JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 12, No. 4 (2008) 4004(3 p.)

СУПЕРСИМЕТРІЯ ГАМІЛЬТОНІАНА ПАУЛІ ТА СПЛУТАНІСТЬ КВАНТОВИХ СТАНІВ

В. М. Ткачук, С. І. Вакарчук
Кафедра теоретичної фізики
Львівського національного університету імені Івана Франка,
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна
(Отримано 20 червня 2008 року)

Розглянуто рух електрона в площині, перпендикулярній до магнітного поля, який має суперсиметрію з двома суперзарядами. Показано, що стаціонарні стани як наслідок суперсиметрії можуть мати сплутаність між спіновими й координатними змінними електрона. Для цих станів квадрат міри сплутаності (узгодженості) дорівнює сумі квадратів середніх значень суперзарядів, розділеній на енерґію електрона. Власні стани суперзарядів є максимально сплутаними.

Ключові слова: суперсиметрія, гамільтоніан Паулі, сплутані квантові стани.

PACS number(s): 03.65.−w, 03.65.Ud, 11.30.Pb

ВСТУП

Важливою й цікавою задачею квантової механіки є задача про рух електрона в магнітному полі. Точні енерґетичні рівні та хвильові функції при русі електрона в однорідному магнітному полі вперше знайшов Ландау. Зауважимо, що задача про рух електрона в магнітному полі виявляє суперсиметричні властивості. Показано, що суперсиметрія з двома суперзарядами реалізується у двовимірному випадку з магнітним полем $B_x = B_y = 0$, $B_z = B(x, y)$ і тривимірному, коли магнітне поле є парним або непарним щодо інверсії координат $\mathbf{B}(-\mathbf{r}) = \pm\mathbf{B}(\mathbf{r})$ [1–3]. Суперсиметрія наявна також при русі електрона по довільній поверхні, ортогональній до силових ліній магнітного поля [4]. У роботах Нікітіна [5, 6], а також наших працях [7, 8] знайдено нові тривимірні магнітні поля, при русі електрона в яких реалізується суперсиметрія з двома, трьома та чотирма суперзарядами. Двовимірну суперсиметричну квантову механіку з чотирма суперзарядами розглянуто в праці [9].

У цій статті ми покажемо, що із суперсиметрією електрона в магнітному полі пов'язана така важлива характеристика квантових станів, як сплутаність, а саме, сплутаність координатних і спінових змінних електрона. Сплутаність квантових станів є в основі квантової телепортації, квантової криптографії та квантових обчислень, які становлять нову ділянку досліджень у квантовій механіці — квантову інформатику (див. огляд [10]). Зауважимо, що є всього кілька праць, де вивчали сплутаність і суперсиметрію одночасно. Так, в [11] досліджено сплутаність бозонів і параферміонів для парасуперсиметричних когерентних станів. У праці того ж автора [12] вивчено двофотонну сплутаність у межах двомодової суперсиметричної моделі. У [13] показано, що суперсиметричні комбінації бозонів і ферміонів мають сплутані стани. Нільпотентну квантову механіку та сплутаність станів вивчали у [14]. У недавній роботі [15] досліджували сплутаність суперсиметричних двочастинкових квантових систем.

I. СУПЕРСИМЕТРІЯ ГАМАЛЬТОНІАНА ПАУЛІ

Розгляньмо гамільтоніан Паулі

$$H = \frac{1}{2m_0}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - g\frac{e\hbar}{4m_0 c}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}, \tag{1.1}$$

де σ_α — матриці Паулі, $\mathbf{A}$ — векторний потенціал, $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, g — фактор електрона, який незначно відрізняється від 2, і тому будемо вважати, що $g = 2$. У цьому випадку гамільтоніан Паулі можна записати у вигляді

$$H = Q_0^2, \tag{1.2}$$

із суперзарядом

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2m_0}}\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) = \frac{1}{\sqrt{2m_0}}\boldsymbol{\sigma\pi}, \tag{1.3}$$

де ми ввели позначення

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{1.4}$$

Розгляньмо рух електрона у площині $x - y$ у магнітному полі, перпендикулярному до площини з векторним потенціалом $A_x = A_x(x, y), A_y = A_y(x, y)$. У двовимірному випадку

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2m_0}}(\sigma_x\pi_x + \sigma_y\pi_y). \tag{1.5}$$

Оператор парності Віттена, який антикомутує з Q_0, є $T = \sigma_z$. У результаті ми приходимо до суперсиметрії з двома суперзарядами Q_0 і $Q_1 = i\sigma_z Q_0$, які задовольняють алґебру суперсиметрії з двома суперзарядами

$$\{Q_i, Q_j\} = 2\delta_{i,j}H, \quad [Q_i, H] = 0, \quad i, j = 0, 1. \tag{1.6}$$

Наслідком цієї алґебри є двократне виродження ненульових енерґетичних рівнів. Зауважимо, що суперсиметрія у двовимірному випадку існує навіть для неоднорідного магнітного поля.

У матричному зображенні для двовимірного випадку маємо

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2m_0}} \begin{pmatrix} 0 & \pi_- \\ \pi_+ & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m_0}} (\sigma^+ \pi_- + \sigma^- \pi_+), \tag{1.7}$$

де $\pi_\pm = \pi_x \pm i\pi_y$. Відповідно гамільтоніан запишемо так:

$$H = \frac{1}{2m_0} \begin{pmatrix} \pi_-\pi_+ & 0 \\ 0 & \pi_+\pi_- \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Оскільки σ_z комутує з гамільтоніаном, то власні вектори σ_z є одночасно власними векторами гамільтоніана. Власній ненульовій енергії E відповідають два розв'язки

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_1(x,y)|\uparrow\rangle \tag{1.9}$$

з додатним власним значенням σ_z,

$$|\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \psi_2(x,y)|\downarrow\rangle \tag{1.10}$$

з від'ємним власним значенням σ_z.

Функції ψ_1 і ψ_2 задовольняють рівняння

$$\frac{1}{2m_0}\pi_-\pi_+\psi_1 = E\psi_1, \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{2m_0}\pi_+\pi_-\psi_2 = E\psi_2, \tag{1.12}$$

звідки випливають такі співвідношення:

$$\frac{1}{\sqrt{2m_0}}\,\pi_+\psi_1 = \sqrt{E}\psi_2, \quad \frac{1}{\sqrt{2m_0}}\,\pi_-\psi_2 = \sqrt{E}\psi_1. \tag{1.13}$$

Для однорідного магнітного поля величиною B векторний потенціал $A_x = -By/2$, $A_y = Bx/2$. У цьому випадку $[\pi_-, \pi_+] = -2eB/c = \mathrm{const}$ і функції ψ_1 і ψ_2 є ортогональними. Надалі саме цей випадок будемо розглядати.

II. СПЛУТАНІСТЬ КВАНТОВИХ СТАНІВ

Для означення сплутаності розгляньмо спочатку несплутані стани. Якщо стан електрона можна записати як добуток координатної та спінової функцій

$$|\psi\rangle = \phi(x,y)|\chi\rangle, \tag{2.14}$$

то сплутаність між координатними та спіновими змінними системи відсутня. Спінова частина є двовимірним вектором $|\chi\rangle = \gamma|\uparrow\rangle + \delta|\downarrow\rangle$. Координатну частину також розглянемо у двовимірному підпросторі з базисними функціями ψ_1 і ψ_2. Тоді $\phi(x,y) = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$. Для несплутаного стану маємо

$$|\psi\rangle = \alpha\gamma\psi_1|\uparrow\rangle + \alpha\delta\psi_1|\downarrow\rangle + \beta\gamma\psi_2|\uparrow\rangle + \beta\delta\psi_2|\downarrow\rangle. \tag{2.15}$$

Довільний вектор стану запишемо

$$|\psi\rangle = a\psi_1|\uparrow\rangle + b\psi_1|\downarrow\rangle + c\psi_2|\uparrow\rangle + d\psi_2|\downarrow\rangle, \tag{2.16}$$

де коефіцієнти розкладу пов'язані тільки умовою нормування $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$. Зауважимо, що ці стани не обов'язково є стаціонарними станами електрона.

Порівнюючи (2.15) і (2.16), знаходимо, що для несплутаного стану $ad - bc = 0$. За аналогією зі спіновими системами вводимо міру сплутаності — узгодженість (concurrence)

$$C = 2|ad - cb|, \tag{2.17}$$

яка міняється від 0 (несплутаний стан) до 1 (максимально сплутаний стан).

Розгляньмо тепер сплутаність спінових і координатних станів електрона в магнітному полі. Оскільки ненульові енерґетичні рівні є двократно виродженими, то загальний розв'язок, який відповідає енерґії E, — це лінійна комбінація (1.9) і (1.10)

$$|\psi\rangle = \cos\theta\,\psi_1(x,y)|\uparrow\rangle + \sin\theta\, e^{i\alpha}\psi_2(x,y)|\downarrow\rangle. \tag{2.18}$$

Узгодженість для цього стану

$$C = 2|\cos\theta\sin\theta| = |\sin 2\theta|. \tag{2.19}$$

Максимальне значення $C = 1$ досягається при $\theta = \pi/4$, і стан, у якому максимально сплутані спінова й координатна функції, має вигляд

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x,y)|\uparrow\rangle + e^{i\alpha}\psi_2(x,y)|\downarrow\rangle). \tag{2.20}$$

Для середнього значення суперзарядів у стані (2.18) знаходимо

$$\langle Q_0\rangle = \sqrt{E}\sin 2\theta\,\cos\alpha, \tag{2.21}$$

$$\langle Q_1\rangle = -\sqrt{E}\sin 2\theta\,\sin\alpha, \tag{2.22}$$

і в результаті

$$\langle Q_0\rangle^2 + \langle Q_1\rangle^2 = EC^2. \tag{2.23}$$

Отже, міра сплутаності стаціонарних станів електрона в магнітному полі пов'язана із середнім значенням суперзарядів.

Легко переконатися, що (2.20) при $e^{i\alpha} = \pm 1$ є двома власними станами суперзаряду Q_0, а при $e^{i\alpha} = \pm i$ є двома власними станами суперзаряду Q_1. Це означає, що власні стани суперзарядів є максимально сплутаними.

III. ВИСНОВКИ

Ми показали, що стаціонарні стани електрона в магнітному полі внаслідок суперсиметрії можуть мати сплутаність між координатними та спіновими змінними. У цьому випадку стан електрона не представляється як добуток координатної та спінової функцій, тобто не факторизується. У роботі встановлено, що квадрат міри сплутаності (узгодженість) стаціонарних станів електрона в магнітному полі дорівнює сумі квадратів середніх значень суперзарядів, поділеній на енерґію електрона. Цікаво також зауважити, що власні стани суперзарядів є максимально сплутаними.

[1] Л. Э. Генденштейн, И. В. Криве, Усп. физ. наук **146**, 553 (1985).
[2] Л. Э. Генденштейн, Яд. физ. **41**, 261 (1985).
[3] Л. Э. Генденштейн, Письма Журн. эксп. теор. физ. **39**, 234 (1984).
[4] Ю. А. Ситенко, Яд. физ. **51**, 1416 (1990).
[5] A. Nikitin, *10 International Conf. "Problems of quantum field theory"*, JINR E2-96-369 (1996).
[6] J Niederle, A. Nikitin, J. Phys. A **30**, 999 (1997).
[7] В. М. Ткачук, С. І. Вакарчук, Журн. фіз. досл. **1**, 39 (1996).
[8] V. M. Tkachuk, S. I. Vakarchuk, Phys. Lett. A **228**, 141 (1997).
[9] V. Berezovoj, A. Pashnev, Class. Quantum Grav. **13**, 1699 (1996); arXiv:hep-th/950694.
[10] К. А. Валиев, А. А. Кокин, *Квантовые компьютеры: надежды и реальность* (Москва–Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001).
[11] S. J. Akhtarshenas, Int. J. Theor. Phys. **45**, 2231 (2006); arXiv:quant-ph/0511080.
[12] S. J. Akhtarshenas, Int. J. Theor. Phys. **45**, 1005 (2006); arXiv:quant-ph/0507079v2.
[13] N. Ilieva, H. Narnhofer, W. Thirring, Eur. Phys. J. C **35**, 119 (2004); arXiv:quant-ph/0401139v1.
[14] A. M. Frydryszak, arXiv:0810.3016v1.
[15] A. N. F. Aleixo, A. B. Balantekin, J. Phys. A **41**, 315302 (2008).

SUPERSYMMETRY OF PAULI HAMILTONIAN AND ENTANGLEMENT

V. M. Tkachuk, S. I. Vakarchuk
Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,
12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine;
e-mail: tkachuk@ktf.franko.lviv.ua

We consider the motion of an electron in the plane perpendicular to the magnetic field which possesses supersymmetry with two supercharges. It is shown that stationary states as a consequence of supersymmetry can have entanglement between spin and coordinate variables of the electron. Squared concurrence for these states is equal to the sum of the squared mean value of supercharges divided by the energy of the electron. The eigenstates of the supercharges are maximally entangled.