ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 12, № 1 (2008) 1003(5 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 12, No. 1 (2008) 1003(5 p.)

СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ ДЛЯ СТАТИЧНИХ ПРОСТОРІВ ЗТВ

В. Д. Гладуш, М. В. Галаджій
Дніпропетровський національний університет,
кафедра теоретичної фізики,
вул. Наукова, 13, Дніпропетровськ, 49050, Україна
(Отримано 20 грудня 2006 р.; в остаточному вигляді — 18 вересня 2007 р.)

Запропоновано метод опису й побудови сферично-симетричних систем відліку для статичних просторів ЗТВ. Наведено класифікацію супутніх систем відліку й розглянуто їхні часткові випадки.

Ключові слова: супутні системи відліку, лагранжева координата, рівняння руху, закони збереження.

PACS number(s): 04.20.−q, 04.20.Cv, 04.20.Jb, 04.40.Nr

1. Опис та аналіз динаміки конфіґурацій ЗТВ часто пов'язані з необхідністю побудови й дослідження векторного поля швидкости їхніх складових частинок. Це ставить завдання вивчити відповідні системи відліку (СВ), що пов'язані з цією множиною частинок. Її розв'язок дає змогу побудувати рівняння еволюції конфігурації, дослідити її структуру та динаміку в термінах спостережуваних величин. Загальна теорія СВ розроблена в працях [1–3] і базується на монадному методі та його різних групових калібруваннях. На відміну від загального підходу, де поле монади задається взагалі, нашим завданням є побудова конкретних СВ для класу сферично-симетричних конфіґурацій, що розглядаються. Звідси випливає мета роботи — побудова супутніх систем відліку (ССВ), які були б найбільш природними для опису відповідного класу конфіґурацій та містили б величини, що мають безпосередній фізичний зміст. Останнє зводиться до знаходження явних аналітичних виразів для поля монади відповідної СВ.

Розгляньмо сферично-симетричний простір-час $V^{(4)}$ з метрикою

$$ {}^{(4)}ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \gamma_{ab}dx^a dx^b - R^2 d\sigma^2 \,, \qquad (1) $$

де $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, двовимірний метричний тензор γ_{ab} і масштабний фактор R є функціями просторово-часових координат x^a $(a, b = 0, 1)$. Надалі будемо вважати, що $c = k = 1$.

У деякій ділянці сферично-симетричного простору $V^{(4)}$ розгляньмо множину пробних частинок з *4*-швидкістю $u^\mu = dx^\mu / {}^{(4)}ds$, яка утворює поле монади відповідної ССВ $\mathbf{u} = u^\mu \partial_\mu$. Разом із полем дотичних векторів $\mathbf{u}$ уведемо взаємне до нього поле *1*-форм $\omega = u_\mu dx^\mu$. СВ називатимемо сферично-симетричною, якщо вона узгоджена зі сферичною симетрією початкового простору. Тут вектор монади $\mathbf{u}$ комутує з дотичними векторами алґебри Лі групи обертань O_3, яка є групою рухів цього простору. Тоді СВ реалізована множиною частинок, які рухаються радіяльно і не порушують сферичної симетрії початкового простору. У цьому випадку вектор і ковектор монади мають вигляд $\mathbf{u} = u^a \partial_a$ і $\omega = u_a dx^a$. Природно ввести також просторовоподібне векторне поле $\mathbf{n} = n^a \partial_a$, ортогональне до $\mathbf{u}$, та відповідне йому поле *1*-форм $\widetilde{\omega} = -n_a dx^a$, що доповнюють $\mathbf{u}$ і ω до взаємних векторного $\{\mathbf{u}, \mathbf{n}\}$ й ковекторного $\{\omega, \widetilde{\omega}\}$ діядних базисів, які й задають цю ССВ. Причому виконуються умови взаємности

$$ \omega(\mathbf{u}) = 1, \quad \omega(\mathbf{n}) = 0, \qquad \widetilde{\omega}(\mathbf{u}) = 0, \quad \widetilde{\omega}(\mathbf{n}) = 1 \,. \qquad (2) $$

Отже, завдання побудови природних ССВ у сферично-симетричному просторі $V^{(4)}$ зводиться до побудови СВ, що реалізуються однопараметричною сім'єю кривих у двовимірному просторі-часі $V^{(2)}$ з метрикою ${}^{(2)}ds^2 = \gamma_{ab}dx^a dx^b$. Зазначимо, що метрику двовимірного простору-часу можна записати так:

$$ \gamma_{ab} = u_a u_b - n_a n_b \,, \qquad \gamma^{ab} = u^a u^b - n^a n^b \,. \qquad (3) $$

Відповідно до теореми Фробеніуса [4] *1*-форму ω у $V^{(2)}$ можна подати у вигляді $\omega = N d\psi$, де ψ, N — деякі функції координат. Якщо $N = 1$, то форма є точною. Однак може існувати така *1*-форма $\beta = f d\phi$, де ϕ, f — також функції координат, коли точною формою буде різниця форм $\omega - \beta = d\psi$. Тому при побудові СВ можна виходити з трьох можливостей:

$$ \omega = d\psi \,, \qquad \omega = N d\psi \,, \qquad \omega = \beta + d\psi \,. \qquad (4) $$

Якщо для цієї множини частинок відомо закон збереження, то можна знайти *1*-форму ω і тим самим побудувати базис ССВ.

При побудові діядного базису можуть бути корисними співвідношення, які випливають із умови взаємности (2). Вони дають змогу встановити зв'язок між коваріянтними та контраваріянтними компонентами базисів із точністю до знака

$$ u_0 = \sqrt{-\gamma}\; n^1, \qquad u_1 = -\sqrt{-\gamma}\; n^0 \,, \qquad (5) $$
$$ n_0 = \sqrt{-\gamma}\; u^1, \qquad n_1 = -\sqrt{-\gamma}\; u^0 \,, \qquad (6) $$

де $\gamma = det|\gamma_{ab}|$. Якщо увести двовимірні одиничні антисиметричні тензори [5]

$$e_{ab} = u_a n_b - u_b n_a \,, \qquad e^{ab} = u^a n^b - u^b n^a \,, \tag{7}$$

$$e_{ab} = \sqrt{-\gamma}\ \epsilon_{ab}, \qquad e^{ab} = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\ \epsilon^{ab} \,, \tag{8}$$

де ϵ_{ab} , ϵ^{ab} — двовимірні антисиметричні символи, такі що $\epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba}$, $\epsilon_{ab}\epsilon^{bc} = -\delta^c_a$, $\epsilon_{01} = \epsilon^{01} = 1$, то співвідношення (5) і (6) можна записати компактніше:

$$u_a = e_{ab} n^b, \qquad n_a = e_{ab} u^b. \tag{9}$$

Нехай *1*-форму $\omega = u_a dx^a$, що визначає СВ, задано. Розгляньмо процедуру побудови нових координат, у яких ця форма має канонічний вигляд $\omega = N d\psi$. У цьому випадку *1*-форма ω не є точною і реалізується другий або третій варіант класифікації СВ. Це можливо, коли СВ пов'язується з частинками, які рухаються не за геодезичними. Згідно з (4), для другого варіанту маємо

$$\omega = u_0 dx^0 + u_1 dx^1 = N d\psi \,. \tag{10}$$

Там, де *1*-форма $d\psi$ є часоподібною, ψ можна пов'язати з часовою координатою, поклавши калібрувальну умову $\psi = \tilde{x}^0$, де $\tilde{x}^0$ — нова координата часу. Виразивши звідси dx^0 і підставивши у вираз для $\tilde{\omega}$, компоненти якої знаходяться за допомогою (5) і (6), отримуємо

$$\tilde{\omega} = L\left(dx^1 - V d\tilde{x}^0\right) \,, \tag{11}$$

де

$$L = u_1 {u_0}^{-1} n_0 - n_1 = {u_0}^{-1}\sqrt{-\gamma} \,, \tag{12}$$

$$V = \frac{N n_0}{u_1 n_0 - u_0 n_1} = -N u^1 \,. \tag{13}$$

Метрика простору-часу для цієї діяди має такий вигляд:

$$^{(4)}ds^2 = \omega^2 - \tilde{\omega}^2 - R^2 d\sigma^2 \,, \tag{14}$$

або

$$^{(4)}ds^2 = N^2 (d\tilde{x}^0)^2 - L^2\left(dx^1 - V d\tilde{x}^0\right)^2 - R^2 d\sigma^2 \,. \tag{15}$$

Величина N є інтеґруючим множником, який задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{u_0}{N}\right) - \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{u_1}{N}\right) = 0 \,. \tag{16}$$

Якщо функція N визначена, то метрику (15) у системі координат (СК) $\{\tilde{x}^0,\, R\}$ можна записати так:

$$\begin{aligned} ^{(4)}ds^2 &= N^2 (d\tilde{x}^0)^2 \\ &- \frac{|\,\gamma\,|}{u_0^2}\left(dx^1 + N u^1 d\tilde{x}^0\right)^2 - R^2 d\sigma^2. \end{aligned} \tag{17}$$

Нехай тепер СВ реалізована множиною вільних пробних частинок (геодезичний рух). Тоді векторне поле u^μ задовольняє рівняння геодезичних [6] $Du^\mu/^{(4)}ds = u^\mu_{;\nu} u^\nu = 0$, де символ “$_{;\,\nu}$” позначає коваріянтну похідну за координатою x^ν щодо метрики $g_{\mu\nu}$. Оскільки СВ узгоджена зі сферичною симетрією, то ці рівняння редукуються до двовимірних:

$$Du^a/^{(2)}ds = \ u^a_{;\,b} u^b = 0 \,, \tag{18}$$

де символ “$_{;\,b}$” позначає коваріянтну похідну щодо γ_{ab}. У цьому випадку *1*-форма ω є локально точною, тобто $\omega = d\psi$, і маємо перший варіянт СВ. Справді, за визначенням зовнішнього диференціювання маємо

$$d\omega = (u_{a;\,b} - u_{b;\,a}) dx^b \wedge dx^a = \eta\, ^{(2)}\Omega = 0 \,, \tag{19}$$

оскільки

$$^{(2)}\Omega = \sqrt{-\gamma} dx^0 \wedge dx^1 \,, \quad dx^b \wedge dx^a = \epsilon^{ab} dx^0 \wedge dx^1 \,, \tag{20}$$

$$\eta = -e^{ab}(u_{a;\,b} - u_{b;\,a}) = -(u^a n^b - u^b n^a) u_{a;\,b} = 0 \,. \tag{21}$$

Отже, можна покласти $\psi = \tau$, де τ — власний час, що “нумерує” гіперповерхні $\tau = \text{const}$. Знайшовши компоненти ковекторного діядного базису, поклавши у (17) $N = 1$ та виконавши заміну $\tilde{x}^0 \to \tau$, отримаємо метрику у СК $\{\tau, R\}$.

2. Розгляньмо приклад. Нехай маємо довільний статичний сферично-симетричний простір-час з метрикою

$$^{(4)}ds^2 = B(dx^0)^2 - G dR^2 - R^2 d\sigma^2 \,, \tag{22}$$

де B і G є функціями просторової координати $x^1 = R$. Нехай також ССВ реалізована множиною вільних пробних частинок. За умовою цей простір-час допускає вектор Кілінґа $\xi = \partial/\partial x^0$, який задовольняє рівняння Кілінґа [4] $\mathcal{L}_\xi\ g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\,\nu} + \xi_{\nu;\,\mu} = 0$, де $\mathcal{L}_\xi$ позначає похідну Лі вздовж вектора ξ. Тому маємо закон збереження

$$\varepsilon = \xi^a\ u_a = u_0 \,, \tag{23}$$

де $\varepsilon = u_0$ має зміст повної енерґії частинки, що віднесена до одиниці маси.

Уведімо лаґранжеву координату r, яка зберігається й параметризує сім'ю геодезичних. За визначенням вона задовольняє рівняння

$$dr/^{(2)}ds = u^a\, r_{,\,a} = 0. \tag{24}$$

Оскільки $d\varepsilon/^{(2)}ds = 0$, то звідси випливає, що $\varepsilon = \varepsilon(r)$. Якщо функція $\varepsilon(r)$ відома, то тим самим ССВ задано, бо задача зводиться до побудови “супутньої” векторної $\{\mathbf{u}\,, \mathbf{n}\}$ (або ковекторної $\{\omega\,, \widetilde{\omega}\}$) діяди за заданою $\varepsilon(r)$ для множини вільних пробних частинок.

Використовуючи (22), (23) та умови нормування (2), отримуємо:

$$u_1 = \sqrt{\frac{G}{B}\left(\varepsilon^2(r) - B\right)} \,, \tag{25}$$

$$u^0 = \frac{\varepsilon(r)}{B} \,, \qquad u^1 = -\sqrt{\frac{\varepsilon^2(r) - B}{BG}} \,. \tag{26}$$

Оскільки $\sqrt{-\gamma} = \sqrt{BG}$, то за допомогою (5) і (6) знаходимо

$$n_0 = -\sqrt{\varepsilon^2(r) - B}\,, \qquad n_1 = -\varepsilon(r)\sqrt{G/B}\,, \tag{27}$$

$$n^0 = -\frac{\sqrt{\varepsilon^2(r) - B}}{B}\,, \qquad n^1 = \frac{\varepsilon(r)}{\sqrt{BG}}\,. \tag{28}$$

Таким чином, шукані вектори й ковектори діяди мають вигляд:

$$\mathbf{u} = \frac{\varepsilon(r)}{B}\,\partial_0 - \sqrt{\frac{\varepsilon^2(r) - B}{BG}}\,\partial_R, \tag{29}$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\sqrt{\varepsilon^2(r) - B}}{B}\,\partial_0 + \frac{\varepsilon(r)}{\sqrt{BG}}\,\partial_R, \tag{30}$$

$$\omega = \varepsilon(r)\,dx^0 + \sqrt{\frac{G}{B}\Big(\varepsilon^2(r) - B\Big)}\,dR, \tag{31}$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\varepsilon^2(r) - B}\,dx^0 + \varepsilon(r)\sqrt{\frac{G}{B}}\,dR. \tag{32}$$

Далі, враховуючи (11), (12) та (13), а також те, що *1*-форма ω є локально точною, отримуємо

$$\omega = d\tau\,, \quad \tilde{\omega} = \frac{\sqrt{GB}}{\varepsilon(r)}\Big(dR - V\,d\tau\Big)\,, \tag{33}$$

$$V = \sqrt{\frac{\varepsilon^2(r) - B}{GB}}\,. \tag{34}$$

Отже, у побудованій СК $\{\tau,\, R\}$ метрика (22) набирає вигляду

$$^{(4)}ds^2 = d\tau^2 - \frac{GB}{\varepsilon^2(r)}\Big(dR - Vd\tau\Big)^2 - R^2(\tau, r)d\sigma^2. \tag{35}$$

Вона належить до класу метрик, які мають форму

$$^{(4)}ds^2 = d\tau^2 - L^2(dR - Vd\tau)^2 - R^2d\sigma^2\,, \tag{36}$$

і описують неортогональні вільно падаючі СВ. Метрика (35) має квазістаціонарний вигляд, а її метричні коефіцієнти залежать тільки від лаґранжевої змінної та координатного радіуса. Часову еволюцію знаходимо розв‘язком задачі Коші для диференціяльного рівняння (24), яке тепер має форму

$$\frac{dr}{^{(2)}ds} = \frac{\varepsilon(r)}{B}\frac{\partial r}{\partial x^0} + V\frac{\partial r}{\partial R} = 0\,, \tag{37}$$

що еквівалентно знаходженню функції $R(\tau, r)$ з рівняння

$$dR/d\tau = V(r,\, R)\,. \tag{38}$$

Для переходу до синхронної СК покладімо $\tilde{\omega} = \tilde{f}d\tilde{\phi}$, де $\tilde{f}$ і $\tilde{\phi}$ — деякі функції. Умови взаємности (2) дають: $\tilde{\omega}(\mathbf{u}) = \tilde{f}(\mathbf{u}\cdot\tilde{\phi}) = \tilde{f}d\tilde{\phi}/^{(2)}ds = 0$. Звідси бачимо, що за $\tilde{\phi}$ можна обрати лаґранжеву координату r, і метрика набирає вигляду

$$^{(4)}ds^2 = d\tau^2 - \tilde{f}^2dr^2 - R^2d\sigma^2\,. \tag{39}$$

Оскільки в новій СК $R = R(\tau, r)$, то $dR = R_\tau d\tau + R_r dr$, де $R_\tau = \partial R/\partial\tau$, $R_r = \partial R/\partial r$. Далі, з урахуванням (33) та (38), знаходимо

$$\tilde{\omega} = \tilde{f}dr = \frac{\sqrt{GB}}{\varepsilon}\Big((R_\tau - V)d\tau + R_r dr\Big) = \frac{\sqrt{GB}}{\varepsilon}R_r dr\,, \tag{40}$$

звідки випливає, що

$$\tilde{f} = \frac{\sqrt{GB}}{\varepsilon(r)}R_r\,. \tag{41}$$

Отже, ми перейшли до синхронних координат $\{\tau\,, r\}$, у яких квадрат інтервалу буде таким:

$$^{(4)}ds^2 = d\tau^2 - \frac{GB}{\varepsilon(r)}R_r^2dr^2 - R^2(\tau\,, r)d\sigma^2\,. \tag{42}$$

3. Третій варіянт класифікації (4) пов'язаний із наявністю додаткової *1*-форми β (наприклад, коли відома додаткова взаємодія, яка описується цією *1*-формою). Як приклад, розгляньмо метрику Рейснера–Нордстрема, яка в координатах кривин має вигляд [7]

$$^{(4)}ds^2 = FdT^2 - F^{-1}dR^2 - R^2d\sigma^2\,, \tag{43}$$

$$F = 1 - 2M/R + Q^2/R^2\,, \tag{44}$$

де M та Q — відповідно маса та заряд центрального об'єкта. Крім цього, задано електричне поле з потенціялом

$$A = A_0dT = \frac{Q}{R}\,dT\,. \tag{45}$$

Для цієї метрики існують дві природні СВ: перша пов'язана з вільно падаючими нейтральними частинками, а друга реалізована множиною заряджених пробних частинок. У першому випадку слід застосувати формули (33), (34) і (35), враховуючи вигляд функцій B та G для метрики (43), внаслідок чого отримуємо

$$\omega = d\tau\,, \qquad \widetilde{\omega} = \varepsilon(r)^{-1}\Big(dR - Vd\tau\Big)\,, \tag{46}$$

$$V = \sqrt{\varepsilon^2(r) - F}\,, \tag{47}$$

$$^{(4)}ds^2 = d\tau^2 - \frac{\Big(dR - \sqrt{\varepsilon^2(r) - 1 + 2M/R - Q^2/R^2}\,d\tau\Big)^2}{\varepsilon^2(r)} - R^2(\tau, r)\,d\sigma^2. \tag{48}$$

Залежність метрики від часу знаходимо розв'язуванням задачі Коші (24), (37) або (38) для лаґранжевої змінної r, де V визначено в (47). Метрика (48) записана в кінеметричній калібровці [2, 3], вона має квазістаціонарний вигляд та містить інформацію про вільно падаючі нейтральні частинки.

У другому випадку СВ є супутньою до множини заряджених пробних частинок. Поклавши $x^0 = T$ і

$x^1 = R$, для компонент тензора електромагнетного поля, відмінних від нуля, з (45) знаходимо

$$\mathcal{F}_{01} = -A_{0,1} = Q/R^2 \,. \tag{49}$$

Заряджені пробні частинки задовольняють рівняння руху $mu_{\mu;\,\nu}u^\nu = q\mathcal{F}_{\mu\nu}u^\nu$, які для сферично-симетричних полів зводяться до двовимірних рівнянь

$$u_{a;\,b}u^b = \alpha\mathcal{F}_{ab}u^b \,. \tag{50}$$

Тут $\alpha = q/m$, q — заряд, m — маса частинки. З урахуванням (9) і (49) маємо

$$u_{a;\,b}u^b = \frac{\mathcal{D}u_a}{{}^{(2)}ds} = \alpha\mathcal{F}_{ab}u^b = \alpha\frac{Q}{R^2}\,e_{ab}u^b = \alpha\frac{Q}{R^2}\,n_a \,. \tag{51}$$

Далі, ураховуючи (9), (23) і рівняння Кілінґа, отримуємо

$$\frac{d\varepsilon}{{}^{(2)}ds} = \xi_a\frac{\mathcal{D}u^a}{{}^{(2)}ds} = \alpha\frac{Q}{R^2}\,\xi^a n_a = \alpha\frac{Q}{R^2}\,n_0 = \alpha\frac{Q}{R^2}\,u^1 \,. \tag{52}$$

Оскільки $u^1 = \mathbf{u}R = dR/{}^{(2)}ds$, то звідси випливає, що

$$\mathbf{u}\left(\varepsilon + \alpha\frac{Q}{R}\right) = \frac{d}{{}^{(2)}ds}\left(\varepsilon + \alpha\frac{Q}{R}\right) = 0 \,. \tag{53}$$

Тому величина

$$\varepsilon_q(r) = \varepsilon + \alpha\frac{Q}{R} \tag{54}$$

залежить тільки від лаґранжевої змінної і визначає закон збереження. Аналогічно до виведення формул (19) та (21), рівняння (51) перепишемо так:

$$d\omega = -\alpha\frac{Q}{R^2}\,{}^{(2)}\Omega \,. \tag{55}$$

Оскільки $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{ab}dx^a \wedge dx^b = \mathcal{F}_{01}dx^0 \wedge dR = dA$ [8,9], то це рівняння, з урахуванням (49), зводиться до співвідношення $d\omega = -\alpha dA$. Звідси випливає умова замкнености

$$d(\omega + \alpha A) = d\left(\omega + \alpha\frac{Q}{R}\,dx^0\right) = 0 \,, \tag{56}$$

тобто, *1*-форма $(\omega + \alpha A)$ є локально точною і маємо третій варіант класифікації:

$$\omega = f d\phi + d\psi = -\alpha\frac{Q}{R}\,dx^0 + d\psi = -\alpha A + d\psi \,, \tag{57}$$

де $\phi = x^0$, $f = -\alpha Q/R$. Покладімо калібрувальну умову $\psi = t$, де t — нова часова координата. Зробивши у (31)–(32) заміну $B \to F$, $G \to F^{-1}$ та $\varepsilon(r) \to \varepsilon$, ковекторний базис запишемо так

$$\begin{aligned} \omega &= \left(1 - \frac{\alpha Q}{\varepsilon_q(r)R}\right)dt + \frac{\alpha Q\sqrt{\varepsilon^2 - F}}{\varepsilon_q(r)RF}\,dR \\ &= dt - \alpha\tilde{A} \,, \end{aligned} \tag{58}$$

$$\widetilde{\omega} = -\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - F}}{\varepsilon_q(r)}dt + \frac{1}{\varepsilon_q(r)}\left(1 + \frac{\alpha Q\varepsilon}{RF}\right)dR \,, \tag{59}$$

де

$$\tilde{A} = -\frac{Q}{\varepsilon_q(r)R}\left(dt - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - F}}{F}\right)dR \,, \tag{60}$$

функцію F визначаємо формулою (44), а ε знаходимо з (54). У цьому випадку метрику (43) можна записати у формі (14), де ω і $\tilde{\omega}$ визначаємо за формулами (58) і (59). Використовуючи хронометричну та кінеметричну калібровки [1–3], її можна записати так:

$${}^{(4)}ds^2 = \frac{F}{\varepsilon_q^2(r)}\left(dt^2 + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - F}}{F}dR\right)^2 - \frac{dR^2}{F} - R^2 d\sigma^2 \,, \tag{61}$$

$${}^{(4)}ds^2 = N^2 dt^2 - \frac{1}{N^2\varepsilon_q^2(r)}\left(dR - N^2\sqrt{\varepsilon^2 - F}\,dt\right)^2 - R^2 d\sigma^2 \,, \tag{62}$$

де

$$N^2 = \frac{F}{\varepsilon_q^2(r) - \varepsilon^2 + F} \,. \tag{63}$$

Відзначимо, що векторний потенціял A в (45) задано у статичній СВ, тоді як векторний потенціял того ж поля $\tilde{A}$ у (60) задано в ССВ.

Для інтерпретації побудованої СВ розгляньмо умову нормування у вигляді скалярного добутку ковекторів $\langle\omega, \omega\rangle = 1$. З урахуванням (58) її можна переписати у вигляді $\langle dt - \alpha A, dt - \alpha A\rangle = 1$. Після заміни $t = -S/m$ це рівняння зводиться до рівняння Гамільтона–Якобі [6] для зарядженої частинки, що рухається у ґравітаційному та електромагнетному полях

$$\langle dS - qA, dS - qA\rangle = m^2 \,, \tag{64}$$

з ковектором узагальненого імпульсу $P = -dS = p + qA = m\,dt$, де p —ковектор звичайного імпульсу частинки. Ми бачимо, що гіперповерхні одночасності $t = \mathrm{const}$ збігаються з гіперповерхнями сталої дії

$S = \mathrm{const}$ заряджених частинок, а метрика (62) у кінематичній калібровці записана в СВ, яка є супутньою для узагальненого імпульсу.

Наостанок розгляньмо СК, які пов'язані з вибором вектора ∂_R та ковектора dr як основних вихідних взаємних величин. У цьому випадку ми маємо

$$\mathbf{u} = \tilde{B}^{-1}\partial_R\,, \qquad \tilde{\omega} = \tilde{G}dr\,, \tag{65}$$

де $\tilde{G}$, $\tilde{B}$ — нормувальні функції R та r. Відповідні взаємні до $\mathbf{u}$ та $\tilde{\omega}$ ковектор і вектор діяди визначені з точністю до сталої функції W так, що

$$\omega = \tilde{B}(dR - Wdr)\,, \qquad \mathbf{n} = \tilde{G}^{-1}\partial_r + W\partial_R\,. \tag{66}$$

Функцію W обираємо з умов (2) і з того, щоб метрика мала вигляд (14). Беручи до уваги (14), метрику $V^{(4)}$ можна записати так:

$$^{(4)}ds^2 = \tilde{B}^2(dR - Wdr)^2 - \tilde{G}^2dr^2 - R^2d\sigma^2\,. \tag{67}$$

Слід зауважити, що в цьому разі обидві координати R і r є просторовими. Ця СК є допустимою в ділянках, де сиґнатурні умови $\gamma = -\tilde{B}^2\tilde{G}^2 < 0$ не порушуються.

Отже, у роботі в термінах зовнішніх форм прокласифіковано ССВ для статичних сферично-симетричних просторів у ЗТВ і побудовано відповідні метрики. Зазначено, що побудова конкретної СВ пов'язана з вибором СК. У нашому розпорядженні є просторові координати: $x^1 = R$, яка має зрозумілий фізико-геометричний зміст, і r, що має зміст лаґранжевої координати, а також часові координати: власний час τ і координатний час t, який для метрики Рейснера–Нордстрема можна обрати пропорційним до дії частинки S. Побудовані за допомогою цих координат супутній базис та ССВ дають змогу природно описувати сферично-симетричні простори ЗТВ.

---

[1] А. Л. Зельманов, Докл. Акад. наук СССР **107**, № 6, 815 (1956).

[2] А. Л. Зельманов, В. Г. Агаков, *Элементы общей теории относительности* (Наука, Москва, 1989).

[3] Ю. С. Владимиров, *Системы отсчета в теории гравитации* (Энергоиздат, Москва, 1982).

[4] Д. Крамер, Х. Штефани, Э. Херльт, М. Мак-Маллум, *Точные решения уравнений Эйнштейна*, под ред. Э. Шмутцера (Энергоиздат, Москва, 1982).

[5] V. P. Frolov, I. D. Novikov, *Black hole Physics: Basic Concepts and New Developments* (Kluwer Academic, Dordrecht, Netherlands, 1998).

[6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 2: Теория поля* (Наука, Москва, 1988).

[7] С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр. Ч. 1* (Мир, Москва, 1985).

[8] Н. В. Мицкевич, А. П. Ефремов, А. И. Нестеров, *Динамика полей в общей теории относительности: Системы отсчета. Законы сохранения. Асимптотическая структура* (Энергоиздат, Москва, 1985).

[9] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация. Т. 1* (Мир, Москва, 1977).

THE SPHERICALLY-SYMMETRIC SYSTEMS OF REFERENCE FOR STATIC SPACES IN GENERAL RELATIVITY

V. D. Gladush[1], M.V. Galadgyi[2]

Department of Physics, Dnipropetrovsk National University,

13 Naurkova St., Dnipropetrovsk, UA–49050, Ukraine.

vgladush@ff.dsu.dp.ua[1], *galadgyi@ff.dsu.dp.ua*[2]

A method of description and construction of spherically-symmetric systems of reference for static spaces in General Relativity is proposed. The classification of comoving systems of reference is constructed and their special cases are considered.