У березні 2006 року оприлюднено результати 3-х років спостережень [3], які підтвердили попередні результати і збільшили точність визначення характеристик анізотропії реліктового випромінювання. Амплітуди й положення акустичних піків і впадин є чутливим індикатором густини баріонної та темної матерії, кривини 3-простору, сталої Габбла. Визначені на їх основі значення цих параметрів практично збіглись з іншими незалежними визначеннями: сталою Габбла [8–11] та космологічною сталою [4, 5], отриманими в ключових експериментах на Космічному телескопі ім. Габбла, вмісту баріонів, який виведено з теорії космологічного нуклеосинтезу та спостережуваних даних про дозоряний гелій і дейтерій [76–79].

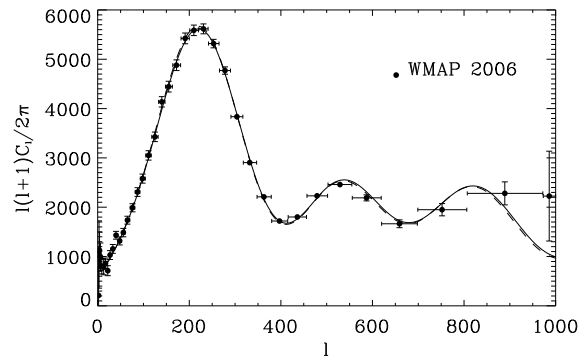


Рис. 12. Кутовий спектр потужності флюктуацій температури реліктового випромінювання, отриманий в експерименті WMAP за результатами трьох років неперервних спостережень. Лініями показано спектри у Λ CDM-моделі з параметрами за двома визначеннями: суцільна лінія — $\Omega_\Lambda = 0.76$, $\Omega_m = 0.24$, $\Omega_b = 0.042$, $h = 0.73$, $\sigma_8 = 0.73$, $n_s = 0.958$ ($\chi^2_{\min} = 37.8$) [29], штрихова — $\Omega_\Lambda = 0.736$, $\Omega_m = 0.278$, $\Omega_b = 0.05$, $h = 0.68$, $\sigma_8 = 0.73$, $n_s = 0.96$ ($\chi^2_{\min} = 37.2$) [74].

Доповнюючи дані WMAP сукупністю даних про великомасштабну структуру Всесвіту, темп і динаміку його розширення та про вміст легких елементів у міжгалактичному середовищі, було встановлено діапазон значень шести основних параметрів цієї моделі [29]: $\Omega_\Lambda = 0.7 \div 0.8$, $\Omega_m = 0.23 \div 0.31$, $\Omega_b = 0.04 \div 0.05$, $h = 0.68 \div 0.75$, $A_s = 0.75 \div 0.92$, $n_s = 0.9 \div 0.96$. Точні значення залежать від набору спостережуваних даних, які використовуються для їх визначен-

³Дж. Смуту за це відкриття присуджена Нобелівська премія в галузі фізики за 2006 р.

ня, та моделі. У роботі групи WMAP [29] наведено 12 визначень основних параметрів, які окреслюють вказаний вище діапазон значень. Важливим результатом цих визначень є близька до нуля кривина 3-простору, $\Omega_k = 0 \div 0.04$. Окрім головних параметрів, також установлено значення оптичної глибини τ до сфери останнього розсіяння, що зумовлена реїонізацією міжгалактичного середовища першими зорями, $\tau = 0.09 \pm 0.03$. Для двох інших параметрів — амплітуди тензорної моди збурень (A_t) і масової густини нейтрино в одиницях критичної (Ω_ν) — установлено верхні межі їхніх допустимих значень [29, 73].

На рис. 12 наведено кутовий спектр потужності флюктуацій температури реліктового випромінювання в ділянці акустичних піків, отриманий в експерименті WMAP за результатами трьох років неперервних спостережень [3] (точки), та обчислений спектр у Λ CDM-моделі (лініями) з параметрами, визначеними за різними наборами спостережуваних даних.

Як бачимо, теоретичний спектр потужності флюктуацій температури реліктового випромінювання повністю узгоджується зі спостережуваним для сферичних гармонік з $\ell \leq 800$. Вищі гармоніки є поза межами роздільної здатності телескопа WMAP. Визначення положення й амплітуди третього акустичного піка та ділянки загасання Сілка є ключовою задачею для космічного телескопа PLANCK, який має бути виведений на орбіту у 2008 р.

Цифрові огляди неба в оптичному діапазоні. Успіхи у вимірюванні реліктового випромінювання супроводжуються поступом у вивченні просторового розподілу скупчень галактик, галактик та квазарів. Нещодавно опубліковані дані цифрових оглядів неба SDSS [71] та 2dF GRS [72], для яких здійснено числове моделювання формування структури з N частинок (галактик) з адіабатичними початковими умовами скалярної моди збурень. Рис. 13 ілюструє добру узгодженість між теорією і спостереженнями

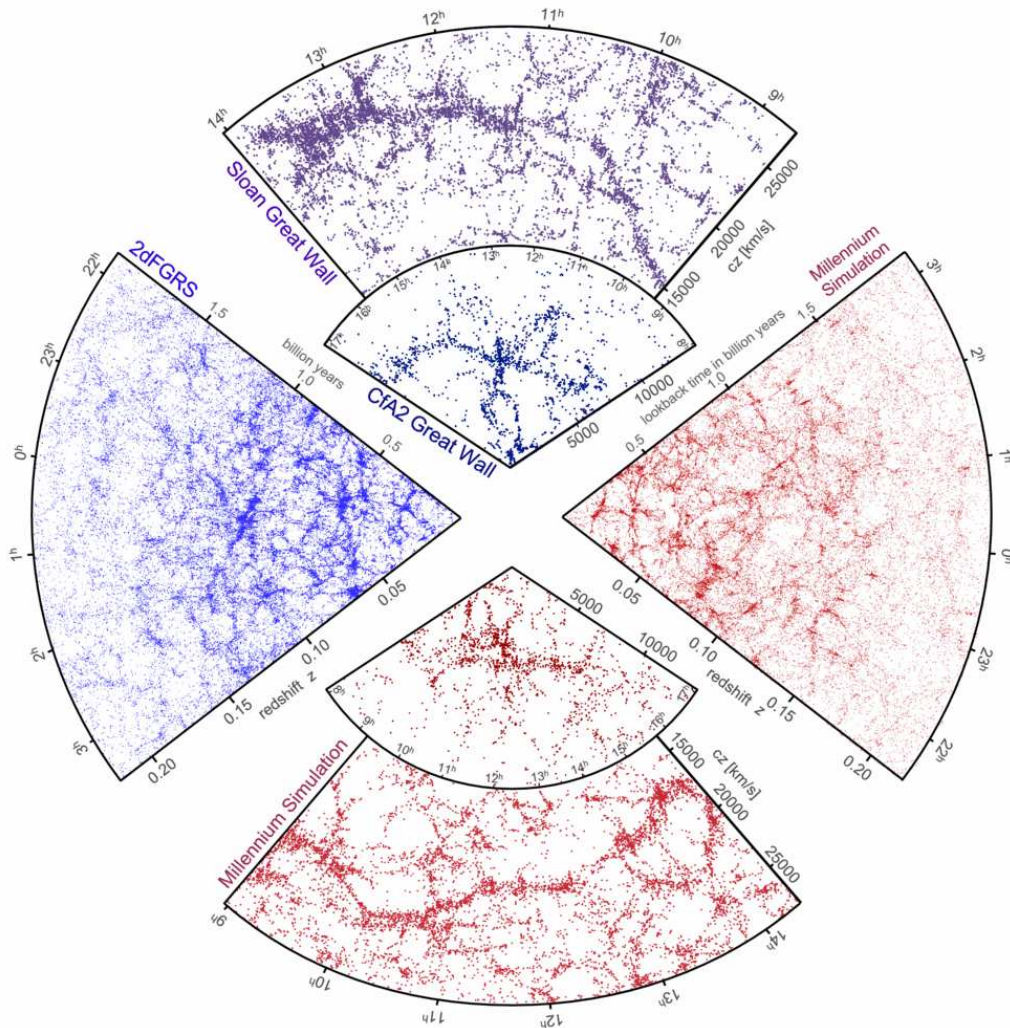


Рис. 13. Просторовий розподіл галактик у цифрових оглядах неба SDSS (650 000 галактик) і 2dF GRS (220 000 галактик) та в числових моделюваннях Millennium Simulation з таким самим числом частинок та адіабатичними початковими умовами скалярної моди збурень в Λ CDM моделі [80].

Кількісною характеристикою видимих неоднорідностей просторового розподілу галактик може бути двоточкова просторова кореляційна функція або її фур'є-образ — спектр потужності неоднорідностей просторового розподілу галактик — $P_g(k) \equiv \langle \delta_g(k) \cdot \delta_g^*(k) \rangle$, де $\delta_g(k)$ є фур'є-образом відносних збурень концентрації галактик заданої світності. Він зв'язаний зі спектром потужності збурень густини речовини, $P(k) \equiv \langle D(k) \cdot D^*(k) \rangle$ через параметр зміщення (байсингу) b_g : $P_g(k) = b_g^2 P(k)$. Він відображає той факт, що галактики й інші елементи великомасштабної структури формуються у високих піках випадкового гауссівського поля збурень густини речовини. Чим вищі піки, тим більший параметр байсингу. Світність об'єктів теж корелює з цим параметром. Тому його значення пов'язане також із селекційним критерієм конкретних каталогів галактик чи скупчень галактик, на основі яких визначається спектр потужності неоднорідностей просторового розподілу галактик.

На рис. 14 наведено спектри збурень густини речовини, побудовані на основі каталогів галактик та багатих скупчень галактик. Розкид даних пов'язаний із селекційними ефектами, просторовою обмеженістю вибірок галактик та похибками визначення відстані до них. Його порівняння з рис. 10 показує, що спостережуваний просторовий розподіл галактик і скупчень галактик указує на Λ CDM-модель з параметрами $\Omega_\Lambda = 0.736$, $\Omega_m = 0.278$, $\Omega_b = 0.05$, $h = 0.68$, $\sigma_8 = 0.73$ та $n_s = 0.96$ як космологічну модель спостережуваного Всесвіту.

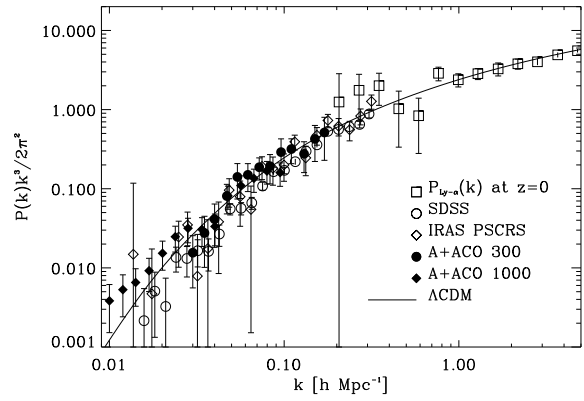


Рис. 14. Спектри потужності флюктуацій густини речовини, отримані на основі просторового розподілу галактик із огляду IRAS Point Source Catalog Redshift Survey (PSCR) [81]: $P(k) = P_{\text{PSCR}z}(k)/b_{\text{PSCR}z}^2$, $b_{\text{PSCR}z} = 1.08$, галактик із цифрового огляду неба Sloan Digital Sky Survey (SDSS) [82]: $P(k) = P_{\text{SDSS}}(k)/b_{\text{SDSS}}^2$, $b_{\text{SDSS}} = 1.21$, багатих скупчень галактик із каталогу Abell і ACO з визначеними відстанями до 300 h^{-1} Мпк [83] ($P(k) = P_{\text{A+ACO}}(k)/b_{\text{A+ACO}}^2$, $b_{\text{A+ACO}} = 2.86$), багатих скупчень галактик із каталогу Abell і ACO [84]: $P(k) = P_{\text{A+ACO}}(k)/b_{\text{A+ACO}}^2$, $b_{\text{A+ACO}} = 3.92$ та статистики Ly_α ліній поглинання в спектрах далеких квазарів [87] (P_{Ly_α}). Суцільною лінією показано спектр потужності флюктуацій густини в Λ CDM-моделі з параметрами $\Omega_\Lambda = 0.736$, $\Omega_m = 0.278$, $\Omega_b = 0.05$, $h = 0.68$, $\sigma_8 = 0.73$ та $n_s = 0.96$. Всі амплітуди й масштаби зведені до сучасної епохи, $z = 0$.

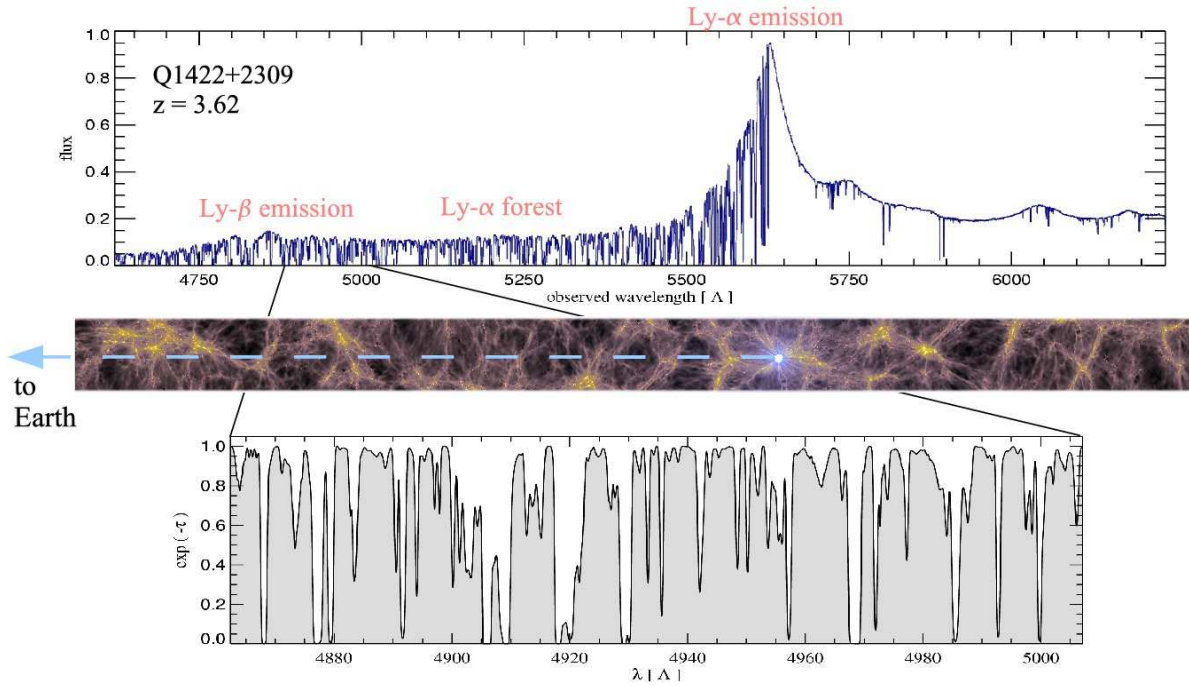


Рис. 15. Ly_α лінії поглинання в спектрі квазара Q1422+2309, який перебуває на червоному зміщенні $z_{\text{QSO}} = 3.62$, та схема їх формування внаслідок поглинання випромінювання хмарами нейтрального водню субгалактичних масштабів, що є на промені зору до нього на $z < z_{\text{QSO}}$ [80]. Лінії поглинання виділеної частини спектра утворені поглинанням у лінії Ly_α хмарами нейтрального водню, які знаходяться на $z \approx 3$.

Лайман-альфа хмари нейтрального водню. Значення амплітуди спектра потужності збурень густини речовини на малих масштабах ($k \sim (2 - 40)h/\text{Мпк}$) отримуємо з аналізу лісу ліній поглинання в спектрах далеких квазарів (див. [85–90] і цитування в них). Вигляд спектра квазара Q1422+2309, який знаходиться на червоному зміщенні $z_{\text{QSO}} = 3.62$, із лісом ліній поглинання в ділянці $\lambda < \lambda_{\text{Ly}\alpha}(z_{\text{QSO}} + 1)$ та схема їх формування внаслідок поглинання випромінювання хмарками нейтрального водню на $z < z_{\text{QSO}}$ показані на рис. 15.

Числові моделювання формування структури з N частинок з адіабатичними початковими умовами для скалярної моди збурень сумісно з рівняннями гідродинаміки баріонного газу з високою просторовою й часовою роздільною здатністю [80, 91] чудово відтворюють такі спектри. Процедура відтворення лінійного спектра потужності збурень густини речовини на основі $\text{Ly}\alpha$ лісу ліній поглинання була запропонована в роботах [86, 87]. Аналізуючи абсорбційні лінії 19-и квазарів, автори отримали значення амплітуди початкового спектра потужності збурень густини речовини на $z \approx 3$. Цей спектр, перерахований до $z = 0$ за допомогою (143), показаний на рис. 14. Як бачимо, це явище добре пояснюється в ΛCDM -моделі формування структури Всесвіту з наведеними вище параметрами.

НЕРОЗВ'ЯЗАНІ ПРОБЛЕМИ

Отже, ключові передбачення теорії формування великомасштабної структури шляхом гравітаційного зростання скалярних збурень в інфляційних моделях Всесвіту — близький до масштабно-інваріантного первинний спектр збурень, форма й амплітуда спектра збурень густини речовини, акустичні піки у спектрі флюктуацій температури реліктового випромінювання — мають експериментальне підтвердження на високому рівні достовірності. Визначені на їхній основі параметри космологічних моделей добре узгоджуються із значеннями, отриманими іншими методами, що є теж підтвердженням теорії формування вели-

комасштабної структури Всесвіту. Більшість теоретично обчислених характеристик великомасштабної структури у ΛCDM -моделі Всесвіту з параметрами $\Omega_{\Lambda} = 0.74 \pm 0.06$, $\Omega_m = 0.28 \pm 0.08$, $\Omega_b = 0.05 \pm 0.01$, $h = 0.68 \pm 0.09$, $\sigma_8 = 0.73 \pm 0.08$ та $n_s = 0.96 \pm 0.02$ [29, 74] узгоджується з даними спостережувальної космології, які охоплюють масштаби від ≈ 1 Мпк до ≈ 4000 Мпк, у межах 95% інтервалу їхніх допустимих значень.

Попри добру узгодженість передбачень теорії формування великомасштабної структури Всесвіту зі спостережуваними даними залишається багато важливих нерозв'язаних проблем. До першочергових серед них можна віднести такі:

- дослідження нелінійних стадій формування елементів великомасштабної структури та зв'язок спостережуваних величини з лінійною теорією збурень;
- уточнення параметрів космологічних моделей та вмістів різних компонент: баріонної речовини, темної матерії, темної енергії, реліктових гравітаційних хвиль, реліктових нейтрино;
- визначення положення й амплітуди 3-го акустичного піка;
- вимірювання поляризації реліктового випромінювання з високою просторовою роздільною здатністю;
- проведення глибоких оглядів неба з метою виявлення найбільш ранніх джерел випромінювання та встановлення їхньої природи;
- дослідження природи частинок темної матерії;
- дослідження природи темної енергії;
- пошуки неспостережуваної досі значної частини ($\sim 60\text{--}80\%$) баріонної речовини.

Усі ці проблеми є предметом активних досліджень сьогодні — як теоретичними, так і експериментальними методами.

-
- [1] J. C. Mather, E. S. Cheng, D. A. Cottingham, *et al.*, *Astrophys. J.* **420**, 439 (1994).
 - [2] C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148**, 1 (2003).
 - [3] G. Hinshaw, M. R.olta, C. L. Bennett, *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 288 (2007); [astro-ph/0603451](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0603451) (2006).
 - [4] S. Perlmutter, G. Aldering, M. della Valle, *et al.*, *Nature* **391**, 51 (1998).
 - [5] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
 - [6] W. Freedman, B. F. Madore, J. R. Mould, *et al.*, *Nature* **371**, 757 (1994).
 - [7] G. A. Tammann, M. Federspiel, in *Conference Paper, Space Telescope Science Institute Series, The Extragalactic Distance Scale*, edited by M. Livio (Cambridge University Press, 1997), p. 137.
 - [8] B. F. Madore, W. L. Freedman, *et al.*, *Astrophys. J.* **515**, 29 (1999).
 - [9] W. L. Freedman, *Physica Scripta* **85**, 37 (2000).
 - [10] J. R. Mould, J. P. Huchra, W. L. Freedman, *et al.*, *Astrophys. J.* **529**, 786 (2000).
 - [11] W. L. Freedman, B. F. Madore, B. K. Gibson, *et al.*, *Astrophys. J.* **553**, 47 (2001).
 - [12] Е. М. Лифшиц, *Журн. эксп. теор. физ.* **16**, 585 (1946).
 - [13] Е. М. Лифшиц, *Усп. физ. наук* **16**, 585 (1963).

- [14] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (Наука, Москва, 1973).
- [15] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980).
- [16] H. Kodama, M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78**, 1 (1984).
- [17] R. Durrer, *Fund. Cosmic Physics* **15**, 209 (1994).
- [18] R. Durrer, *J. Phys. Stud.* **5**, 177 (2001).
- [19] Я. С. Яцків, О. М. Александров, І. Б. Вавилова, В. І. Жданов, Ю. М. Кудря, С. Л. Парновський, О. В. Федорова, С. В. Хміль, *Загальна теорія відносності: випробування часом* (ГАО НАН України, Київ, 2005).
- [20] W. Hu, M. White, *Phys. Rev. D* **56**, 596 (1997).
- [21] W. Hu, U. Seljak, M. White, M. Zaldarriaga, *Phys. Rev. D* **57**, 3290 (1998).
- [22] J. R. Bond, A. S. Szalay, *Astrophys. J.* **274**, 443 (1983).
- [23] P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **262**, L1 (1982).
- [24] С.-П. Ма, Е. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995).
- [25] Б. С. Новосядлий, В. О. Пелих, препринт ИТФ АН УССР №153 (1987), с. 17.
- [26] B. S. Novosyadlyj, V. O. Pelykh, *Astron. Zhurn.* **65**, 449 (1988).
- [27] Y. Fukuda, T. Hayakawa, E. Ichihara, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998).
- [28] Y. Fukuda, T. Hayakawa, E. Ichihara, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1810 (1999).
- [29] D. N. Spergel, R. Bean, O. Dore, *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 377 (2007) (astro-ph/0603449).
- [30] R. Durrer, B. Novosyadlyj, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **324**, 560 (2001).
- [31] R. Durrer, B. Novosyadlyj, S. Apunevych, *Astrophys. J.* **583**, 33 (2003).
- [32] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, R. H. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992).
- [33] R. Durrer, preprint ZU-TH14/92 (1992).
- [34] U. Seljak, M. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* **469**, 437 (1996).
- [35] M. Zaldarriaga, U. Seljak, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **29**, 431 (1999).
- [36] A. Challinor, A. Lewis, *Phys. Rev. D* **71**, 103010 (2005).
- [37] M. Doran, *J. Cosm. Astrop. Phys.* **0510**, 011 (2005).
- [38] P. J. E. Peebles, *The large scale structure of the Universe* (Princeton University Press, Princeton, 1980).
- [39] C. L. Bennett, A. J. Banday, K. M. Gorski, *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* **464**, 1 (1996).
- [40] R. K. Sachs, A. M. Wolfe, *Astrophys. J.* **147**, 73 (1967).
- [41] A. A. Penzias, R. W. Wilson, *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965).
- [42] Я. Б. Зельдович, В. Г. Курт, Р. А. Сюняев, *Журн. эксп. теор. физ.* **55**, 278 (1968).
- [43] P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **153**, 1 (1968).
- [44] T. Matsuda, H. Sato, H. Takeda, *Prog. Theor. Phys.* **46**, 416 (1971).
- [45] Н. А. Забогин, П. Д. Насельский, *Астрон. журн.* **59**, 447 (1982).
- [46] Yu. E. Liubarskii, R. A. Sunyaev, *Astron. Astrophys.* **123**, 171 (1983).
- [47] B. J. T. Jones, R. F. G. Wyse, *Astron. Astrophys.* **149**, 144 (1985).
- [48] J. H. Krolik, *Astrophys. J.* **353**, 21 (1990).
- [49] G. B. Rubicki, I. P. Dell'Antonio, *Astrophys. J.* **427**, 603 (1993).
- [50] S. Seager, D. D. Sasselov, D. Scott, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **128**, 407 (2000).
- [51] S. Seager, D. D. Sasselov, D. Scott, *Astrophys. J. Lett.* **523**, L1 (1999).
- [52] D. N. Schramm, M. S. Turner, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 303 (1998).
- [53] D. G. Hummer, P. J. Storey, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **297**, 1073 (1998).
- [54] D. Péquignot, P. Petitjean, C. Boisson, *Astron. Astrophys.* **251**, 680 (1991).
- [55] Б. Новосядлий, *Кінем. фіз. небес. тіл* **22**, 199 (2006).
- [56] B. Novosyadlyj, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **370**, 1771 (2006).
- [57] S. M. Carroll, W. H. Press, E. L. Turner, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **30**, 499 (1992).
- [58] R. C. Tolmen, *Relativity thermodynamics and cosmology* (Clarendon Press, Oxford, 1969).
- [59] Ю. Кулініч, Б. Новосядлий, *Журн. фіз. досл.* **7**, 234 (2003).
- [60] W. H. Press, P. Schechter, *Astrophys. J.* **187**, 425 (1974).
- [61] J. Lee, S. F. Shandarin, *Astrophys. J.* **500**, 14 (1998).
- [62] R. Sheth, J. H. Mo, G. Tormen, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **307**, 203 (1999).
- [63] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser, A. S. Szalay, *Astrophys. J.* **304**, 15 (1986).
- [64] A. Linde, *Particle physics and inflationary cosmology* (New York, Harwood, 1990).
- [65] A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Phys. Rept.* **231**, 1 (1993).
- [66] A. R. Liddle, D. H. Lyth, P. T. P. Viana, M. White, *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* **282**, 281 (1996).
- [67] E. F. Bunn, M. White, *Astrophys. J.* **480**, 6 (1997).
- [68] G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Kogut, *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* **396**, 1 (1992).
- [69] P. D. Mauskopf, P. A. R. Ade, P. de Bernardis, *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* **536**, L59 (2000).
- [70] S. Hanany, P. Ade, A. Balbi, *et al.*, *Astrophys. J.* **545**, L5 (2000).
- [71] D. G. York *et al.*, *Astronom. J.* **120**, 1579 (2000).
- [72] M. M. Colless *et al.*, astro-ph/0306581 (2003).
- [73] Б. Новосядлий, С. Апуневич, *Журн. фіз. досл.* **9**, 280 (2005).
- [74] С. Апуневич, Б. Венгльовська, Ю. Кулініч, Б. Новосядлий, *Кінем. фіз. небес. тел.* **67** **23**, (2006).
- [75] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148**, 175 (2003).
- [76] D. Tytler, X.-M. Fan, S. Burles, *Nature* **381**, 207 (1996).
- [77] Y. I. Izotov, T. X. Thuan, in *Proc. of the IVth Rencontres du Vietnam. Physics at extreme energies* (Hanoi, 2000), p. 15.
- [78] D. Tytler, J. M. O'Meara, N. Suzuki, D. Lubin, *Physica Scripta.* **85**, 12 (2000).
- [79] D. Kirkman, D. Tytler, N. Suzuki, *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **149**, 1 (2003).
- [80] V. Springel, C. S. Frenk, S. D. M. White, astro-ph/0604561 (2006).
- [81] A. J. S. Hamilton, M. Tegmark, *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* **330**, 506 (2002).
- [82] Tegmark M., Blanton M. R., Strauss M. A., *et al.* *Astrophys. J.* **606**, 702 (2004).
- [83] J. Retzlaff, S. Borgani, S. Gottlober, *et al.*, *New Astron. Rev.* **3**, 631 (1998).
- [84] C. J. Miller, D. J. Batuski, *Astrophys. J.* **551**, 635 (2001).
- [85] N. Y. Gnedin, *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* **299**, 392 (1998).
- [86] R. A. C. Croft, D. H. Weinberg, N. Katz, L. Hernquist,

- Astrophys. J. **495**, 44 (1998).
- [87] R. A. C. Croft, W. Hu, R. Dave, Phys. Rev. Lett. **83**, 1092 (1999).
- [88] M. Ricotti, N. Y. Gnedin, J. M. Shull, Astrophys. J. **534**, 41 (1999).
- [89] N. Gnedin, in *Proceedings of a conference held in Berkeley*, edited A. J. Bunker, Wil J. M. van Breugel. **193**, 598 (1999).
- [90] P. McDonald, J. Miralda-Escudé, M. Rauch, *et al.*, Astrophys. J. **543**, 1 (2000).
- [91] Дж. Сентрелла, А. Мелотт, *Численное моделирование в астрофизике* (Мир, Москва, 1988), с. 256.

LARGE-SCALE STRUCTURE OF THE UNIVERSE FORMATION: THEORY AND OBSERVATIONS

B. Novosyadlyj

*Astronomical observatory of Ivan Franko National University of Lviv,
8, Kyryla i Mefodija St., Lviv, UA-79005, Ukraine*

A review of the problem of a large-scale structure formation of the Universe is presented. Theory of cosmological perturbations is presented in the gauge-invariant approach. It is used for the description of the evolution of special objects of different scales and also for temperature fluctuations of cosmic microwave background radiation. The current state of observational cosmology and consistency of theoretical predictions with experimental data are described too.