

## КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ І ТЕПЛОЄМНІСТЬ РІДКОГО $^4\text{He}$

І. О. Вакарчук, Р. О. Притула, А. А. Ровенчак

*Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра теоретичної фізики  
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна  
(Отримано 29 січня 2007 р.)*

Запропоновано один із можливих розв'язків проблеми опису термодинамічних властивостей рідкого гелію-4 в широкотемпературному діапазоні включно з околom  $\lambda$ -переходу. Використовуючи в наближенні парних кореляцій матрицю густини взаємодіючих бозе-частинок [І. О. Vakarchuk, J. Phys. Stud. **8**, 223 (2004)], знайдено вирази для кінетичної й потенціальної енергій, а також для парного структурного фактора. Усі остаточні формули записані через рідинний структурний фактор, екстрапольований до  $T = 0$ , який береться як вихідна інформація замість потенціалу взаємодії. На основі отриманих виразів чисельно розраховано температурні залежності кінетичної й потенціальної енергій, парного структурного фактора, а також теплоємності. При низьких температурах  $0 < T/T_c < 1$  кількісне узгодження експериментальної і розрахованої теплоємностей є добрим, а для  $T/T_c > 1$  наші результати якісно відтворюють хід експериментальних даних (крива виявляється майже паралельно зсунутою вгору).

**Ключові слова:** рідкий  $^4\text{He}$ , матриця густини, структурний фактор,  $\lambda$ -перехід.

PACS number(s): 05.30.Jp, 67.20.+k, 67.40.-w, 67.40.Db, 67.40.Kh

### І. ВСТУП

Історично першим об'єктом вивчення в галузі квантових газів і рідин був рідкий гелій-4. Аномалії в температурній поведінці його теплоємності виявив 1932 р. Кеєзом зі співробітниками [1]. Саме форма кривої теплоємності з пікоподібним ходом в околі  $T \simeq 2$  К і спричинила назву цього явища — “лямбда-перехід”.

На дослідження унікальних властивостей гелію-4 затрачено значні зусилля фізиків-теоретиків й експериментаторів. У теорії рідкого гелію основною і не до кінця розв'язаною проблемою є кількісний опис структурних і термодинамічних функцій та бозе-айнштайнівської конденсації в околі  $\lambda$ -точки. Спочатку вважали, що  $\lambda$ -подібний хід теплоємності рідкого  $^4\text{He}$  в околі точки  $\lambda$ -переходу при переході в надплиний стан має характер логарифмічної розбіжності [2–7]. Експерименти [8–10] показали, що насправді розбіжності теплоємності немає: критичний показник теплоємності  $\alpha$  є малим, але від'ємним числом. Теорія, яка базувалася на методі ренормалізаційної групи [11], дає змогу обчислити лише універсальні характеристики: головні асимптотики термодинамічних функцій при прямуванні температури зліва і справа до точки фазового переходу. Ця теорія дала степеневу поведінку теплоємності в околі точки  $\lambda$ -переходу, а не логарифмічну. Пізніше, зробивши пересумування розбіжних рядів, за допомогою цього методу отримали показник  $\alpha$  малим від'ємним числом [12, 13]. Оскільки в точці  $\lambda$ -переходу теплоємність має скінченне значення, то це підтверджує припущення Лондона [14], що причиною  $\lambda$ -переходу є бозе-конденсація, яка здеформована міжатомною взаємодією. Зв'язок

між цими явищами є значно складнішим, ніж проста відповідність.

Останнім часом теоретичні дослідження  $^4\text{He}$  були зосереджені переважно на числових методиках, пов'язаних із використанням методів Монте-Карло, відповідні результати досить повно відображено в огляді [8].

Для опису рідкого гелію в статті [15] використовували формалізм матриці густини з функціональною оптимізацією параметрів Джастровської хвильової функції. Унаслідок досягнуто доброго узгодження кривої енергії з експериментальними значеннями для температур, нижчих за критичну. Автори виявили, що врахування лише двочастинкових динамічних кореляцій дає значення критичної температури 3.4 К, а отже для доброго узгодження з експериментом потрібно враховувати вищі наближення, які, зокрема, пов'язані з необхідністю введення поняття ефективної маси атома гелію.

У праці [16] узагальнено експериментальні дані вимірювань властивостей гелію-4 й отримано рівняння стану (для потенціалу Гельмгольца) при  $T < 0.8$  К.

У серії праць Маєрса (див. [17] і посилання там) використано ідею опису надпливної фази гелію-4 за допомогою суперпозиції двох компонент, одна з яких є фазово-когерентною на макроскопічних масштабах, а друга — лише на масштабах, сумірних з довжиною теплової хвилі. Для конденсатної фракції встановлено пропорційний зв'язок з часткою надпливної компоненти.

За останні роки досліджень у галузі фізики квантових рідин з'являється багато робіт, які присвячені вивченню властивостей квантових рідин в обмеженому просторі й у низькорозмірних системах. Наприклад, нейтронне розсіяння на гелії-4 у вайкорі (Vucor,

висококремнеземисте скло) засвідчили значення конденсатної фракції, близьке до оцінок в об'ємних вимірюваннях [18]. Дослідження конденсатної фракції та кінетичної енергії гелієвих плівок на MgO показали, що суттєве відхилення від властивостей об'ємного  $^4\text{He}$  починається лише при значному зменшенні кількості шарів [19].

Поведінку рідкого гелію в карбонових нанотрубках вивчали в роботах [20–25]. Наявність гострого піка в залежності густини адсорбованої рідини від відстані до осі нанотрубки [26] константує можливість реалізації одно- чи квазіодновимірної бозе-рідини [27–30]. Виявлено, що неоднорідності розподілу радіусів нанотрубок дають змогу ефективно інтерпретувати  $^4\text{He}$  в такому середовищі, як ідеальний 4-вимірний бозе-газ [24]. Уточнені числові розрахунки з урахуванням взаємодії між атомами гелію-4 показали, що бозе-айнштайнівська конденсація відбувається і в цьому випадку, причому значення критичної температури зростає [25]. У цій праці також розраховано температурні залежності теплоємності та конденсатної фракції для взаємодіючих і невзаємодіючих атомів. Теоретичне обґрунтування відповідних експериментальних досліджень переважно здійснюють лише за допомогою числових методів, що ускладнює виявлення функціональних залежностей між величинами.

Підсумовуючи сказане, можна зробити висновок, що доброї теоретичної моделі, яка би працювала при різних температурах, у надплиній і нормальній фазах для рідкого гелію-4 створити ще не вдалося.

У цій статті вказано на одну з можливостей розв'язку проблеми опису термодинамічних властивостей гелію-4 в широкому температурному діапазоні включно з околom  $\lambda$ -переходу. У розділах II, III з перших принципів за допомогою матриці густини взаємодіючих бозе-частинок отримано кінетичну енергію. У наступному розділі подано вираз для потенціальної енергії. Вираз для повної енергії подано в розділі V. Останій VI розділ містить чисельні розрахунки потенціальної, кінетичної та повної енергії з урахуванням парних кореляцій. Зроблено також порівняння кривих теплоємності, повної енергії й парного структурного фактора з відповідними експериментальними даними.

## II. ВИХІДНІ РІВНЯННЯ

Розгляньмо систему  $N$  безспінових бозе-частинок із координатами  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ , які рухаються в об'ємі  $V$ . Гамільтоніян такої системи має звичайний вигляд суми кінетичної й потенціальної енергії:

$$\hat{H} = \hat{K} + \hat{\Phi},$$

де

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^N \nabla_j^2, \quad \hat{\Phi} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \Phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (1)$$

— відповідно оператор кінетичної й потенціальної енергії в координатному зображенні.

Тоді повну енергію обчислимо як

$$E = \langle \hat{K} \rangle + \langle \hat{\Phi} \rangle.$$

Енергію будемо шукати за допомогою матриці густини, розрахованої в [31]:

$$R_N(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = R_N^0(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \times P_N(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (2)$$

де  $R_N^0(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  — матриця густини ідеального бозе-газу, а  $P_N(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  — фактор, що враховує взаємодію частинок:

$$P_N(\rho'_q | \rho_q) = e^U, \quad (3)$$

$$U = c_0 + \sum_{\mathbf{q} \neq 0} c_1(q) \rho_{\mathbf{q}} \rho'_{-\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} c_2(q) (\rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} + \rho'_{\mathbf{q}} \rho'_{-\mathbf{q}}), \quad (4)$$

$$c_0 = \left\{ -\beta E_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \ln \left( \frac{\alpha_q \tanh \left( \frac{\beta E_q}{2} \right)}{\tanh \left( \frac{\beta \varepsilon_q}{2} \right)} \right) + \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \ln \left( \frac{1 - \exp(-\beta \varepsilon_q)}{1 - \exp(-\beta E_q)} \right) \right\},$$

$$c_1(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_q}{\sinh(\beta E_q)} - \frac{1}{\sinh(\beta \varepsilon_q)} \right),$$

$$c_2(q) = \frac{1}{2} [\alpha_q \coth(\beta E_q) - \coth(\beta \varepsilon_q)].$$

Уведено такі позначення:  $\beta = 1/T$  — обернена температура бозе-газу;

$$\rho_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}, \quad \rho'_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}'_j}$$

— коефіцієнти Фур'є флуктуацій густини частинок;  $\varepsilon_q = \hbar^2 q^2 / 2m$  — енергія вільної частинки;  $E_q = \varepsilon_q \alpha_q$  — спектр елементарних збуджень Боголюбова,

$$\alpha_q = \sqrt{1 + \frac{2N}{V} \frac{\nu_q}{\varepsilon_q}} \quad (5)$$

— боголюбівський фактор;

$$E_0 = \frac{N(N-1)}{2V} \nu_0 - \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\hbar^2 q^2}{8m} (\alpha_q - 1)^2 \quad (6)$$

— енергія основного стану багатобозонної системи в наближенні Боголюбова [32]. Використовуючи матрицю густини (2), кінетичну енергію запишемо у вигляді:

$$\langle \hat{K} \rangle = \frac{1}{Z_N} \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N \left[ \hat{K} R_N(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \right] \Bigg|_{\mathbf{r}'_1=\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_N=\mathbf{r}_N}, \quad (7)$$

де

$$Z_N = \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N R_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (8)$$

— статистична сума системи взаємодіючих бозе-частинок.

Після дії оператора кінетичної енергії на матрицю густини штрихи знімаємо.

У виразі (7) подіємо оператором кінетичної енергії  $\hat{K}$  на матрицю густини (2):

$$\langle \hat{K} \rangle = \langle \hat{K}_1 \rangle + \langle \hat{K}_2 \rangle + \langle \hat{K}_3 \rangle, \quad (9)$$

де

$$\langle \hat{K}_1 \rangle = \frac{1}{Z_N} \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N \left[ P_N(\rho'_q | \rho_q) \sum_{j=1}^N \left( -\frac{\hbar^2 \nabla_j^2}{2m} \right) R_N^0(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \right] \Bigg|_{\mathbf{r}'_1=\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_N=\mathbf{r}_N}, \quad (10)$$

$$\langle \hat{K}_2 \rangle = \frac{1}{Z_N} \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N \left[ R_N^0(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \sum_{j=1}^N \left( -\frac{\hbar^2 \nabla_j^2}{2m} \right) P_N(\rho'_q | \rho_q) \right] \Bigg|_{\mathbf{r}'_1=\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_N=\mathbf{r}_N}, \quad (11)$$

$$\langle \hat{K}_3 \rangle = -\frac{\hbar^2}{mZ_N} \times \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N \sum_{j=1}^N \left( [\nabla_j P_N(\rho'_q | \rho_q)] [\nabla_j R_N^0(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)] \right) \Bigg|_{\mathbf{r}'_1=\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_N=\mathbf{r}_N}. \quad (12)$$

Нашим завданням буде послідовний розрахунок доданків  $\langle \hat{K}_1 \rangle$ ,  $\langle \hat{K}_2 \rangle$ ,  $\langle \hat{K}_3 \rangle$  і  $\langle \hat{\Phi} \rangle$ .

### III. СЕРЕДНЯ КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ

Для розрахунку  $\langle \hat{K}_1 \rangle$  з (10) використаємо рівняння Блоха для матриці густини ідеального бозе-газу  $R_N^0(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ :

$$-\frac{\partial R_N^0}{\partial \beta} = \hat{K} R_N^0, \quad (13)$$

$$\beta = 0: \quad R_N^0 = \frac{1}{N!} \sum_Q \prod_{j=1}^N \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_{Qj}).$$

Підсумування за  $Q$  — це підсумування за всіма  $N!$  перестановками індексів, що нумерують координати частинок. Тоді  $\langle \hat{K}_1 \rangle$  перепишемо в такому вигляді:

$$\langle \hat{K}_1 \rangle = -\frac{1}{Z_N} \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N P(\rho_q | \rho_q) \frac{\partial}{\partial \beta} R_N^0$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z'_N,$$

штрих біля статистичної суми  $Z_N$  означає, що похідна за  $\beta$  від  $Z'_N$  береться лише від внеску матриці густини ідеального бозе-газу  $R_N^0$  у статистичну суму (величина  $\beta$  виступає параметром, то похідна береться від тих величин, які розраховані за допомогою матриці густини ідеального бозе-газу; в цьому випадку це структурний фактор і статистична сума ідеального бозе-газу). Від коефіцієнтів  $c_0$ ,  $c_1(q)$ ,  $c_2(q)$ , які явно входять у  $P_N$ , похідної не беремо.

Розрахуємо наступний складник кінетичної енергії  $\langle \hat{K}_2 \rangle$ . З урахуванням (3) вираз для компоненти кінетичної енергії  $\langle \hat{K}_2 \rangle$  (11) набере вигляду:

$$\langle \hat{K}_2 \rangle = -\frac{\hbar^2}{2mZ_N} \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N \times \left[ R_N^0 P_N \sum_{j=1}^N \left( \nabla_j^2 U + [\nabla_j U]^2 \right) \right] \Bigg|_{\mathbf{r}'_1=\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_N=\mathbf{r}_N}.$$

Цю рівність можна переписати як середнє за повною матрицею густини (2):

$$\langle \hat{K}_2 \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\langle \sum_{j=1}^N \left( \nabla_j^2 U + [\nabla_j U]^2 \right) \Big|_{\mathbf{r}'_1=\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_N=\mathbf{r}_N} \right\rangle. \quad [\nabla_j R_N^0(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)]_{\mathbf{r}'_1=\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_N=\mathbf{r}_N} = \frac{1}{2} \nabla_j R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Після взяття похідних від функції  $U$  отримаємо такий вираз для компоненти кінетичної енергії  $\langle \hat{K}_2 \rangle$ :

$$\langle \hat{K}_2 \rangle = \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_{\mathbf{q}} \left( -\frac{\lambda_{\mathbf{q}}}{2} S(q) + c_2(q) - \frac{\lambda_{\mathbf{q}}^2}{4} S(q) \right) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q} \neq 0 \\ \mathbf{q}' \neq 0 \\ \mathbf{q} + \mathbf{q}' \neq 0}} \frac{\hbar^2(\mathbf{q}\mathbf{q}')}{2m} \frac{\lambda_{\mathbf{q}} \lambda_{\mathbf{q}'}}{4} \langle \rho_{-\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}'} \rho_{\mathbf{q} + \mathbf{q}'} \rangle, \quad (14)$$

де  $S(q) = \langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rangle$  – повний структурний фактор бозе-рідини,

$$\lambda_{\mathbf{q}} = 2[c_2(q) - c_1(q)] = \alpha_{\mathbf{q}} \tanh\left(\frac{\beta E_{\mathbf{q}}}{2}\right) - \tanh\left(\frac{\beta \varepsilon_{\mathbf{q}}}{2}\right). \quad (15)$$

Обчислимо останній складник кінетичної енергії  $\langle \hat{K}_3 \rangle$  (12). Дію оператора  $\nabla_j$  на функцію  $R_N^0(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  можна записати так:

Для фактора взаємодії робимо аналогічно:

$$[\nabla_j P_N(\rho'_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}})]_{\rho'_{\mathbf{q}}=\rho_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} \nabla_j P_N(\rho_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}}).$$

Запишемо середнє значення від  $\langle \hat{K}_3 \rangle$  з урахуванням цих рівностей:

$$\langle \hat{K}_3 \rangle = \frac{1}{Z_N} \left( -\frac{\hbar^2}{4m} \right) \sum_{j=1}^N \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N [\nabla_j P_N(\rho_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}})] \times [\nabla_j R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)].$$

Інтеграл за всіма координатами частинок братимемо частинами, але зауважимо, що тут є два способи перекидання оператора  $\nabla_j$ . Розгляньмо їх докладніше. В першому випадку інтегруємо і перекидаємо оператор  $\nabla_j$  з  $R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  на  $P_N(\rho_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}})$ :

$$\int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N [\nabla_j P_N(\rho_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}})] [\nabla_j R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)] = - \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \nabla_j^2 P_N(\rho_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}}).$$

При іншому перекиданні  $\nabla_j$  з  $P_N$  на  $R_N^0$  із урахуванням рівності нулевій вільного члена будемо мати таку рівність:

$$\int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N [\nabla_j P_N(\rho_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}})] [\nabla_j R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)] = - \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N P_N(\rho_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}}) \nabla_j^2 R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Унаслідок таких перетворень записуємо рівність:

$$\langle \hat{K}_3 \rangle = \frac{\hbar^2}{Z_N 4m} \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \nabla_j^2 P_N(\rho_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}})$$

або

$$\langle \hat{K}_3 \rangle = \frac{\hbar^2}{Z_N 4m} \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N P_N(\rho_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}}) \nabla_j^2 R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Використовуючи перший спосіб перекидання похідної і враховуючи (3), вираз для  $\langle \hat{K}_3 \rangle$  можна переписати як середнє за повною матрицею густини  $R_N$ :

$$\langle \hat{K}_3 \rangle = \frac{\hbar^2}{4m} \left\langle \sum_{j=1}^N \left( \nabla_j^2 U + [\nabla_j U]^2 \right) \right\rangle,$$

де функція  $U$  – діагональна. Далі беремо похідні й у результаті отримаємо:

$$\langle \hat{K}_3 \rangle = \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_{\mathbf{q}} \left( \frac{\lambda_{\mathbf{q}}^2}{2} S(q) + \frac{\lambda_{\mathbf{q}}}{2} S(q) - \frac{\lambda_{\mathbf{q}}}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q} \neq 0 \\ \mathbf{q}' \neq 0 \\ \mathbf{q} + \mathbf{q}' \neq 0}} \frac{\hbar^2(\mathbf{q}\mathbf{q}')}{m} \frac{\lambda_{\mathbf{q}} \lambda_{\mathbf{q}'}}{4} \langle \rho_{-\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}'} \rho_{\mathbf{q} + \mathbf{q}'} \rangle. \quad (16)$$

Зауважимо, що з означення  $\langle \hat{K}_3 \rangle$  (12) випливає, що при  $T \rightarrow 0$ , коли  $R_N^0 = 1/V^N$ ,  $\langle \hat{K}_3 \rangle = 0$ ; крім того, для незваємодіючих частинок, коли  $P_N = 1$  ( $\alpha_q = 1$ ), величина  $\langle \hat{K}_3 \rangle = 0$ .

Використовуючи обчислені складники кінетичної енергії, запишемо сумарну кінетичну енергію (9):

$$\begin{aligned} \langle \hat{K} \rangle = & -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z'_N + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q \lambda_q^2 S(q) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q \left[ \frac{\alpha_q}{\text{sh}(\beta \alpha_q \varepsilon_q)} - \frac{1}{\text{sh}(\beta \varepsilon_q)} \right] - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q} \neq 0 \\ \mathbf{q}' \neq 0 \\ \mathbf{q} + \mathbf{q}' \neq 0}} \frac{\hbar^2(\mathbf{q}\mathbf{q}')}{8m} \lambda_q \lambda_{q'} \langle \rho_{-\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}'} \rho_{\mathbf{q} + \mathbf{q}'} \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Для розрахунку кінетичної енергії нам потрібно обчислити статистичну суму, парний і тричастинковий структурні фактори. У наступних розрахунках обмежимося лише наближенням парних кореляцій. У результаті цього четвертий доданок у формулі (17) зникає. Тепер використаємо з [31] вираз для парного структурного фактора і статистичної суми в наближенні однієї суми за хвильовим вектором:

$$S(q) = \frac{S_0(q)}{1 + \lambda_q S_0(q)}, \quad (18)$$

$$Z_N = Z_N^0 \exp \left[ c_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \ln \{ 1 + \lambda_q S_0(q) \} \right], \quad (19)$$

де

$$Z_N^0 = \exp \left[ - \sum_{\mathbf{q}} \ln \left( 1 - z_0 e^{-\beta \hbar^2 q^2 / 2m} \right) \right]$$

— статистична сума ідеального бозе-газу,  $z_0$  і  $S_0(q)$  — відповідно активність і структурний фактор ідеального бозе-газу.

Тоді кінетична енергія в наближенні парних кореляцій матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \langle \hat{K} \rangle = & \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\varepsilon_q}{z_0^{-1} e^{\beta \varepsilon_q} - 1} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\lambda_q}{1 + \lambda_q S_0(q)} \frac{\partial S_0(q)}{\partial \beta} \\ & + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q \lambda_q^2 S(q) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q \left[ \frac{\alpha_q}{\text{sh}(\beta \alpha_q \varepsilon_q)} - \frac{1}{\text{sh}(\beta \varepsilon_q)} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Активність  $z_0$  виключаємо з рівняння:

$$\sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} = N,$$

де

$$n_{\mathbf{p}} = \frac{1}{z_0^{-1} e^{\beta \varepsilon_q} - 1}$$

— середня кількість частинок, які мають імпульс рівний  $\hbar \mathbf{p}$ . Оскільки активність  $z_0$  ідеального бозе-газу залежить від температури, то похідну за параметром  $\beta$  в (20) беремо від активності у виразі для  $S_0(q)$ .

У низькотемпературній межі з формули (18) маємо:

$$\alpha_q = \frac{1}{S(q)} \Big|_{T \rightarrow 0}, \quad (21)$$

де враховано явний вигляд  $\lambda_q$  (15), а також узято до уваги, що при  $T \rightarrow 0$  структурний фактор ідеального бозе-газу  $S_0(q) \rightarrow 1$ .

#### IV. СЕРЕДНЯ ПОТЕНЦІЯЛЬНА ЕНЕРГІЯ

Використаймо для оператора потенціальної енергії  $\hat{\Phi}$  зображення через величини  $\rho_{\mathbf{q}}$ :

$$\hat{\Phi} = \frac{N(N-1)}{2V} \nu_0 + \frac{N}{2V} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \nu_q (\rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} - 1), \quad (22)$$

де

$$\nu_q = \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}} \Phi(R) d\mathbf{R} \quad (23)$$

— фур'є-образ потенціалу взаємодії  $\Phi(R)$ . Для середнього значення потенціальної енергії маємо:

$$\langle \hat{\Phi} \rangle = \frac{N(N-1)}{2V} \nu_0 + \frac{N}{2V} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \nu_q [S(q) - 1]. \quad (24)$$

Величину  $\nu_q$  за допомогою рівняння (5) запишімо через структурний фактор системи при  $T \rightarrow 0$  (21):

$$\nu_q = \frac{1}{2\rho} \varepsilon_q (\alpha_q^2 - 1). \quad (25)$$

Для розрахунку першого доданка у виразі (24) скористаймося такою схемою. Швидкість звуку  $c$  при температурі абсолютного нуля визначаємо з термодинамічного співвідношення [33]:

$$c^2 = \frac{N}{m} \frac{\partial^2 E_0}{\partial N^2}. \quad (26)$$

У наближенні парних кореляцій, у якому ми працюємо, енергію  $E_0$  беремо з виразу (6) і в результаті знаходимо:

$$mc^2 = \rho\nu_0 - \frac{1}{8N} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q \frac{1}{\alpha_q} \left( \alpha_q - \frac{1}{\alpha_q} \right)^2. \quad (27)$$

Це рівняння дає змогу виключити величину  $\nu_0$  з виразу для середнього значення потенціальної енергії (24). Отже, в наближенні парних кореляцій середня потенціальна енергія матиме вигляд:

$$\langle \hat{\Phi} \rangle = N \frac{mc^2}{2} + \frac{1}{16} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q \frac{1}{\alpha_q} \left( \alpha_q - \frac{1}{\alpha_q} \right)^2 + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q (\alpha_q^2 - 1) [S(q) - 1]. \quad (28)$$

### V. СЕРЕДНЯ ЕНЕРГІЯ

Із урахуванням виразів (20) і (28) для повної енергії будемо мати:

$$E = N \frac{mc^2}{2} + \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\varepsilon_q}{z_0^{-1} e^{\beta \varepsilon_q} - 1} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\lambda_q}{1 + \lambda_q S_0(q)} \frac{\partial S_0(q)}{\partial \beta} \quad (29)$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q (\lambda_q^2 + \alpha_q^2 - 1) S(q) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q \left[ \frac{\alpha_q}{\text{sh}(\beta \alpha_q \varepsilon_q)} - \frac{1}{\text{sh}(\beta \varepsilon_q)} \right] + \frac{1}{16} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q \left( 1 - \frac{1}{\alpha_q^2} \right) \left( \alpha_q - \frac{1}{\alpha_q} - 4\alpha_q^2 \right).$$

Очевидно, що, вимкнувши взаємодію між частинками ( $\alpha_q = 1$ ), ми отримаємо середню енергію ідеального бозе-газу. Вираз для повної енергії основного стану багатобозонної системи ( $T = 0$ ) запишемо так:

$$E_0 = N \frac{mc^2}{2} - \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q \left( 1 - \frac{1}{\alpha_q} \right)^3 \quad (30)$$

$$\times \left( \alpha_q^2 + \frac{3}{4} \alpha_q + \frac{1}{4} \right),$$

а відповідно кінетична й потенціальна енергії:

$$\langle \hat{K} \rangle \Big|_{T=0} = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q \frac{(\alpha_q - 1)^2}{\alpha_q}, \quad (31)$$

$$\langle \hat{\Phi} \rangle \Big|_{T=0} = N \frac{mc^2}{2} + \frac{1}{16} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q (\alpha_q - 1)^2 \quad (32)$$

$$\times \frac{(\alpha_q + 1)}{\alpha_q} \left( \frac{1}{\alpha_q^2} + \frac{1}{\alpha_q} - 4 \right).$$

Кінетична (31) і потенціальна (32) енергії основного стану багатобозонної системи в наближенні парних кореляцій збігаються з відповідними виразами праці [33].

Оскільки вирази для парного структурного фактора (18), кінетичної (20) і потенціальної (28) енергій містять лише спостережувальні величини (для  $\alpha_q$  див. (21)), то це дає сподівання отримати добрі чисельні результати.

### VI. ЧИСЕЛЬНІ РОЗРАХУНКИ

Результати чисельних розрахунків повної (30), кінетичної (31) і потенціальної (32) енергій в основному стані наведено в таблиці 1 у порівнянні з експериментальними та теоретичними даними інших авторів.

Чисельні розрахунки ми проводили при рівноважній густині гелію  $\rho = 0.02185 \text{ \AA}^{-3}$ , масі частинок  $m = 4.0026 \text{ а.о.м.}$ , швидкості звуку  $c = 238.2 \text{ м/с}$  у границі  $T \rightarrow 0$  [43] і критичній температурі ідеального бозе-газу  $T_c = 3.138 \text{ К}$ . Експериментальний структурний фактор рідкого  $^4\text{He}$ , екстрапольований до  $T = 0$ , беремо з роботи [44].

| Праця                        | $E_0/N$ | $K_0/N$ | $\Phi_0/N$ |
|------------------------------|---------|---------|------------|
| [35]                         |         | 14.6    |            |
| [36]                         | -5.56   | 14.6    | -19.82     |
| [37]                         | -5.73   | 13.73   | -19.46     |
| [38]                         | -6.02   | 14.30   | -20.32     |
| [39]                         | -6.85   | 13.62   | -20.47     |
| [40]                         | -6.10   | 13.96   | -20.06     |
| [41]                         | -6.97   | 14.47   | -21.44     |
| [42]                         | -6.96   | 14.77   | -21.73     |
| [34]                         | -7.13   | 14.00   | -21.14     |
| [33], 1-й порядок, парні     | -6.3    | 12.1    | -18.4      |
| [33], 2-й порядок, парні     | -9.4    | 15.2    | -24.6      |
| [33]*                        | -6.4    | 14.2    | -20.6      |
| [8]                          | -7.1    | 14.5    | -21.6      |
| ця праця, 1-й порядок, парні | -5.2    | 10.9    | -16.1      |

Таблиця 1. Порівняння значень енергій основного стану багатобозонної системи. [33]\* – 2 порядок, парні + три-, чотиричастинкові кореляції.

Як бачимо з таблиці 1, значення повної, кінетичної й потенціальної енергій, отримані у праці [33], відрізняються від значень, які одержані в цій роботі, хоча вирази для енергій збігаються. Річ у тому, що при чисельних розрахунках енергій у праці [33] використано експериментальний структурний фактор, екстрапольований при малих значеннях хвильового вектора  $\mathbf{q}$  до нуля температури, а для інших значень  $\mathbf{q}$  застосовували при  $T = 0.79$  К [45] і  $c = 237.3$  м/с [46]. У наших теперішніх розрахунках ми використовували екстрапольований до нуля температури для всіх значень  $\mathbf{q}$  структурний фактор [44]. На рис. 1 зображено порівняння двох структурних факторів, узятих із праць [44] і [45].

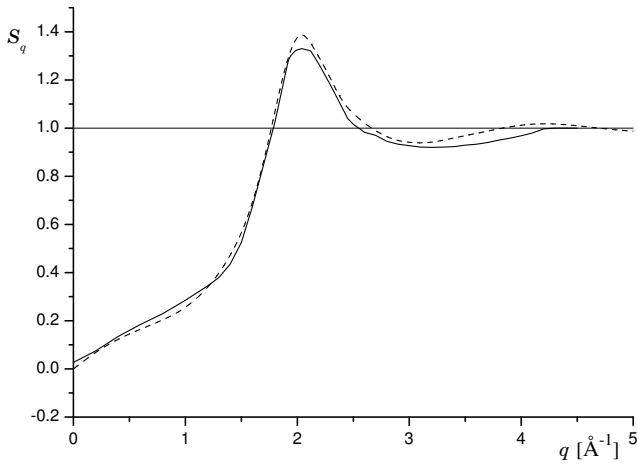


Рис. 1. Порівняння структурних факторів із праць [44] і [45]. Штрихова лінія — екстрапольований до  $T = 0$  структурний фактор з [44], суцільна лінія — експериментальний структурний фактор при  $T = 0.79$  К з праці [45].

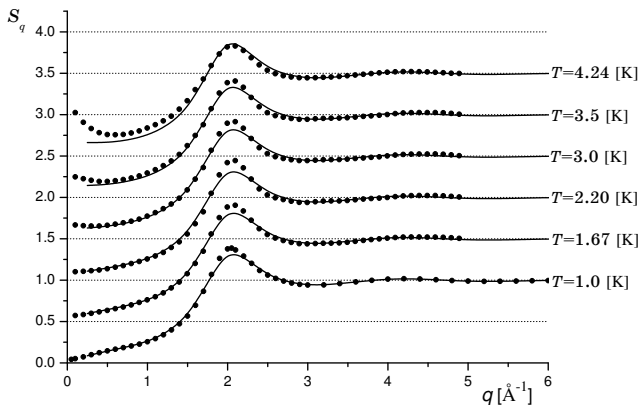


Рис. 2. Порівняння структурних факторів при різних температурах рідкого  ${}^4\text{He}$ . Суцільна лінія — обчислений парний структурний фактор, кружечки — експериментальний структурний фактор [47] (для зручності ілюстрації графіків криві зміщено одна щодо одної на 0.5).

Проаналізуємо повну енергію (29) в ділянці низьких температур. У цій ділянці повна енергія збігається з енергією праці [31]. При  $T \rightarrow 0$ :  $S_0(q) \rightarrow \coth(\beta\varepsilon_q/2)$ ,  $S(q) \rightarrow \alpha_q^{-1} \coth(\beta\alpha_q\varepsilon_q/2)$ ,  $\partial S_0(q)/\partial\beta \rightarrow -\varepsilon_q/2 \operatorname{sh}^2(\beta\varepsilon_q/2)$ . Із третього по п'ятий доданки

формули (29) збираємо разом ті, які не містять взаємодії. Якщо  $T < T_c$ , тоді  $z_0 = 1$  і другий доданок зникне зібраними доданками без взаємодії. Далі збираємо разом мішані й з урахуванням взаємодії доданки. Унаслідок додавання перетворених виразів отримуємо таке значення енергії:

$$E = E_0 + \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{E_q}{e^{\beta E_q} - 1}. \quad (33)$$

Ця формула працює при дуже низьких температурах, що означає важливість малих значень хвильового вектора  $\mathbf{q}$  у виразі для спектра  $E_q$ :  $E_q = \hbar c q$ . Після підстановки  $E_q$  у (33) й інтегрування отримуємо такий результат (закон Стефана–Больцмана):

$$E = E_0 + \frac{V}{2\pi^2(\hbar c)^3} T^4.$$

Отже, ми одержимо правильну поведінку теплоємності при низьких температурах  $C_V \sim T^3$ .

На рис. 2 показано порівняння експериментального й розрахованого за (18) парного структурного фактора при різних температурах. Дані експериментального структурного фактора беремо з [8]. З рисунка видно, що узгодженість структурних факторів при низьких температурах є доброю, а з підвищенням температури починає з'являтися відхилення — особливо при малих значеннях хвильового вектора  $\mathbf{q}$ . Можливо, однією з причин цього є те, що ми не враховуємо внесків від вищих наближень.

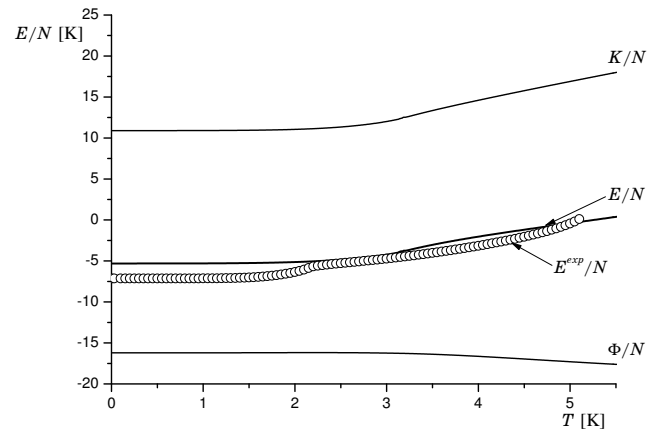


Рис. 3. Енергія рідкого гелію-4.  $K/N$  — кінетична енергія;  $\Phi/N$  — потенціальна енергія;  $E/N$  — повна енергія;  $E^{\text{exp}}/N$  — експериментальні значення енергії [48].

Перейдімо до обчислення теплоємності  $C_V = (\partial E/\partial T)_V$ . Похідну  $\partial S_0(q)/\partial\beta$  беремо різницевим методом. Тоді чисельними методами рахуємо відповідні інтеграли й одержуємо повну енергію системи. На рис. 3 показано порівняння експериментальної й теоретичної (в наближенні парних кореляцій) енергій. Для ліпшого узгодження цих кривих потрібно врахувати вищі наближення для енергій.

Теплоємність рахуємо також різницевим методом і будемо графік залежності від відносної температури ( $T/T_c$ ).

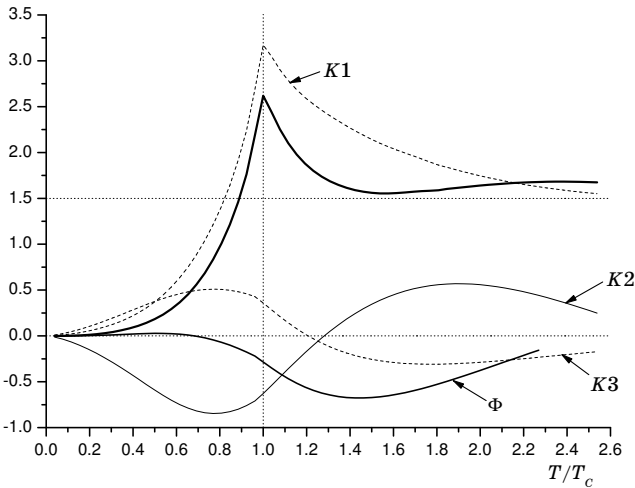


Рис. 4. Внесок у теплоємність компонент енергії рідкого гелію-4.  $K1$  — теплоємність компоненти кінетичної енергії  $\langle \hat{K}_1 \rangle$ ;  $K2$  — теплоємність компоненти кінетичної енергії  $\langle \hat{K}_2 \rangle$ ;  $K3$  — теплоємність компоненти кінетичної енергії  $\langle \hat{K}_3 \rangle$ ;  $\Phi$  — внесок у теплоємність від потенціальної енергії  $\langle \hat{\Phi} \rangle$ ; суцільна лінія — сумарна теплоємність.

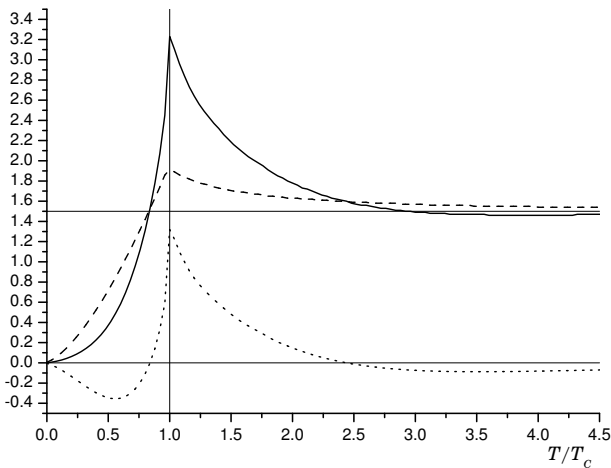


Рис. 5. Внесок у теплоємність компоненти енергії  $\langle \hat{K}_1 \rangle$  рідкого гелію-4. Суцільна лінія — внесок у теплоємність компоненти кінетичної енергії  $\langle \hat{K}_1 \rangle$ ; штрихована — теплоємність ідеального бозе-газу (перша сума у формулі (20)). Крапки показують внесок у теплоємність компоненти  $\langle \hat{K}_1 \rangle$ , що залежить від похідної (друга сума у формулі (20)).

На рис. 4 в наближенні однієї суми за хвильовим вектором показано внесок у теплоємність від кожної з величин, які утворюють енергію (тобто від складників кінетичної енергії  $\langle \hat{K}_1 \rangle$ ,  $\langle \hat{K}_2 \rangle$ ,  $\langle \hat{K}_3 \rangle$  і потенціальної енергії  $\langle \hat{\Phi} \rangle$ ). З рисунка можемо побачити цікавий результат, що компоненти теплоємності  $\langle \hat{K}_2 \rangle$  і  $\langle \hat{K}_3 \rangle$  майже компенсують одна одну. Характер поведінки кривої теплоємності визначає компонента  $\langle \hat{K}_1 \rangle$ , яка

виникає внаслідок дії оператора  $\nabla_j^2$  на матрицю густини ідеального бозе-газу, і складник від потенціальної енергії.

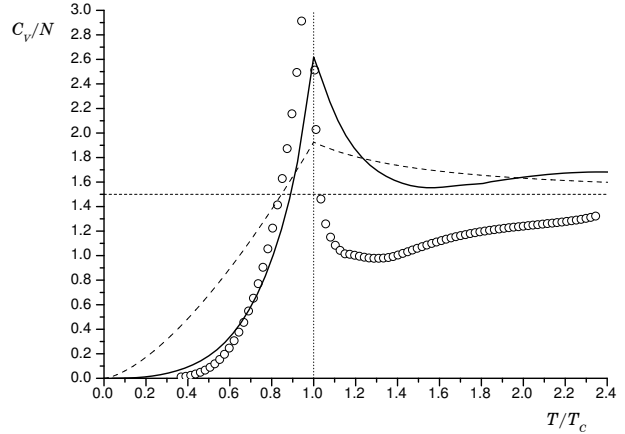


Рис. 6. Теплоємність рідкого гелію-4 в наближенні парних кореляцій. Суцільна лінія — обчислена теплоємність; штрихована — теплоємність ідеального бозе-газу. Кружки показують експериментальні дані з [8, 16, 48].

З рис. 4 можна зробити висновок, що основний внесок у теплоємність дає компонента кінетичної енергії  $\langle \hat{K}_1 \rangle$  і потенціальна енергія. Складник кінетичної енергії  $\langle \hat{K}_1 \rangle$  містить кінетичну енергію ідеального бозе-газу і поправки до неї, що залежить від похідної структурного фактора ідеального бозе-газу за оберненою температурою. Зобразимо графічно ці компоненти, щоб наочно побачити, як деформує теплоємність ідеального бозе-газу поправка, яка залежить від похідної (рис. 5).

На рис. 6 в наближенні парних кореляцій можемо побачити порівняння різних кривих теплоємності. Як видно з порівняння обчисленої кривої з експериментальною, узгодження їх при низьких температурах ( $0 < T/T_c < 1$ ) є добрим. При температурі  $T/T_c > 1$  виникає певна неузгодженість із експериментальною кривою, хід кривої є досить подібним до ходу експериментальної теплоємності, майже паралельно зсунутим уверх. Ця неузгодженість пов'язана з тим, що для кількісного опису потрібно враховувати внесок три- та чотиричастинкових кореляцій. Внесок від три- та чотиричастинкових кореляцій при низьких температурах, як показано у працях [33, 49, 50], значно поліпшує результати для основного стану і дає досить добре узгодження при  $T \rightarrow 0$ . Отже, для ліпшого кількісного опису (особливо для  $T > T_c$ ) потрібно закладати в основу теорії три- або чотиричастинкові кореляції, а також враховувати опосередковані кореляції, які виникають під час розрахунку середньої енергії.



- [1] W. H. Keesom, A. P. Keesom, Commun. Phys. Lab. Leiden № 221d, 19 (1932); W. H. Keesom, K. Cluisius, Proc. Roy. Acad. Amsterdam **35**, 307 (1932); В. Кеэзом, *Гелий* (Изд-во иностр. лит., Москва, 1949).
- [2] К. Хуанг, *Статистическая механика* (Мир, Москва, 1966).
- [3] R. Brout, *Phase Transitions* (W. A. Benjamin, New York–Amsterdam, 1965).
- [4] Н. Марч., У. Янг, С. Сампантхар, *Проблема многих тел в квантовой механике* (Мир, Москва, 1969).
- [5] А. Исихара, *Статистическая физика* (Мир, Москва, 1973).
- [6] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1971).
- [7] Р. Фейнман, *Статистическая механика* (Мир, Москва, 1978).
- [8] D. M. Ceperley, Rev. Mod. Phys. **67**, 2 (1995).
- [9] J. A. Lipa, D. R. Swanson, J. A. Nissen, T. C. P. Chui, U. E. Israelsson, Phys. Rev. Lett. **76**, 944 (1996).
- [10] J. A. Lipa, D. R. Swanson, J. A. Nissen, Z. K. Geng, P. R. Williamson, D. A. Stricker, T. C. P. Chui, U. E. Israelsson, M. Larson, Phys. Rev. Lett. **84**, 4894 (2000).
- [11] И. А. Вакарчук, Теор. мат. физ. **35**, 76 (1978); Теор. мат. физ. **36**, 122 (1978).
- [12] H. Kleirnet, Phys. Lett. A **277**, 205 (2000).
- [13] M. Camprostini, A. Pelissetto, P. Rossi, E. Vicari, Phys. Rev. B **61**, 5905 (2000).
- [14] F. London, Nature **141**, 643 (1938); Phys. Rev. **54**, 947 (1938).
- [15] T. Lindenaу, M. L. Risting, J. W. Klark, K. A. Gernoth, J. Low Temp. Phys. **129**, 314 (2000).
- [16] V. D. Arp, Int. J. Thermophys. **26**, 5 (2005).
- [17] J. Mayers, Phys. Rev. B **74**, 014516 (2006).
- [18] R. T. Azuah, H. R. Glyde, R. Scherm, N. Mulders, B. Fåk, J. Low Temp. Phys. **130**, 557 (2003).
- [19] J. V. Pearce, S. O. Diallo, H. R. Glyde, R. T. Azuah, T. Arnold, J. Z. Larese, J. Phys.: Condens. Matter **16**, 4391 (2004).
- [20] S. M. Gatica *et al.*, Phys. Rev. B **62**, 9989 (2000).
- [21] L. Szybisz, S. M. Gatica, Phys. Rev. B **64**, 224523(2001).
- [22] S. M. Gatica, M. M. Calbi, M. W. Cole, Phys. Rev. E **65**, 061605(2002).
- [23] S. M. Gatica, E. S. Hernandez, L. Szybisz, Phys. Rev. B **68**, 144501 (2003).
- [24] F. Ancilotto, M. M. Calbi, S. M. Gatica, M. W. Cole, Phys. Rev. B **70**, 165422 (2004).
- [25] B. Marccone, E. Orlandini, F. Toigo, F. Ancilotto, Phys. Rev. B **74**, 085415 (2006).
- [26] S. M. Gatica, G. Stan, M. M. Calbi, J. K. Johnson, M. W. Cole, J. Low Temp. Phys. **120**, 337 (2000).
- [27] E. Krotscheck, M. D. Miller, Phys. Rev. B **60**, 13038 (1999).
- [28] M. Boninsegni, S. Moroni, J. Low Temp. Phys. **118**, 1 (2000).
- [29] E. S. Hernandez, J. Low Temp. Phys. **127**, 153 (2002).
- [30] E. S. Hernandez, Phys. Rev. Lett. **89**, 185301 (2002).
- [31] I. O. Vakarchuk, J. Phys. Stud. **8**, 223 (2004).
- [32] Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, Сер. физ. **11**, 77 (1947).
- [33] И. А. Вакарчук, Теор. мат. физ. **82**, 438 (1990).
- [34] V. F. Sears, Phys. Rev. B **28** 1983.
- [35] F. London, *Superfluids. V. 2*, (Wiley, New York, 1954).
- [36] W. L. McMillan, Phys. Rev. A **138**, 442 (1965).
- [37] D. Schiff, L. Verlet, Phys. Rev. **160**, 208 (1967).
- [38] W. E. Massey, C. W. Woo, Phys. Rev. **164**, 256 (1967).
- [39] P. A. Whitlock, D. M. Ceperley, G. V. Chester, M. H. Kalos, Phys. Rev. B **19**, 5598 (1979).
- [40] G. Gaglione, G. L. Masserini, L. Reato, Phys. Rev. B **22**, 1237 (1980).
- [41] M. H. Kalos, M. A. Lee, P. A. Whitlock, G. V. Chester, Phys. Rev. B **24**, 115 (1981).
- [42] Q. N. Usmani, S. Fantoni, V. R. Pandharipande, Phys. Rev. B **26**, 6123 (1982).
- [43] R. J. Donnelly, C. F. Barenghi, J. Phys. Chem. Ref. Data, **27**, 6 (1998).
- [44] I. O. Vakarchuk, V. V. Babin, A. A. Rovenchak, J. Phys. Stud. **4**, 1 (2000).
- [45] F. K. Achter, L. Meyer, Phys. Rev. **188**, 1 (1969).
- [46] R. B. Hallock, Phys. Rev. A. **5**, 1 (1972).
- [47] H. N. Robkoff, Phys. Rev. B. **24**, 159 (1981).
- [48] V. D. Arp., R. D. McCarty, D. G. Friend, Natl. Inst. Stand. Technol. Tech. Note 1334 (revised) (1998).
- [49] И. А. Вакарчук, П. А. Глушак, Теор. мат. физ. **75**, 101 (1988).
- [50] И. А. Вакарчук, П. А. Глушак, препр. ИТФ АН УССР 88-29Р (Киев, 1988).

KINETIC ENERGY AND HEAT CAPACITY OF LIQUID  $^4\text{He}$ 

I. O. Vakarchuk, R. O. Prytula, A. A. Rovenchak

*Ivan Franko National University of Lviv, Department for Theoretical Physics,  
12 Drahomanov St., Lviv, UA-79005, Ukraine*

A new method is proposed for the description of the thermodynamic properties of liquid helium-4 in a wide temperature range, including  $\lambda$ -transition. The density matrix of interacting Bose-particles is used in the approximation of pair correlations [I. O. Vakarchuk, J. Phys. Stud. **8**, 223 (2004)]. We obtained the expressions for the kinetic and potential energy and also for the pair structure factor. All the final formulae are written solely via the liquid structure factor extrapolated to  $T = 0$  taken as a source information instead of the interatomic potential. We calculated the dependence on temperature for the kinetic and potential energy, pair structure factor, and heat capacity. In the domain of low temperatures  $0 < T/T_c < 1$ , the agreement of the experimental and calculated heat capacity is good, and for  $T/T_c > 1$  our results reproduce the course of experimental data qualitatively (the calculated curve is shifted up almost parallelly).