

СТРУКТУРНІ ФУНКЦІЇ РІДКОГО ${}^4\text{He}$ З УРАХУВАННЯМ НЕПРЯМИХ ТРИ- І ЧОТИРИЧАСТИНКОВИХ КОРЕЛЯЦІЙ

І. О. Вакарчук, Р. О. Притула

Кафедра теоретичної фізики

Львівського національного університету імені Івана Франка,

вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна

(Отримано 20 травня 2008 р.)

На основі матриці густини, знайденої у праці [І. О. Vakarchuk, J. Phys. Stud. **8**, 223 (2004)], запропоновано метод розрахунку багаточастинкових структурних факторів бозе-рідини. Із використанням цього підходу обчислено явні вирази для дво-, три- та незвідного чотиричастинкового структурних факторів бозе-рідини в широкотемпературній області в наближенні три- та чотиричастинкових непрямих кореляцій. При високих температурах вирази для структурних факторів переходять у відомі вирази теорії класичних рідин у так званому пост RPA-наближенні, а при низьких температурах дають результат з точністю до перших поправок до теорії Боголюбова. Після усунення інфрачервоних розбіжностей у парному структурному факторі знайдено перенормований спектр вільної частинки. При малих значеннях хвильового вектора $\mathbf{q} \rightarrow 0$ отримано вираз для температурної залежності повної ефективної маси атома ${}^4\text{He}$ у наближенні парних кореляцій та розраховано температуру бозе-айнштайнівської конденсації рідкого гелію-4: $T_c = 2.26$ К. Для доведення результатів до числа як вихідну інформацію, замість потенціалу взаємодії, використано експериментально виміряний структурний фактор рідкого гелію-4, екстрапольований до температури $T \rightarrow 0$. Зроблено чисельні розрахунки структурних факторів, ефективної маси й порівняння при різних температурах парного структурного фактора в наближенні три- і чотиричастинкових непрямих кореляцій із його експериментальним значенням. Виявлено добре узгодження знайдених величин із відповідними експериментальними значеннями.

Ключові слова: рідкий ${}^4\text{He}$, матриця густини, статистична сума, структурний фактор, ефективна маса, температура бозе-айнштайнівської конденсації.

PACS number(s): 05.30.Jp, 67.20.+k, 67.25.bd, 67.40.-w, 67.40.Db, 67.40.Kh

І. ВСТУП

Усю інформацію про термодинамічний стан та структурні функції багаточастинкової системи можна отримати на основі повної матриці густини. Зокрема, важливу інформацію дають структурні фактори, які є середніми від добутку фур'є-зображення густини флуктуації кількості частинок системи. Особливе місце серед структурних факторів посідає парний структурний фактор — єдина на сьогодні величина, яку надійно визначають із експериментів як поперечний диференціальний переріз розсіяння X-променів, електронів чи нейтронів [1–6].

У нашій попередній праці [7] розраховано внутрішню енергію, структурний фактор взаємодіючої бозе-рідини в наближенні парних кореляцій на основі матриці густини, знайденої в наближенні парних кореляцій у [8]. Внески багаточастинкових кореляцій у термодинамічні функції рідини, як відомо, в деяких випадках є значимими [9, 10]. Наближення двох сум за хвильовим вектором пов'язане з урахуванням три- та чотиричастинкових кореляцій [11–13], які мають зв'язок із відповідними структурними факторами. Експерименти з визначення потрібного диференціального перерізу розсіяння технічно є досить складними [14–16]. Інший шлях визначення тричастинкового структурного фактора полягає у розрахунку тричастинкової функції розподілу з використанням су-

перпозиційного наближення Кірквуда. Оскільки тричастинкова функція розподілу є швидко осцилюючою функцією, то часто для тричастинкового структурного фактора використовують конволюційне наближення [17]. Воно дещо ліпше за суперпозиційне наближення у випадку великої густини [18, 19].

Ми розглянемо систему N безспінових взаємодіючих бозе-частинок маси m з координатами $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, які рухаються в об'ємі V . У ролі стартової величини для опису термодинамічних функцій системи візьмемо діагональні елементи матриці густини, обчисленої у праці [8]:

$$R_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \times P_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (1.1)$$

де $R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ — діагональні елементи матриці густини ідеального бозе-газу, а фактор, що враховує взаємодію частинок:

$$P_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = e^U, \quad (1.2)$$

де функція

$$U = c_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \lambda_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}}, \quad (1.3)$$

$$c_0 = \left\{ -\beta E_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \ln \left(\frac{\alpha_{\mathbf{q}} \tanh \left(\frac{\beta E_{\mathbf{q}}}{2} \right)}{\tanh \left(\frac{\beta \varepsilon_{\mathbf{q}}}{2} \right)} \right) \right\}$$

$$+ \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \ln \left(\frac{1 - \exp(-\beta \varepsilon_{\mathbf{q}})}{1 - \exp(-\beta E_{\mathbf{q}})} \right) \Bigg\}, \quad (1.4)$$

$$\lambda_{\mathbf{q}} = \alpha_{\mathbf{q}} \operatorname{th}(\beta E_{\mathbf{q}}/2) - \operatorname{th}(\beta \varepsilon_{\mathbf{q}}/2). \quad (1.5)$$

Крім того, тут уведено такі позначення: $\beta = 1/T$ — обернена температура бозе-газу;

$$\rho_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}$$

— коефіцієнт фур'є-флуктуацій густини кількості частинок; $\varepsilon_{\mathbf{q}} = \hbar^2 q^2 / 2m^*$ — енергія вільної частинки, а m^* — “загравочна” ефективна маса частинки, через яку враховуємо внесок прямих багаточастинкових кореляцій. Поняття ефективної маси для рідкого гелію-4 вперше ввів Файнман [20] у 1953 р. Розрахунок її явного вигляду, очевидно, потребує точного врахування багаточастинкових кореляцій, тому тут величина m^* є параметром теорії. Докладніше обговоримо цю величину нижче в розділі VI.

Наступна величина з (1.4):

$$E_{\mathbf{q}} = \alpha_{\mathbf{q}} \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$$

— це спектр елементарних збуджень Боголюбова, де

$$\alpha_{\mathbf{q}} = \sqrt{1 + \frac{2N}{V} \nu_{\mathbf{q}} \frac{\hbar^2 q^2}{2m}} \quad (1.6)$$

— боголюбівський фактор, а $\nu_{\mathbf{q}}$ — фур'є-образ потенціалу попарної міжчастинкової взаємодії;

$$E_0 = \frac{N(N-1)}{2V} \nu_0 - \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\hbar^2 q^2}{8m} (\alpha_{\mathbf{q}} - 1)^2 \quad (1.7)$$

— це енергія основного стану багатобозонної системи в наближенні Боголюбова [21]. Компоненти хвильового вектора \mathbf{q} набувають цілочисельних значень, кратних до $2\pi/V^{1/3}$, а підсумовування за \mathbf{q} в термодинамічній межі: $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $N/V = \text{const}$, переходить в інтеграл:

$$\sum_{\mathbf{q}} \dots \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} \dots$$

У розділі II запропоновано метод розрахунку статистичної суми й багаточастинкового структурного фактора бозе-рідини. Статистичну суму в наближенні парних, три- та чотиричастинкових непрямих кореляцій подано в розділі III. Вирази для парного, три- та незвідного чотиричастинкового структурного фактора бозе-рідини подано у розділі IV. У розділі V запропоновано метод усунення розбіжностей, що виникають у запропонованій теорії збуджень, через перенормування вільночастинкового спектра. Концепцію ефективної маси розглянуто у розділі VI. У наступному розділі VII зроблено чисельний

розрахунок знайдених багаточастинкових структурних факторів, ефективної маси й температури бозе-айнштайнівської конденсації рідкого гелію-4, а також подано докладне порівняння двочастинкового структурного фактора бозе-рідини з урахуванням три- та чотиричастинкових непрямих кореляцій із експериментальним структурним фактором рідкого ^4He при різних температурах. У розділі VIII зроблено висновки до роботи.

II. СТАТИСТИЧНА СУМА І СТРУКТУРНИЙ ФАКТОР

Використовуючи матрицю густини (1.1), статистичну суму бозе-рідини за означенням запишемо у вигляді:

$$Z_N = \int \dots \int R_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N. \quad (2.8)$$

Перепишемо вираз (2.8) як середнє за матрицею густини ідеального бозе-газу, використавши представлення матриці густини (1.1):

$$Z_N = Z_N^0 e^{c_0} \left\langle e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \lambda_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}}} \right\rangle_0, \quad (2.9)$$

де

$$Z_N^0 = \prod_{\mathbf{q}} (1 - z_0 e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{q}}})^{-1}$$

— статистична сума, z_0 — активність ідеального бозе-газу.

Далі запишемо вираз у дужках $\langle \dots \rangle_0$ через функціональний інтеграл:

$$e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \lambda_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}}} = \int (d\varphi) e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}} + \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}}} \rho_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}}}, \quad (2.10)$$

тут

$$\int (d\varphi) \equiv \prod'_{\mathbf{q} \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi_{\mathbf{q}}^c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi_{\mathbf{q}}^s}{\sqrt{\pi}},$$

$$\varphi_{\mathbf{q}} = \varphi_{\mathbf{q}}^c + i\varphi_{\mathbf{q}}^s, \quad \varphi_{\mathbf{q}}^c = \varphi_{-\mathbf{q}}^c, \quad \varphi_{\mathbf{q}}^s = -\varphi_{-\mathbf{q}}^s.$$

Штрих біля добутку означає, що беремо до уваги змінні величини $\varphi_{\mathbf{q}}$ з хвильовими векторами \mathbf{q} з будь-якого півпростору можливих його значень. Отже, тепер статистична сума набуде вигляду:

$$Z_N = Z_N^0 e^{c_0} I, \quad (2.11)$$

де функціональний інтеграл I :

$$I = \int (d\varphi) e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}}} \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left[\prod_{i=1}^n \sum_{\mathbf{q}_i \neq 0} \sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_i}} \varphi_{\mathbf{q}_i} \right] M_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \right\}, \quad (2.12)$$

позначення $M_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ — це ланцюжок незвідних середніх від добутку n величин $\rho_{\mathbf{q}}$ [22, 23]. Випишімо декілька незвідних середніх від величин $\rho_{\mathbf{q}}$:

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\mathbf{q}} \rangle_0 &= 0, \\ \langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rangle_0 &= S_0(q), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3} \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3),$$

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle_0 - \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rangle_0 \langle \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle_0 = \frac{1}{N} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2),$$

тут $S_0(q)$, $S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ і $S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2)$ — відповідно парний, три- та незвідний чотиричастинковий структурні фактори ідеального бозе-газу. Задача з розрахунку статистичної суми зводиться тепер до обчислення функціонального інтеграла (2.12), який ми розглянемо в наступному розділі.

Тепер перейдімо до розрахунку середніх від n співмножників величин $\rho_{\mathbf{q}}$:

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \dots \rho_{\mathbf{q}_n} \rangle &= \frac{1}{Z_N} \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \rho_{\mathbf{q}_1} \dots \rho_{\mathbf{q}_n} e^{c_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \lambda_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}}} \\ &= \frac{e^{c_0}}{Z_N} Z_N^0 \left\langle \int (d\varphi) e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}}} \left\{ \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_i}}} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\mathbf{q}_i}} \right\} e^{\sum_{\mathbf{q} \neq 0} \sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}}} \rho_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}}} \right\rangle_0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тут ми утворили середнє за матрицею густини ідеального бозе-газу, а потім використали представлення експоненти за формулою (2.10). Інтегруємо частинами за $\varphi_{\mathbf{q}}$ n раз і “перекидаємо” похідні з одної експоненти на іншу, вільний член при цьому дорівнює нулеві. Далі “протягуємо” праву експоненту крізь похідні, так як це показано в роботі [24]. З урахуванням (2.12) остаточно запишемо середні (2.14):

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \dots \rho_{\mathbf{q}_n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_1}} \dots \sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_n}}} \overline{\left(-\frac{\partial}{\partial \varphi_{\mathbf{q}_1}} + \varphi_{-\mathbf{q}_1} \right) \dots \left(-\frac{\partial}{\partial \varphi_{\mathbf{q}_n}} + \varphi_{-\mathbf{q}_n} \right)}, \quad (2.15)$$

де риска означає таке усереднення:

$$\overline{(\dots)} = \frac{\int (d\varphi) e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}}} \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left[\prod_{i=1}^n \sum_{\mathbf{q}_i \neq 0} \sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_i}} \varphi_{\mathbf{q}_i} \right] M_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \right\} (\dots)}{\int (d\varphi) e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}}} \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left[\prod_{i=1}^n \sum_{\mathbf{q}_i \neq 0} \sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_i}} \varphi_{\mathbf{q}_i} \right] M_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \right\}}. \quad (2.16)$$

Випишімо в явному вигляді декілька середніх від величин $\rho_{\mathbf{q}}$ (2.15):

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rangle &= -\frac{1}{\lambda_{\mathbf{q}}} \left(\overline{\varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}}} - 1 \right), \\ \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_1}} \sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_2}} \sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_3}}} \overline{\varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{\mathbf{q}_2} \varphi_{\mathbf{q}_3}}, \\ \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle &= \frac{1}{\lambda_{\mathbf{q}_1} \lambda_{\mathbf{q}_2}} \quad (2.17) \\ &\times \left\{ \overline{\varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{-\mathbf{q}_1} \varphi_{\mathbf{q}_2} \varphi_{-\mathbf{q}_2}} - \overline{\varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{-\mathbf{q}_1}} - \overline{\varphi_{\mathbf{q}_2} \varphi_{-\mathbf{q}_2}} + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Із формули (2.16) й означення функціонального ін-

теграла (2.12) легко знайти потрібні середні значення від добутку величин $\varphi_{\mathbf{q}}$, через варіаційні похідні:

$$\overline{\varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}}} = -\frac{2}{\lambda_{\mathbf{q}}} \frac{\delta \ln I}{\delta S_0(q)}, \quad (2.18)$$

$$\overline{\varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{\mathbf{q}_2} \varphi_{\mathbf{q}_3}} = \frac{3! \sqrt{N}}{\sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_1}} \sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_2}} \sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_3}}} \frac{\delta \ln I}{\delta S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)},$$

$$\overline{\varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{-\mathbf{q}_1} \varphi_{\mathbf{q}_2} \varphi_{-\mathbf{q}_2}} = \frac{8N}{\lambda_{\mathbf{q}_1} \lambda_{\mathbf{q}_2}} \frac{\delta \ln I}{\delta S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2)}.$$

Отже, тепер задача зводиться до розрахунку функціонального інтеграла I .

III. РОЗРАХУНОК ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ІНТЕГРАЛА I

Обмежимося у формулі (2.12) наближенням парних кореляцій:

$$I_0 = e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \ln[1 + \lambda_{\mathbf{q}} S_0(\mathbf{q})]} \quad (3.19)$$

Тоді статистична сума (2.11) і повний двочастинковий структурний фактор бозе-рідини

$$S(q) = \langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rangle \quad (3.20)$$

в наближенні парних кореляцій:

$$Z_N = Z_N^0 e^{c_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \ln[1 + \lambda_{\mathbf{q}} S_0(\mathbf{q})]}, \quad (3.21)$$

$$S(q) = \frac{S_0(q)}{1 + \lambda_{\mathbf{q}} S_0(q)}.$$

Вирази для статистичної суми й парного структурного фактора бозе-рідини в наближенні парних кореляцій збігаються з відповідними виразами праці [8].

Обчислимо вищі наближення для функціонального інтеграла I . Представимо функціональний інтеграл I як добуток функціонального інтеграла I_0 в наближенні парних кореляцій на функціональний інтеграл I_1 , що враховує вищі наближення:

$$I = I_0 I_1,$$

$$I_1 = \left\langle \exp \left\{ \frac{1}{3!} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3 \neq 0} \left[\prod_{i=1}^3 \sqrt{-\lambda_{\mathbf{q}_i}} \varphi_{\mathbf{q}_i} \right] \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3} \rangle_0 + \dots \right\} \right\rangle_{\varphi}, \quad (3.22)$$

де усереднення за φ означає усереднення за гаусовим розподілом:

$$\langle \dots \rangle_{\varphi} = \frac{\int (d\varphi) e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} |\varphi_{\mathbf{q}}|^2 [1 + \lambda_{\mathbf{q}} S_0(\mathbf{q})]} (\dots)}{\int (d\varphi) e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} |\varphi_{\mathbf{q}}|^2 [1 + \lambda_{\mathbf{q}} S_0(\mathbf{q})]}}.$$

Обмежимося наближенням двох сум за хвильовим вектором для величини I_1 у виразі (3.22). Далі візьмімо незвідні середні, але вже за $\varphi_{\mathbf{q}}$. Оскільки $\langle \varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{\mathbf{q}_2} \varphi_{\mathbf{q}_3} \rangle_{\varphi} = 0$, то в прийнятому нами наближенні в першому порядку величин потрібно враховувати внески від вищого наближення, тобто починаючи від добутку чотирьох $\varphi_{\mathbf{q}}$. У прийнятому наближенні двох сум за хвильовим вектором \mathbf{q} обчислюємо другий порядок величин для функціонального інтеграла I_1 . Далі розраховуємо середні $\langle \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}} \rangle_{\varphi}$ і $\langle (\varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}})^2 \rangle_{\varphi}$. Остаточо запишемо функціональний інтеграл I_1 в наближенні три- і чотиричастинкових непрямих кореляцій так:

$$\begin{aligned} \ln I_1 &= \frac{1}{8N} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \left\{ \prod_{i=1}^2 \frac{\lambda_{q_i}}{1 + \lambda_{q_i} S_0(q_i)} \right\} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) \\ &- \frac{1}{3!} \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1 \neq 0 \\ \mathbf{q}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q}_3 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0}} \left\{ \prod_{i=1}^3 \frac{\lambda_{q_i}}{1 + \lambda_{q_i} S_0(q_i)} \right\} \left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \right]^2 \\ &+ \frac{1}{16N^2} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \left\{ \prod_{i=1}^2 \left[\frac{\lambda_{q_i}}{1 + \lambda_{q_i} S_0(q_i)} \right]^2 \right\} \left[S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) \right]^2 \\ &- \frac{1}{4N^2} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1 \neq 0 \\ \mathbf{q}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q}_3 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0}} \left\{ \prod_{i=1}^2 \left[\frac{\lambda_{q_i}}{1 + \lambda_{q_i} S_0(q_i)} \right]^2 \right\} \frac{\lambda_{q_3}}{1 + \lambda_{q_3} S_0(q_3)} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) \left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Зробимо важливе зауваження. При обчисленні статистичної суми Z_N за формулою (2.11) два останні члени у виразі (3.23) дають у термодинамічній межі ($N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $N/V = \text{const}$) зникаючий внесок — “виживають” тільки перші два доданки. Отже, остаточно статистична сума з (2.11), (3.19)–(3.23):

$$\begin{aligned} Z_N &= Z_N^0 \exp \left\{ c_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \ln[1 + \lambda_{\mathbf{q}} S_0(\mathbf{q})] + \frac{1}{8N} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \left[\prod_{i=1}^2 \frac{\lambda_{q_i}}{1 + \lambda_{q_i} S_0(q_i)} \right] S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!} \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1 \neq 0 \\ \mathbf{q}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q}_3 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0}} \left[\prod_{i=1}^3 \frac{\lambda_{q_i}}{1 + \lambda_{q_i} S_0(q_i)} \right] \left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Однак саме третій і четвертий доданки у (3.23) визначають чотиричастинковий структурний фактор через середнє (2.15) із формул (2.17) і (2.18), якщо обчислювати до виконання термодинамічного граничного переходу. Чотиричастинковий структурний фактор можна визначити по-іншому — вираховуючи середнє $\overline{\varphi_{\mathbf{q}_1}\varphi_{-\mathbf{q}_1}\varphi_{\mathbf{q}_2}\varphi_{-\mathbf{q}_2}}$ через варіаційну похідну другого порядку:

$$\overline{\varphi_{\mathbf{q}_1}\varphi_{-\mathbf{q}_1}\varphi_{\mathbf{q}_2}\varphi_{-\mathbf{q}_2}} = \frac{4}{\lambda_{q_1}\lambda_{q_2}} \frac{1}{I} \frac{\delta^2 I}{\delta S_0(q_1)\delta S_0(q_2)}, \quad (3.25)$$

яку можна обчислити й після процедури термодинамічного граничного переходу. Очевидно, що результати, отримані з (2.18) та (3.25), будуть однаковими.

IV. СТРУКТУРНІ ФАКТОРИ

Із формул (2.17), (2.18), використовуючи (3.23), в термодинамічному граничному переході одержимо вираз для парного структурного фактора бозе-рідини $S(q)$ у наближенні двох сум за хвильовими векторами. Зручніше будувати теорію збурень для оберненого структурного фактора, тобто для коефіцієнта фур'є-величини, яка відома в теорії рідкого стану як пряма кореляційна функція [6,7]. Структура ряду теорії збурень для цієї величини є значно простішою, ніж для структурного фактора. Отже, остаточно

$$S(q) = \frac{S_0(q)}{1 + [\lambda_q + \Pi_q] S_0(q)}, \quad (4.26)$$

де масовий оператор Π_q :

$$\begin{aligned} \Pi_q &= \frac{1}{2N S_0^2(q)} \sum_{\mathbf{q}' \neq 0} \frac{\lambda_{q'}}{1 + \lambda_{q'} S_0(q')} S_0^{(4)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q}') \\ &- \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q}_3 \neq 0 \\ \mathbf{q} + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0}} \left[\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{S_0(q)} \right]^2 \\ &\times \frac{\lambda_{q_2}}{1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)} \frac{\lambda_{q_3}}{1 + \lambda_{q_3} S_0(q_3)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Такий вигляд структурного фактора з величиною Π_q природніший і зручніший для обчислень. Вирази (3.23) – (4.27) при $T \rightarrow 0$ збігаються з відповідними виразами праць [13, 25, 26].

Зробимо означення повних три- та незвідного чотиричастинкових структурних факторів бозе-рідини:

$$S^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \sqrt{N} \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3} \rangle, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} S^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) &= \\ N \{ &\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle - \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rangle \langle \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle \}. \end{aligned}$$

Використовуючи (2.17), (2.18) і (3.23), запишімо явні вирази для цих величин:

$$S^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{[1 + \lambda_{q_1} S_0(q_1)] [1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)] [1 + \lambda_{q_3} S_0(q_3)]}, \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} S^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) &= \frac{1}{[1 + \lambda_{q_1} S_0(q_1)]^2 [1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)]^2} \\ &\times \left\{ S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) - \frac{2\lambda_{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|}}{1 + \lambda_{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|} S_0(|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|)} \left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Виключивши взаємодію ($\alpha_q = 1$) у виразах (4.26), (4.29), ми звичайно одержимо вільночастинкові структурні фактори, які нам також ще потрібно розрахувати.

V. УСУНЕННЯ ІНФРАЧЕРВОНИХ РОЗБІЖНОСТЕЙ

Для розрахунку структурних факторів ідеального бозе-газу використаємо відому техніку вторинного квантування [23, 27, 28]. Унаслідок отримаємо такі вирази для дво-, три- та незвідного чотиричастинкового структурних факторів ідеального бозе-газу:

$$S_0(q) = 1 + 2 \frac{n_0}{N} n_q + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} n_p n_{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|}, \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} S_0^{(3)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q} - \mathbf{q}') &= S_0(q) + S_0(q') + S_0(|-\mathbf{q} - \mathbf{q}'|) - 2 + 2 \frac{n_0}{N} n_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}'} + 2 \frac{n_0}{N} n_{\mathbf{q}} n_{|\mathbf{q} + \mathbf{q}'|} + 2 \frac{n_0}{N} n_{\mathbf{q}'} n_{|\mathbf{q} + \mathbf{q}'|} \\ &+ \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{p}} n_p n_{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|} n_{|\mathbf{p} - \mathbf{q}'|}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$S_0^{(4)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q}') = \frac{2n_0}{N} \left\{ (1 + n_q + n_{q'})^2 (n_{|\mathbf{q} + \mathbf{q}'|} + n_{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|}) + 2n_q n_{q'} \right\} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{p}} n_p (1 + n_p) (n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} n_{|\mathbf{p}-\mathbf{q}'|} + n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}'|}) + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} (1 + n_p) (1 + n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{q}'|}) n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}'|} n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} \\
 & + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} n_p n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{q}'|} (1 + n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}) (1 + n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}'|}),
 \end{aligned}$$

де

$$n_p = \frac{1}{z_0^{-1} e^{\beta \varepsilon_p} - 1} \quad (5.33)$$

— середня кількість бозе-частинок ідеального газу, які мають імпульс, що дорівнює $\hbar \mathbf{q}$, а z_0 — його активність. У виразах (5.30)–(5.32) в кожному середньому n_f хвильовий вектор $\mathbf{f} \neq 0$ і виділено бозе-конденсат n_0 ідеального газу.

Активність z_0 виключаємо з рівняння:

$$\sum_{\mathbf{p}} n_p = N. \quad (5.34)$$

Для розрахунку парного, три- і незвідного чотири-частинкового структурних факторів ідеального бозе-газу ми представляли величини $\rho_{\mathbf{q}}$ через оператори породження і знищення бозе-частинок, а потім проводили так звану процедуру спарювання [23, 27, 28]. Зробимо таке зауваження: щоб отримати правильний результат і уникнути розбіжностей типу $\sim n_0^2/N$, оскільки $n_0 \sim N$, при розрахунку чотиричастинкового структурного фактора ідеального бозе-газу потрібно спочатку виділити явно одиницю і бозе-конденсат із виразу для середнього $\langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}'} \rho_{\mathbf{q}'} \rangle_0$.

При низьких температурах $T \rightarrow 0$ маємо:

$$\begin{aligned}
 S_0(q) & \rightarrow 1, & S_0^{(3)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q} - \mathbf{q}') & \rightarrow 1, \\
 S_0^{(4)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q}') & \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

У виразі (5.32) перейдімо від підсумовування за хвильовим вектором \mathbf{p} до інтегрування. При малих значеннях хвильового вектора $\mathbf{p} \rightarrow 0$ інтеграл у другому доданку для $S_0^{(4)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q}')$ є розбіжним. Справді, на нижній межі при $z_0 = 1$ (або при великих значеннях \mathbf{q} та \mathbf{q}'):

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{p}} n_p (1 + n_p) (n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} n_{|\mathbf{p}-\mathbf{q}'|} + n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}'|}) \\
 & \sim \frac{4}{N} n_q n_{q'} \sum_{\mathbf{p}} n_p (1 + n_p) \sim \frac{2}{\pi^2 \rho} n_q n_{q'} \left(\frac{2m}{\beta \hbar^2} \right)^2 \\
 & \times \int_0^{\infty} dp/p^2 \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Це інфрачервоні розбіжності, такі самі, як у праці [29]. Вони є типовими в теорії фазових переходів і критичних явищ. Тут ми маємо справу з фазовим переходом у надплинний стан рідкого ^4He , зумовлений бозе-айнштайнівською конденсацією, яка виникає в ідеальному бозе-газі в точці $z_0 = 1$.

Ці розбіжності можна усунути перенормуванням спектра вільної частинки. З цією метою запишімо розподіл бозе-частинок із новим спектром так:

$$\bar{n}_p = \frac{1}{\bar{z}^{-1} e^{\beta \bar{\varepsilon}_p} - 1}, \quad (5.36)$$

де $\bar{\varepsilon}_p$ і \bar{z} — відповідно перенормовані спектр вільної частинки й активність. Спектр $\bar{\varepsilon}_p$ виберімо в такому вигляді:

$$\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_p + \Delta_p - \Delta_0, \quad (5.37)$$

де Δ_p — поправка до спектра вільної частинки, яку потрібно визначити. Перенормовану активність \bar{z} виключаємо з рівняння (5.34), де, замість розподілу (5.33), ставимо перенормований розподіл для вільних частинок (5.36).

Розкладаємо (5.36) в ряд за поправкою до спектра Δ_p і в лінійному наближенні маємо:

$$\bar{n}_p(\bar{\varepsilon}_p) = n_p(\varepsilon_p) + \frac{\partial n_p}{\partial \varepsilon_p} \Delta_p. \quad (5.38)$$

Далі запишімо перенормований парний структурний фактор ідеального бозе-газу:

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_0(q) & = 1 + 2 \frac{n_0}{N} n_q + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\mathbf{p} \neq 0 \\ \mathbf{p}+\mathbf{q} \neq 0}} \bar{n}_p \bar{n}_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} \\
 & = S_0(q) + \Delta S_0(q),
 \end{aligned} \quad (5.39)$$

де поправка

$$\Delta S_0(q) = \frac{2}{N} \sum_{\substack{\mathbf{p} \neq 0 \\ \mathbf{p}+\mathbf{q} \neq 0}} \frac{\partial n_p}{\partial \varepsilon_p} n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} \Delta_p. \quad (5.40)$$

У прийнятому тут наближенні достатньо враховувати наближення однієї суми за хвильовим вектором \mathbf{p} . У цьому ж наближенні:

$$\frac{1}{\bar{S}_0(q)} = \frac{1}{S_0(q)} - \frac{\Delta S_0(q)}{S_0^2(q)}. \quad (5.41)$$

Запишімо обернений парний структурний фактор бозе-рідини (4.26) з урахуванням (5.41) так:

$$\frac{1}{S(q)} = \frac{1}{\bar{S}_0(q)} + \lambda_q + \Pi_q + \frac{\Delta S_0(q)}{S_0^2(q)}. \quad (5.42)$$

Використаємо явний вираз для Π_q (4.27), виділивши окремо збіжні доданки з (5.32):

$$\frac{1}{S(q)} = \frac{1}{\bar{S}_0(q)} + \lambda_q + \bar{\Pi}_q + \frac{1}{\bar{S}_0^2(q)} \frac{2}{N} \sum_{\substack{\mathbf{p} \neq 0 \\ \mathbf{p} + \mathbf{q} \neq 0 \\ \mathbf{p} + \mathbf{q}' \neq 0}} \bar{n}_p (1 + \bar{n}_p) \bar{n}_{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|} \left[\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}' \neq 0} \frac{\lambda_{q'}}{1 + \lambda_{q'} \bar{S}_0(q')} \bar{n}_{|\mathbf{p} + \mathbf{q}'|} - \beta \Delta_p \right], \quad (5.43)$$

де $\bar{\Pi}_q$ — це величина (4.27), з якої вилучені розбіжні доданки:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_q = & -\frac{1}{2N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q}_3 \neq 0 \\ \mathbf{q} + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0}} \sum_{\mathbf{q}' \neq 0} \left[\frac{\bar{S}_0^{(3)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{\bar{S}_0(q)} \right]^2 \frac{\lambda_{q_2}}{1 + \lambda_{q_2} \bar{S}_0(q_2)} \frac{\lambda_{q_3}}{1 + \lambda_{q_3} \bar{S}_0(q_3)} \\ & + \frac{1}{\bar{S}_0^2(q)} \frac{n_0}{N} \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q}' \neq 0} \frac{\lambda_{q'}}{1 + \lambda_{q'} \bar{S}_0(q')} \left\{ \bar{n}_{|\mathbf{q} + \mathbf{q}'|} (1 + \bar{n}_q + \bar{n}_{q'})^2 + \bar{n}_q \bar{n}_{q'} \right\} \\ & + \frac{1}{2\bar{S}_0^2(q)} \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{q}' \neq 0} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\lambda_{q'}}{1 + \lambda_{q'} \bar{S}_0(q')} \left\{ \bar{n}_{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|} \bar{n}_{|\mathbf{p} + \mathbf{q}'|} (1 + \bar{n}_p) (1 + \bar{n}_{|\mathbf{p} + \mathbf{q}'|}) \right. \\ & \left. + \bar{n}_p \bar{n}_{|\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{q}'|} (1 + \bar{n}_{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|}) (1 + \bar{n}_{|\mathbf{p} + \mathbf{q}'|}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Тут усюди, замість розподілу частинок n_f (5.33), можна ставити перенормований розподіл \bar{n}_f (5.36), оскільки це не виводить нас за межі прийнятого наближення. Ще раз нагадаємо, що у двох останніх доданках виразу (5.44) в кожному середньому \bar{n}_f хвильовий вектор $\mathbf{f} \neq 0$. Риски над величинами означають, що вони записані через перенормований розподіл бозе-частинок (5.36).

Невідому величину Δ_p знаходимо з умови усунення інфрачервоних розбіжностей, які виявляє останній доданок у (5.43), тобто з умови рівності нулевій квадратної дужки:

$$\Delta_p = \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{q}' \neq 0} \frac{\lambda_{q'}}{1 + \lambda_{q'} \bar{S}_0(q')} \bar{n}_{|\mathbf{p} + \mathbf{q}'|}. \quad (5.45)$$

Ми отримали рівняння інтегрального типу на визначення Δ_p . При виключенні взаємодії ($\alpha_{q'} = 1$) поправка до спектра $\Delta_p = 0$, $\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_p$, а активність $\bar{z} = z_0$. Оскільки при $T = 0$, $\Delta_p = 0$, то Δ_p є тільки температурною поправкою до спектра енергії ε_p , яка дає змогу додатково зсунути температуру бозе-айнштайнівської конденсації ідеального газу з ефективною масою частинки m^* .

Тепер, урахувавши (5.45), парний структурний фактор бозе-рідини остаточно запишемо так:

$$S(q) = \frac{\bar{S}_0(q)}{1 + [\lambda_q + \bar{\Pi}_q] \bar{S}_0(q)}. \quad (5.46)$$

VI. КОНЦЕПЦІЯ ЕФЕКТИВНОЇ МАСИ

У границі низьких температур $T \rightarrow 0$ вираз для “затравочної” ефективної маси m^* визначаємо таким рівнянням [30]:

$$\frac{m}{m^*} = 1 - \frac{1}{3N} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{(\alpha_q - 1)^2}{\alpha_q (\alpha_q + 1)}. \quad (6.47)$$

При $T \rightarrow 0$ вираз для λ_q (1.5) набуде вигляду $\lambda_q = \alpha_q - 1$. Далі перепишемо вираз для “затравочної” ефективної маси (6.47) через λ_q при $T \rightarrow 0$:

$$\frac{m}{m^*} = 1 - \frac{1}{3N} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\lambda_q^2}{(1 + \lambda_q)(2 + \lambda_q)}. \quad (6.48)$$

Припустимо, що в такому записі ця формула працює і при $T \neq 0$ з $\lambda_q = \lambda_q(T)$ (1.5), але в λ_q у другому доданку, замість “затравочної” маси, стоїть “гола” маса.

Вираз (5.37) можна записати так:

$$\bar{\varepsilon}_p = \frac{\hbar^2 p^2}{2\bar{m}(p)}, \quad (6.49)$$

де величину $\bar{m}(p)$ трактуємо як повну ефективну масу частинки, залежну від хвильового вектора \mathbf{p} . Такий вигляд спектра $\bar{\varepsilon}_p$ був запропонований у праці [29] для усунення інфрачервоних розбіжностей. Зрозуміло, що нас цікавитиме поведінка $\bar{m}(p)$ при $\mathbf{p} \rightarrow 0$, і під повною ефективною масою будемо розуміти величину $\bar{m} = \bar{m}(0)$. У зв'язку з цим докладніше розглянемо різницю $\Delta_p - \Delta_0$ при $\mathbf{p} \rightarrow 0$.

Перепишемо вираз для Δ_p (5.45) через оператор трансляції, що зміщує аргумент функції \bar{n}_q на хвильовий вектор \mathbf{p} :

$$\Delta_p = \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\lambda_q}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} e^{\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{q}}} \bar{n}_q. \quad (6.50)$$

Тут із дотриманою точністю можна, замість величин z_0 , ε_q , ставити \bar{z} , $\bar{\varepsilon}_q$, і тоді маємо рівняння на $\bar{\varepsilon}_p$, тобто

в цих виразах залишаємо величини з рисками, а при чисельних обрахунках можна брати до уваги нульове наближення.

Далі у виразі (6.50) розкладаємо операторну експоненту $e^{\mathbf{p}\nabla_{\mathbf{q}}}$ в ряд за степенями хвильового вектора \mathbf{p} , обмежуючись квадратичними членами, і після дії оператором $\nabla_{\mathbf{q}}$ на n_q та інтегрування за кутами:

$$\Delta_p - \Delta_0 = \varepsilon_p F(T),$$

де функція

$$F(T) = \frac{1}{2\pi^2\rho} \int_0^\infty q^2 dq \frac{\lambda_q}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} \bar{n}_q \times (1 + \bar{n}_q) \left[\frac{2}{3} \beta \varepsilon_q (1 + 2\bar{n}_q) - 1 \right]. \quad (6.51)$$

Цей інтеграл у точці $\bar{z} = 1$ є збіжним на нижній межі, оскільки $\lambda_q = mc^2/T$ при $\mathbf{q} \rightarrow 0$, а структурний фактор ідеального бозе-газу $S_0(q)$ при малих значеннях хвильового вектора \mathbf{q} має особливість $\sim 1/q^2$. Отже, до $F(T)$ через $\bar{S}_0(q)$ та \bar{n}_q знову входить величина $\bar{\varepsilon}_q$, яку можна брати в наближенні повної ефективної маси $\bar{\varepsilon}_q = \hbar^2 q^2 / 2\bar{m}$. Маємо рівняння, яке можна розв'язувати методом ітерацій. При малих значеннях \mathbf{p} перенормований спектр вільної частинки (5.37) запишемо так:

$$\bar{\varepsilon}_p = \frac{\hbar^2 p^2}{2\bar{m}}, \quad \frac{m^*}{\bar{m}} = 1 + F(T). \quad (6.52)$$

При $T \rightarrow 0$ функція $F(T) \rightarrow 0$, як це видно з (6.51) і відношення $m^*/\bar{m} = 1$. При $T \rightarrow \infty$ також функція $F(T) \rightarrow 0$, і маємо $m^*/\bar{m} = 1$, як і повинно бути. Із означення "затравочної" ефективної маси m^* (6.48) випливає, що при високих температурах $m^* \rightarrow m$, і отримуємо, що $\bar{m} \rightarrow m$.

Враховуючи вирази (6.48) і (6.52), остаточно запишемо вираз для повної ефективної маси так:

$$\frac{m}{\bar{m}} = [1 + F(T)] \left[1 - \frac{1}{3N} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\lambda_q^2}{(1 + \lambda_q)(2 + \lambda_q)} \right]. \quad (6.53)$$

Виключивши взаємодію ($\alpha_q = 1$) у виразі (6.53) і врахувавши (1.5) і (6.51), бачимо, що $m/\bar{m} = 1$.

Оскільки, в межі низьких і високих температур вираз для повної ефективної маси (6.53) дає правильні результати, то можна сподіватися на добру поведінку й у широкотемпературній ділянці.

VII. ЧИСЕЛЬНІ РОЗРАХУНКИ

Для проведення чисельних розрахунків знайдених виразів для рідкого гелію-4 використаємо як вихідну інформацію, замість коефіцієнта фур'є-енергії парної взаємодії між частинками $\nu_{\mathbf{q}}$, експериментально виміряний структурний фактор рідкого гелію-4 $S^{\text{exp}}(q)$, екстрапольований до температури $T \rightarrow 0$.

Враховуючи, що при $T \rightarrow 0$ структурний фактор ідеального бозе-газу $S_0(q) \rightarrow 1$, $S(q)$, у формулі (4.26) заміняємо на експериментальний структурний фактор $S^{\text{exp}}(q)$, а з (1.5) $\lambda_q \rightarrow \alpha_q - 1$, то у низькотемпературній межі з формули (4.26) знаходимо:

$$\alpha_q = \frac{1}{S^{\text{exp}}(q)} + \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q}_3 \neq 0 \\ \mathbf{q} + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0}} \left(1 - \frac{1}{\alpha_{q_2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\alpha_{q_3}}\right). \quad (7.54)$$

Це рівняння для величини α_q при відомому $S^{\text{exp}}(q)$. Усі інші величини можна переписати лише через α_q .

Чисельні розрахунки ми проводили при рівноважній густині гелію $\rho = 0.02185 \text{ \AA}^{-3}$, масі частинки $m = 4.0026$ а.о.м., швидкості звуку $c = 238.2$ м/с у границі $T \rightarrow 0$ [3] і критичній температурі ідеального бозе-газу $T_c = 3.138$ К. Експериментальний структурний фактор рідкого ^4He , екстрапольований до $T = 0$, беремо з праці [33].

Розглянемо спочатку тричастинковий структурний фактор ідеального бозе-газу. З метою спрощення комп'ютерних розрахунків для тричастинкового структурного фактора використаємо конволюційне наближення (факторизацію в імпульсному просторі) [17]:

$$S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3). \quad (7.55)$$

А для того, щоб бачити, як воно працює, виконаємо чисельний розрахунок точного виразу для деяких значень \mathbf{q} , \mathbf{q}' . На рис. 1 подано графічно порівняння точного виразу (5.31) і конволюційного наближення (7.55) для тричастинкового структурного фактора ідеального газу при фіксованому хвильовому векторі \mathbf{q} , температурі T і кутів θ між векторами \mathbf{q} і \mathbf{q}' . Із рисунка бачимо, що конволюційне наближення для тричастинкового структурного фактора ідеального бозе-газу порівняно з точним виразом є добрим.

Перепишемо незвідний чотиричастинковий структурний фактор ідеального бозе-газу (5.32) із урахуванням виразів (5.36), (5.45) і виразимо його через дво- та тричастинковий структурні фактори ідеального бозе-газу (5.30), (5.31):

$$\begin{aligned} \bar{S}_0^{(4)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q}') &= 2 \frac{n_0}{N} [\bar{n}_{|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|} + \bar{n}_{|\mathbf{q}+\mathbf{q}'|}] [\bar{n}_q(1 + \bar{n}_q) + \bar{n}_{q'}(1 + \bar{n}_{q'})] + \bar{S}_0^{(3)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q} - \mathbf{q}') \\ &+ \bar{S}_0^{(3)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q} - \mathbf{q}') - 2\bar{S}_0(q) - 2\bar{S}_0(q') + 2 + \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{p}} \bar{n}_p \bar{n}_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} \bar{n}_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}'|} \bar{n}_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{q}'|}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Для спрощення чисельних розрахунків у виразі (7.56) зробимо наближення за кількістю чисел заповнення

\bar{n}_p , обмежуючись добутком трьох $\bar{n}_p \bar{n}_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} \bar{n}_{|\mathbf{p}-\mathbf{q}'|}$:

$$\begin{aligned} \bar{S}_0^{(4)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q}') &= 2 \frac{n_0}{N} \left[\bar{n}_q (1 + \bar{n}_q) \bar{n}_{|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|} + \bar{n}_{q'} (1 + \bar{n}_{q'}) \bar{n}_{|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|} + \bar{n}_q (1 + \bar{n}_q) \bar{n}_{|\mathbf{q}+\mathbf{q}'|} + \bar{n}_{q'} (1 + \bar{n}_{q'}) \bar{n}_{|\mathbf{q}+\mathbf{q}'|} \right] \\ &+ \bar{S}_0^{(3)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q} - \mathbf{q}') + \bar{S}_0^{(3)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q} - \mathbf{q}') + 2 - 2\bar{S}_0(q) - 2\bar{S}_0(q'). \end{aligned} \quad (7.57)$$

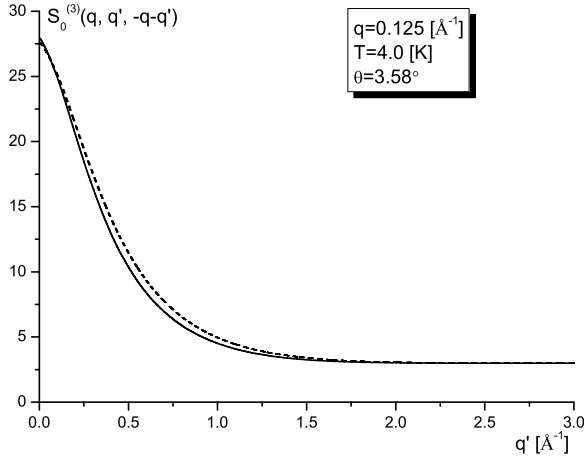


Рис. 1. Порівняння точного тричастинкового структурного фактора ідеального газу (5.31) із його конволюційним наближенням (7.55) у наближенні однієї суми за хвильовим вектором. Суцільна лінія — точний вираз, штрихована — конволюційне наближення.

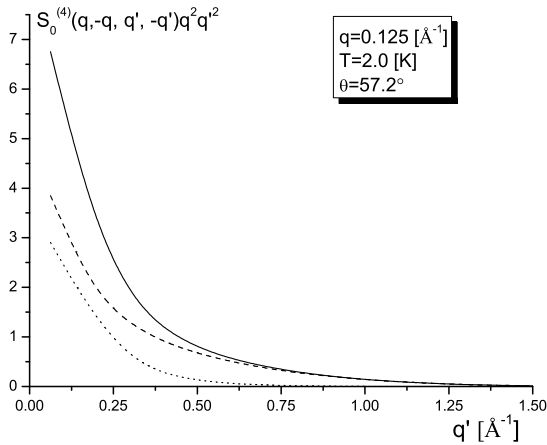


Рис. 2. Порівняння точного (7.56) і наближеного (7.57) незвідних чотиричастинкових структурних факторів ідеального газу в наближенні однієї суми за хвильовим вектором. Суцільна лінія — точний вираз (7.56), штрихована — наближення (7.57), крапки — останній доданок у формулі (7.56) (для зручності ілюстрації кривих замість величини $S_0^{(4)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q}')$ використано $S_0^{(4)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q}')q^2q'^2$).

Щоб побачити, як працює це наближення, проведено порівняння точного виразу (7.56) із наближеним (7.57). Чисельні розрахунки зробили в наближенні однієї суми за хвильовим вектором, при фіксованому хвильовому векторі \mathbf{q} , температурі T , кутів θ між хвильовими векторами \mathbf{q} і \mathbf{q}' . Тричастинковий структурний фактор ідеального газу використовуємо в кон-

волюційному наближенні (7.55). Із рис. 2 бачимо, що таке наближення є достатньо добрим для незвідного чотиричастинкового структурного фактора ідеально-го бозе-газу.

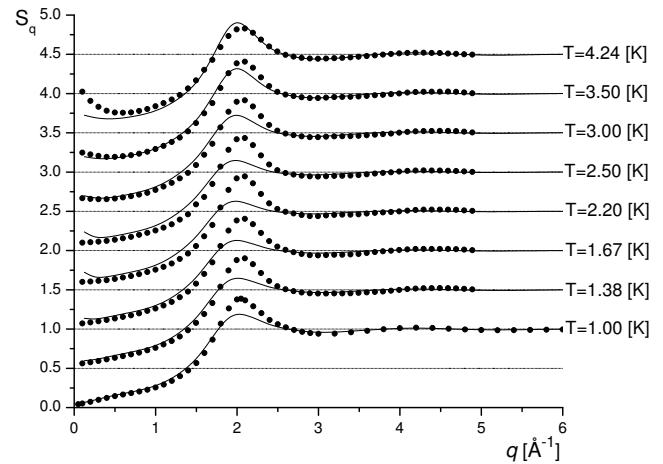


Рис. 3. Порівняння структурних факторів при різних температурах рідкого ^4He . Суцільна лінія — парний структурний фактор бозе-рідини в наближенні тричастинкових непрямих кореляцій (4.26); кружечки — експериментальний структурний фактор, узятий із роботи [2] (для зручності ілюстрації графіків криві зміщено одна стосовно одної на 0.5).

На рис. 3 подано порівняння при різних температурах експериментального структурного фактора з парним структурним фактором бозе-рідини в наближенні непрямих тричастинкових кореляцій (4.26).

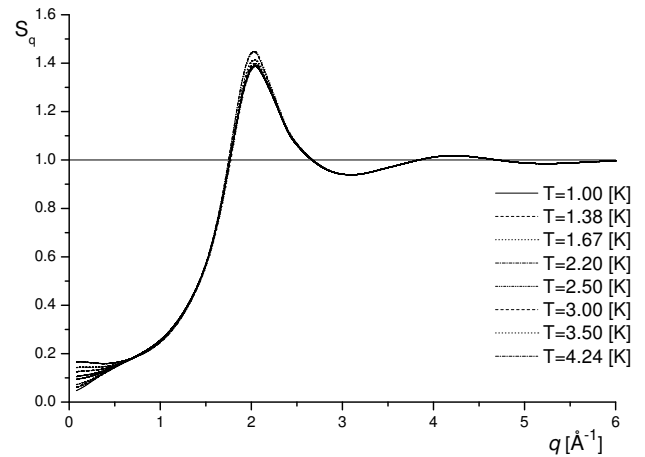


Рис. 4. Температурна залежність парного структурного фактора бозе-рідини в наближенні однієї суми за хвильовим вектором (4.26).

При малих значеннях хвильового вектора \mathbf{q} узгодження парного в наближенні непрямих тричастинкових кореляцій й експериментального структурного фактора є ліпшим, ніж у випадку наближення парних кореляцій для двочастинкового структурного фактора [7]. Для основної області інтегрування $\mathbf{q} \sim 2 \text{ \AA}^{-1}$ спостерігаємо зворотний ефект (порівняно з експериментальними даними ліпшим виявляється наближення парних кореляцій для структурного фактора).

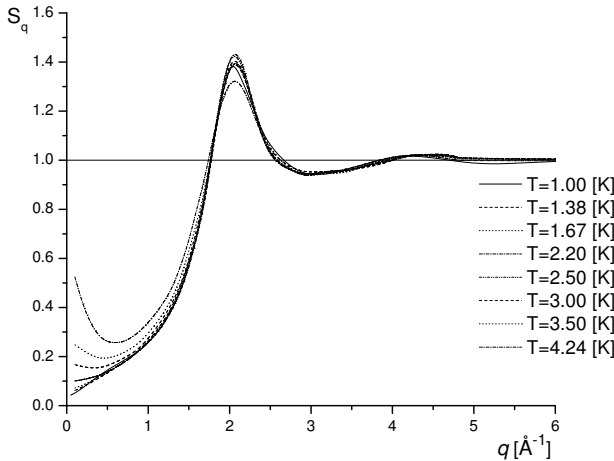


Рис. 5. Температурна залежність експериментального структурного фактора [2].

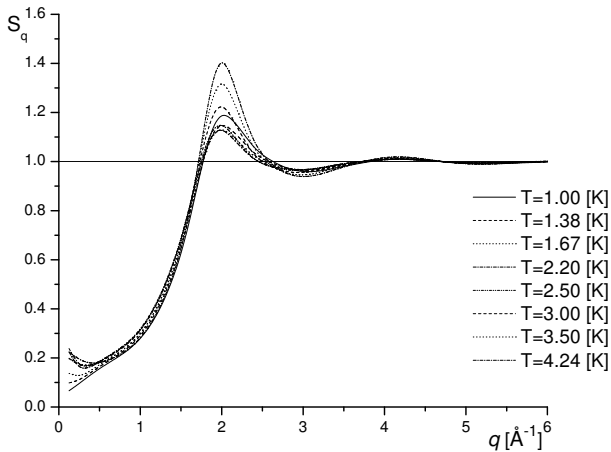


Рис. 6. Температурна залежність парного структурного фактора бозе-рідини в наближенні тричастинкових непрямих кореляцій (4.26).

Із рис. 4 бачимо, що температурна зміна парного структурного фактора бозе-рідини в наближенні двочастинкових кореляцій добре узгоджується з температурною зміною експериментального структурного фактора рис. 5, що не можна сказати про наближення непрямих тричастинкових кореляцій рис. 6.

Ураховуючи внески від три- та чотиричастинкових непрямих кореляцій у формулі (4.27), отримуємо такі температурні залежності парного структурного фактора бозе-рідини рис. 7, 8. Як бачимо з рис. 7, узгодження розрахованого з експериментальним структурних факторів при низьких температурах є доб-

рим і не має характерного розмиття піка в області $\mathbf{q} \sim 2 \text{ \AA}^{-1}$ рис. 8, як у випадку, наведеному вище з урахуванням тільки тричастинкових непрямих кореляцій.

Отже, можна зробити такий важливий висновок, що при розрахунку величин у наближенні двох сум за хвильовими векторами потрібно одночасно враховувати три- і частину тих чотиричастинкових кореляцій, які зображаються у вигляді двох сум за хвильовими векторами. Це узгоджується з висновками праць [11–13].

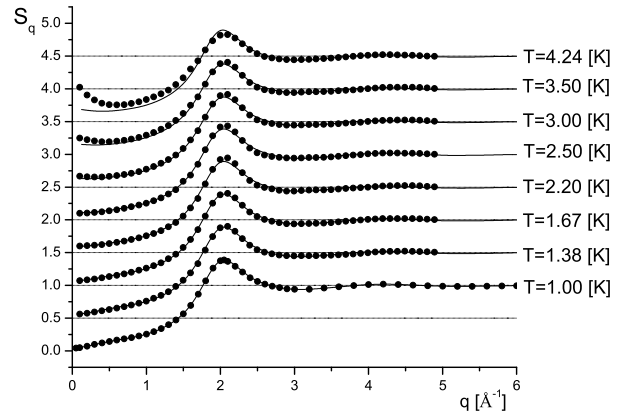


Рис. 7. Порівняння структурних факторів при різних температурах рідкого ^4He . Суцільна лінія — парний структурний фактор бозе-рідини в наближенні три- і чотиричастинкових непрямих кореляцій (5.46); кружечки — експериментальний структурний фактор, узятий із роботи [2] (для зручності ілюстрації графіків криві зміщено одна стосовно одної на 0,5).

Далі розглянемо температуру бозе-айнштайнівської конденсації рідкого гелію-4. Для дослідження бозе-айнштайнівської конденсації необхідно мати одночастинкову матрицю густини, яку ми тут не розраховуємо. Однак обчислити температуру бозе-айнштайнівської конденсації в головному наближенні ми можемо з умови (5.34) [28, 31, 32] при заміні $n_p \rightarrow \bar{n}_p$, коли $\bar{z} = 1$. З урахуванням (6.53) отримуємо:

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{\bar{m}} \left[\frac{N}{V} / \zeta(3/2) \right]^{2/3}, \quad (7.58)$$

де ζ -функція Рімана $\zeta(3/2) = 2.612375 \dots$. Оскільки ефективна маса є функцією від температури, то вираз (7.58) фактично є рівнянням на визначення температури бозе-конденсації T_c . Звідси за допомогою (6.53) отримуємо: $T_c = 2.26 \text{ K}$. Значення ефективної маси в точці бозе-айнштайнівської конденсації $\bar{m}/m = 1.38$.

У працях інших авторів подано переважно значення ефективної маси при $T \rightarrow 0$, зокрема $\bar{m}/m = 1.70$ у роботі [34], $\bar{m}/m = 1.58$ — [35], а Ісіхара і Самульський [36] використовували значення $\bar{m}/m = 1.71$.

Температурну залежність ефективної маси показано на рис. 9. Як бачимо, розраховане значення температури конденсації добре узгоджується з експериментальним $T_c^{\text{exp}} = 2.168 \text{ K}$.

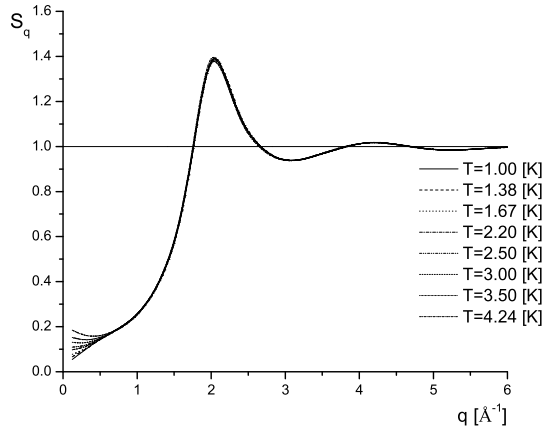


Рис. 8. Температурна залежність парного структурного фактора в наближенні три- і чотиричастинкових непрямих кореляцій (5.46).

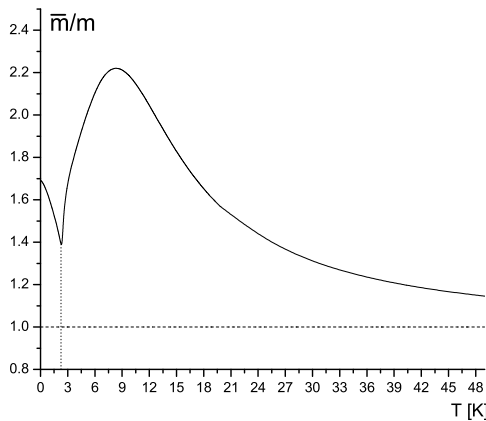


Рис. 9. Повна ефективна маса в наближенні однієї суми за хвильовим вектором (6.53) при відношенні $\bar{m}/m = 1.38$ в точці бозе-айнштайнівської конденсації $T_c = 2.26$ К.

VIII. ВИСНОВОК

Наші розрахунки фізичних характеристик рідкого гелію-4 ілюструють дуже добре узгодження запропонованої теорії з експериментальними вимірюваннями. Це зумовлено кількома причинами. По-перше, повна

матриця густини (1.1), з якої ми стартуємо в нашій статті, виявляє, як це показано у [8], правильну поведінку в низькотемпературній ділянці, коли властивості рідини формують квантовомеханічні принципи, а у квазікласичній межі вона переходить у звичайний больцманівський фактор, що повністю визначає властивості класичних рідин.

По-друге, врахування непрямих три- та чотиричастинкових кореляцій (вихід за RPA-наближення) виводить нас із “газового наближення” на рідинну теорію. Отже, врахування цих кореляцій дає вже кількісні, а не лише якісні результати в класичній межі. Тому слід було очікувати таких успіхів і для квантової рідини, якою є рідкий гелій-4. Ще однією причиною доброго опису властивостей досліджуваної системи в околі температури бозе-айнштайнівської конденсації є процедура перенормування вільночастинкового спектра ε_p шляхом усунення розбіжностей, які є типовими для фазових переходів і критичних явищ. Таке перенормування означає підсумовування послідовностей розбіжних членів ряду теорії збурень, яку ми будемо на системі ідеальних бозе-частинок як базисну. В околі критичної точки (бозе-конденсації) така теорія збурень, очевидно, не працює, тому потрібен цей трюк із перенормуванням. Це дало змогу обчислити температуру бозе-конденсації, яку ми зіставляємо з температурою λ -переходу рідкого гелію-4 в надплинний стан, що дуже добре узгоджується зі спостережуваною температурою.

Насамкінець зробимо ще одне зауваження. Матриця густини (1.1) не враховує прямих три- та чотиричастинкових кореляцій, які мають чисте квантовомеханічне походження і зникають у класичній межі, але при низьких температурах “підправляють” внесок від непрямих багаточастинкових кореляцій. Ці кореляції пропорційні до добутків $\rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3}$ при $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$ та $\rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2}$. Вони виникатимуть у показнику експоненти P_N -фактора матриці (1.1) при розв’язку рівняння Блоха в цьому наближенні. Внесок цих членів для основного стану бозе-рідини докладно досліджено у [25]. Кількісно вони незначно змінюють внесок від непрямих кореляцій і дещо поліпшують їх. Ці обчислення плануємо виконати для широкотемпературної ділянки в наших наступних дослідженнях.

[1] А. Ф. Скришевський, *Структурный анализ жидкостей и аморфных тел* (Высш. школа, Москва, 1971).
 [2] H. N. Robkoff, R. B. Hallock, Phys. Rev. B. **24**, 159 (1981).
 [3] R. J. Donnelly, C. F. Barenghi, J. Phys. Chem. Ref. Data, **27**, 6 (1998).
 [4] F. K. Achter, L. Meyer, Phys. Rev. **188**, 1 (1969).
 [5] E. C. Swenson, V. F. Sears, A. D. B. Woods, P. Martel, Phys. Rev. B **21**, 8 (1980).
 [6] J. L. Yarnell, M. J. Katz, R. G. Wenzel, S. H. Koenig, Phys. Rev. A **7**, 2130 (1973).
 [7] І. О. Вакарчук, Р. О. Притула, А. А. Ровенчак, Журн. фіз. досл. **11**, 259 (2007).

[8] І. О. Vakarchuk, J. Phys. Stud. **8**, 223 (2004).
 [9] Г. Темперли, Дж. Роулисона, Дж. Рашбрука, *Фізика простих жидкостей* (Мир, Москва, 1971).
 [10] К. Крокстон, *Фізика жидкого состояния* (Мир, Москва, 1978).
 [11] І. А. Вакарчук, П. А. Глушак, Теор. мат. физ. **75**, 101 (1988).
 [12] І. О. Вакарчук, *Вступ до проблем багатьох тіл* (Місіонер, Львів, 1999).
 [13] І. А. Вакарчук, доктор. дисерт., Інститут теоретической фізики АН УССР, Київ (1979).
 [14] A. S. Kheifets, I. Bray, Austral. J. Phys. **54**, 655 (1998).
 [15] I. Colgan, M. S. Pindzola, F. Robicheaux, Phys. Rev B

- 34**, 457 (2001)
- [16] C. Dawson *et al.*, J. Phys. B **34**, 525 (2001).
- [17] H. W. Jakson, E. Feenberg, Rev. Mod. Phys. **34**, 686 (1962).
- [18] J. L. Barrat, J. P. Hansen, Phys. Rev. Lett. **58**, 2075 (1987).
- [19] V. V. Ignatyuk, Condens. Matter. Phys. **2**, 37 (1999).
- [20] R. P. Feynman, Phys. Rev. **91**, 1291 (1953).
- [21] Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР. Сер. физ. **11**, 77 (1947).
- [22] R. Kubo, Phys. Soc. **17**, 1100 (1962).
- [23] А. Исихара, *Статистическая физика* (Мир, Москва, 1973).
- [24] И. А. Вакарчук, препринт ИТФ АН УССР 81–31Р (Киев, 1981).
- [25] И. А. Вакарчук, Теор. мат. физ. **82**, 438 (1990).
- [26] Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Журн. эксп. теор. физ. **28**, 129 (1955).
- [27] Н. Марч, У. Янг, С. Сампантхар, *Проблема многих тел в квантовой механике* (Мир, Москва, 1969).
- [28] М. М. Боголюбов, *Лекції з квантової статистики* (Радянська школа, Київ, 1949); Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды в трех томах* (Наукова Думка, Киев, 1970).
- [29] I. O. Vakarchuk, Theor. Math. Phys. **154**, 6 (2008).
- [30] I. O. Vakarchuk, Журн. фіз. досл. **1**, 25 (1996); Журн. фіз. досл. **1**, 156 (1997).
- [31] K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley, New-York, 1987).
- [32] R. P. Feynman, *Statistical Mechanics* (W. A. Benjamin, Reading, Mass., 1972).
- [33] I. O. Vakarchuk, V. V. Babin, A. A. Rovenchak, J. Phys. Stud. **4**, 16 (2000).
- [34] I. O. Вакарчук, Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. **26**, 29 (1993).
- [35] A. A. Rovenchak, Fiz. Nizk. Temp. **29**, 145 (2003).
- [36] A. Isihara, T. Samulski, Phys. Rev. B **16**, 1969 (1977).

STRUCTURE FUNCTIONS OF LIQUID HELIUM-4 WITH THREE- AND FOUR-PARTICLE INDIRECT CORRELATION TAKEN INTO CONSIDERATION

I. O. Vakarchuk, R. O. Prytula

*Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,
12, Drahomanov St., Lviv, UA-79005, Ukraine*

In this work, we present a method to calculate the many-particles structure factors of the Bose-liquid using the density matrix of this system in the approximation of pair correlations [I. O. Vakarchuk, J. Phys. Stud. **8**, 223 (2004)]. Using this method we obtain the expressions for the two-, three-, and irreducible four-particle structure factors of the Bose-liquid in a wide temperature range in the approximation of three- and four-particle indirect correlations. At high temperatures, the expressions for structure factors lead to the results for classical liquid in the post RPA-approximation and low-temperature limit gives a result of Bogoliubov theory accurate within the first correction. Eliminating an infra-red divergence in the pair structure factor, we find the renormalized energy spectrum of a free particle. For small values of the wave vector $\mathbf{q} \rightarrow 0$, we obtain the expression for temperature dependence of the effective mass of the helium-4 atom in the approximation of pair correlations. The calculated Bose-Einstein condensation temperature of liquid helium-4 equals $T_c = 2.26$ K. In order to obtain numerical results all the final formulae are written solely via the liquid structure factor extrapolated to $T \rightarrow 0$ taken as a source information instead of the interatomic potential. We make numerical calculations for the structure factors, effective mass, and compare the pair structure factor in the approximation of three- and four-particle indirect correlations for different temperatures with corresponding experimental data. A good agreement of the calculated expression with the corresponding experimental data is found.