

ПОВОРОТНА ДЕФОРМАЦІЙНА НЕСТІЙКІСТЬ У НЕМАТИКУ ВНАСЛІДОК ВИКРИВЛЕННЯ ПОВЕРХНІ ПРОШАРКУ

О. М. Васильєв, Н. П. Подоляк

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, фізичний факультет,
кафедра теоретичної фізики, просп. Глушкова, 2, корпус 1, Київ, 03680, Україна*

(Отримано 18 грудня 2007 р.; в остаточному вигляді — 19 вересня 2008 р.)

Показано, що викривлення поверхні нематичного прошарку призводять до нестійкості системи щодо поворотних деформацій директора. Знайдено умови, за яких у нематичному прошарку виникають поворотні деформації, та побудовано фазову діаграму, що визначає стійкий та нестійкий стани системи щодо обертальних деформацій.

Ключові слова: нематичний прошарок, директор, обертальна деформація.

PACS number(s): 61.30.Cz, 61.30.Gd

ВСТУП

Незважаючи на серйозні успіхи у вивченні рідких кристалів, такі системи залишаються важливим предметом багатьох досліджень. Завдяки надзвичайній сприйнятливості рідких кристалів до зовнішніх збурень навіть незначні впливи ззовні можуть приводити до цікавих ефектів. Останнім часом зусилля науковців спрямовані на вивчення різноманітних змішаних систем, таких, наприклад, як рідкі кристали з домішками (мікроскопічними та макроскопічними, ферочастинками, тощо — див., наприклад, [1–14]), а також систем, що містять топологічні дефекти (наприклад, [15–21]). Крім зацікавлення системами змішаного типу та неідеальними системами, особливу увагу привертають системи зі спеціальною формою зразка та суттєво неоднорідною енергією взаємодії рідкого кристала з обмежувальними поверхнями (див., наприклад, [22–26]). Причин появи таких нерівностей можуть бути різними. Доцільно виділити два основні випадки: поява нерівностей унаслідок недосконалості технології виготовлення плівок та створення плівок зі спеціальним типом неоднорідності поверхні для реалізації необхідних властивостей. В обох випадках доконечним є ґрунтовне теоретичне дослідження для прогнозування властивостей плівок і визначення ступеня впливу неоднорідності поверхні на властивості системи.

Тут показано, що неоднорідність поверхні, яка обмежує плівку, може призводити до втрати нематичною системою стійкості щодо виникнення обертальних деформацій. Відразу зазначимо, що аналогічну задачу у статті [27] розв'язували для поверхні з неоднорідностями спеціального типу (профіль неоднорідності поверхні визначався синусоїдальною залежністю). На відміну від зазначеної праці, ми досліджуємо загальніший випадок. Як і в статті [27], ми використали теорію еластичності (див., наприклад, [28]) та метод оптимізації пробної функції.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядаємо нематичну плівку товщини D з рівною нижньою поверхнею та неоднорідною верхньою.

У цьому сенсі D визначає середню товщину плівки. Профіль неоднорідності верхньої поверхні задаємо через функцію $f(x)$, де через x позначена координата в напрямку вздовж плівки. Отже, межі поверхонь, що обмежують плівку, визначаються співвідношеннями $z = 0$ та $z = D + f(x)$, причому вважаємо, що для всіх значень x маємо $|f(x)| \ll D$. Формально це означає, що неоднорідності поверхні є слабкими. Крім того, будемо вважати функцію $f(x)$ досить плавною і періодичною з періодом L . Періодичність функції можна розглядати як наявність у профілі неоднорідності поверхні деформацій із типовим масштабом розміру L (рис. 1). Крім того, функція $f(x)$, аби бути гладкою на всій області визначеності, має задовольняти співвідношення $f(0) = f(L)$ та $f'(0) = f'(L) = 0$. Остання з цих двох умов дає обмеження на спосіб вибору початку координат по осі x .

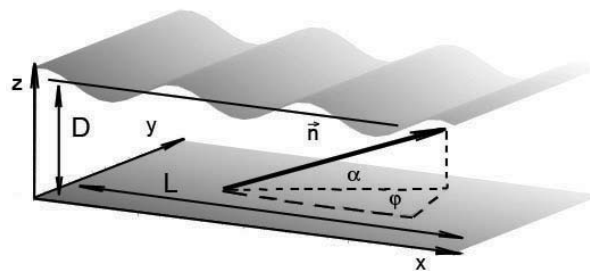


Рис. 1. Нематична плівка з неоднорідною поверхнею.

Будемо вважати, що зв'язок директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ з нижньою рівною поверхнею є жорстким (директор орієнтований уздовж поверхні). Тоді повна деформаційна енергія системи (див., наприклад, [28, 29]) плівки складається з об'ємної енергії (в одноконстантному наближенні)

$$F_b = \frac{K}{2} \int \left((\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + (\nabla \times \mathbf{n})^2 \right) dV \quad (1)$$

та енергії взаємодії нематичної матриці з верхньою поверхнею (у формі потенціалу типу Рапіні [30])

$$F_s = \frac{W}{2} \int (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2 dS, \quad (2)$$

де через \mathbf{s} позначено вектор нормалі до неоднорідної поверхні, а W — енергія зв'язку нематика з поверхнею. Перший інтеграл беремо за об'ємом зразка, а другий — за неоднорідною поверхнею плівки.

Орієнтацію директора у просторі описуємо кутами α (кут відхилення директора від горизонталі) та ϕ (кут повороту в площині плівки), як показано на рис. 1. Отже, на нижній поверхні маємо $\alpha = 0$ та $\phi = 0$.

Досліджуємо умови, за яких у системі може виникнути розподіл, при якому азимутальний кут ϕ усередині плівки стає відмінним від нуля. Для цього розглянемо пробну функцію для полярного кута α у вигляді:

$$\alpha(x, z) = Bf'(x) \operatorname{sh}(\lambda z) / \operatorname{sh}(\lambda D), \quad (3)$$

де λ та B є оптимізаційними параметрами. Пробну функцію вибирали з тих міркувань, аби на неоднорідній поверхні кут відхилення директора визначався профілем неоднорідності поверхні: $\alpha(x, z = D) = Bf'(x)$. У випадку $f(x) \sim \sin(2\pi x/L)$ отримуємо модель, розглянуту в роботі [27]. Для дослідження стійкості системи щодо деформацій повороту покладемо $\phi = \phi_0 z/D$, де параметр ϕ_0 вважаємо малим. Очевидно, на межі стійкості він має дорівнювати нулеві. Далі розраховуємо вираз для повної деформаційної енергії системи (враховуючи плавність та малість неоднорідності поверхні, всі інтеграли за змінною z розраховуємо в межах від 0 до D) і розкладаємо його в ряд до квадратичних доданків за ϕ_0 , при цьому лінійних за ϕ_0 доданків цей вираз не міститиме: $F \approx F\{\phi_0 = 0\} + \phi_0^2 \Delta F$. Параметри λ та B знаходимо, мінімізуючи вираз для $F\{\phi_0 = 0\}$, а за доданком ΔF визначаємо стійкість системи до обертальних деформацій: для стійкої фази $\Delta F > 0$.

МЕЖА СТІЙКОСТІ Й ФАЗОВА ДІАГРАМА

Виконавши означені вище процедури, отримуємо для параметрів розподілу

$$\lambda = \sqrt{I_2/I_1}, \quad (4)$$

$$B = \frac{W\sqrt{I_1}}{W\sqrt{I_1} + K\sqrt{I_2}}, \quad (5)$$

де параметри I_k ($k = 1, 2$) визначаються профілем неоднорідності поверхні через співвідношення ($k = 1, 2$):

$$I_k = \int_0^L \left(f(x)^{(k)} \right)^2 dx. \quad (6)$$

Зазначені параметри неявно залежать від параметра L , що не дуже зручно для практичного аналізу. Тому доцільніше перейти до інтегрування за безрозмірною змінною, скориставшись представленням $f(x) \equiv g(x/L)$. Тоді легко отримуємо ($k = 1, 2$):

$$I_k = \frac{i_k}{L^{2k-1}}, \quad (7)$$

$$i_k = \int_0^1 \left(g(t)^{(k)} \right)^2 dt. \quad (8)$$

При цьому повна енергія системи (при $\phi_0 = 0$) визначатиметься виразом

$$F = \frac{K\sqrt{i_1 i_2}}{2L \left(L + \frac{K}{W} \sqrt{i_2/i_1} \right)}. \quad (9)$$

Для доданка ΔF , пов'язаного з можливими обертальними деформаціями, маємо

$$\Delta F = \frac{K}{2} \left(\frac{L}{D} - \frac{\sqrt{i_1 i_2}}{L \left(L + \frac{K}{W} \sqrt{i_2/i_1} \right)} \right). \quad (10)$$

Умова нестійкості $\Delta F < 0$ системи зводиться до співвідношення

$$\frac{K}{W} < \frac{i_1 D}{L^2} - L \sqrt{\frac{i_1}{i_2}}. \quad (11)$$

Із цього виразу впливає декілька важливих наслідків.

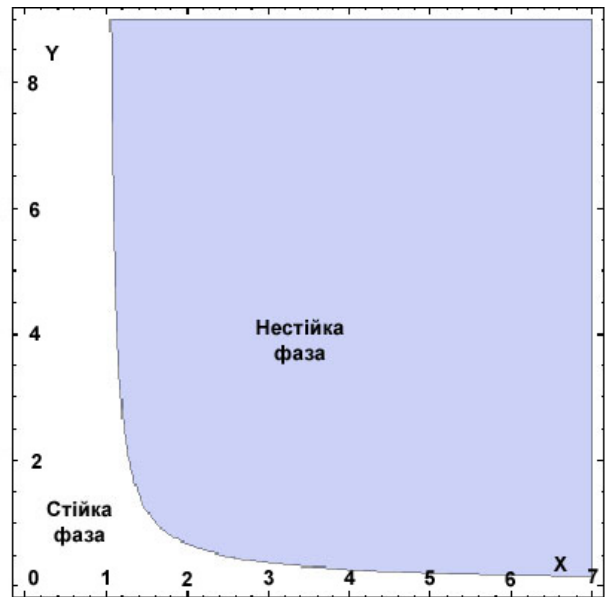


Рис. 2. Фазова діаграма системи: $X = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{W D i_1}{K}}$ і $Y = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{K D i_2}{W}}$.

По-перше, якщо є співвідношення

$$L > L_C = \sqrt[3]{D \sqrt{i_1 i_2}}, \quad (12)$$

у системі взагалі не може бути обертальних деформацій (при $W > 0$). Зв'язок між критичним значенням L_C та товщиною плівки D має скейлінговий вигляд $L_C \sim D^{1/3}$. З фізичного погляду, умова (12) означає, що в системі існує обмеження на характерний розмір (довжину) ділянки неоднорідності поверхні: якщо характерний розмір ділянки неоднорідності перевищує

зазначене критичне значення, обертальні деформації в системі неможливі.

По-друге, навіть якщо умова (12) не виконується, деформації можливі лише при

$$W > W_C = \frac{KL^2 \sqrt{i_2/i_1}}{D\sqrt{i_1 i_2} - L^3}. \quad (13)$$

Якщо ввести позначення

$$X = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{WDi_1}{K}} \quad (14)$$

$$Y = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{KDi_2}{W}}, \quad (15)$$

пов'язані з інтегралами від похідних для функції профілю поверхні, то в нових позначеннях отримаємо умову на існування в системі обертальних деформацій:

$$YX^2 - X - Y > 0. \quad (16)$$

На рис. 2 показана фазова діаграма в термінах X та Y . Фазова діаграма дає уявлення про можливі стани системи через узагальнені параметри, пов'язані з лінійними розмірами комірки в нетривіальний спосіб. Для оцінки того, як співвідношення параметрів L та D впливають на стійкість системи до обертальних деформацій, ліпше використовувати співвідношення (11)–(13). Наприклад, за умови, що товщина плівки становить $D = 100$ мкм і профіль неоднорідності $f(x) = \cos(2\pi nx/L)$ з амплітудою неоднорідності 1 мкм, критичний розмір L_C становить близько

$L_C \approx 23.15 \cdot n$. Тобто для $n = 1$ ця величина є близькою до 23 мкм. При цьому характерний розмір неоднорідностей поверхні становить близько L/n , через що величина 23 мкм є характерною довжиною “моди” неоднорідності поверхні. Критичне значення для розмірів неоднорідностей L_C становить близько 100 мкм для значення амплітуди функції профілю неоднорідностей 9 мкм, тобто для $f(x) = 9 \cos(2\pi nx/L)$. Слід також мати на увазі, що тут йдеться про максимально можливі розміри неоднорідностей поверхні, що, власне кажучи, не означає наявності обертальних деформацій у нематіку. Для таких деформацій необхідно, аби виконувалася ще й умова (13) для енергії зв'язку. При цьому маємо співвідношення

$$W_C \sim \frac{1}{L_C - L}, \quad (17)$$

що означає збільшення критичної енергії до нескінченності при наближенні розмірів ділянки неоднорідності поверхні до критичного значення.

ВИСНОВКИ

Отже, неоднорідність поверхні в нематичній плівці може призводити до нестійкості системи щодо обертальних деформацій. Доконечною умовою виникнення деформацій є неперевикнення періоду функції профілю неоднорідності поверхні критичного значення L_C (визначається співвідношенням (12)). Деформації виникають у системах, для яких енергія взаємодії з неоднорідною поверхнею перевищує критичне значення W_C (співвідношення (13)).

-
- [1] P. Mukherjee, *Liq. Cryst.* **22**, 239 (1997).
 [2] P. K. Mukherjee, *J. Chem. Phys.* **116**, 9531 (2002).
 [3] A. T. Bosch, *J. Phys. II (France)* **1**, 949 (1991).
 [4] T. Bellini, M. Caggioni, M.A. Clark, F. Mantegazza, A. Maritan, A. Pelizzola, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 085704 (2003).
 [5] S. H. Chen, N. M. Amer, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2298 (1983).
 [6] R. E. Bena, E. Petrescu, *J. Magn. Magn. Mater.* **248**, 336 (2002).
 [7] S. V. Burylov, V. I. Zadorozhnyi, I. P. Pinkevich, V. Yu. Reshetnyak, T. J. Sluckin, *J. Magn. Magn. Mater.* **252**, 153 (2002).
 [8] B. J. Liang, S. H. Chen, *Phys. Rev. A* **39**, 1441 (1989).
 [9] I. Potocova, M. Koneracka, P. Kopcansky, M. Timko, L. Tomco, J. Jadzyn, G. Czechowski, *J. Magn. Magn. Mater.* **196–197**, 578 (1989).
 [10] I. Potocova, M. Koneracka, P. Kopcansky, M. Timko, L. Tomco, J. Jadzyn, G. Czechowski, *J. Magn. Magn. Mater.* **201**, 163 (1999).
 [11] Yu. Raikher, V. I. Stepanov, *J. Magn. Magn. Mater.* **201**, 182 (1999).
 [12] D. Walton, S. M. Shibli, *J. Magn. Magn. Mater.* **226–230**, 1948 (2001).
 [13] A. Yu. Zubarev, L. Yu. Iskakova, *Physica A* **229**, 203 (1996).
 [14] A. Yu. Zubarev, L. Yu. Iskakova, *J. Magn. Magn. Mater.* **183**, 201 (1998).
 [15] M. Tasinkevych, N. M. Silvestre, P. Patricio, M. M. Telo da Gama, *Eur. Phys. J. E* **9**, 341 (2002).
 [16] H. Stark, D. Ventzki, M. Reichert, *J. Phys.: Condens. Matter* **15**, S191 (2003).
 [17] H. Stark, *Phys. Rev. E* **66**, 041705 (2002).
 [18] H. Stark, *Phys. Rev. E* **66**, 032701 (2002).
 [19] H. Stark, D. Ventzki, *Europhys. Lett.* **57**, 6 (2002).
 [20] H. Stark, T. C. Lubensky, *Phys. Rev. E* **67**, 061709 (2003).
 [21] H. Stark, *Phys. Rep.* **351**, 387 (2001).
 [22] V. Vitelli, D. R. Nelson, *Phys. Rev. E* **74**, 021711 (2006).
 [23] С. В. Бурьлов, *Журн. эксп. теор. физ.* **112**, 1603 (1997).
 [24] A.-G. Cheong, A. D. Rey, *Eur. Phys. J. E* **9**, 171 (2002).
 [25] M. Giocondo, A. Jakli, A. Saupe, *Eur. Phys. J. E* **1**, 61 (2000).

- [26] S. Kondrat, A. Poniewierski, L. Harnau. *Eur. Phys. J. E* **10**, 163 (2003).
[27] P. Patricio, M. M. Telo da Gama, S. Dietrich, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 245502 (2002).
[28] P. G. de Gennes, J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals* (Clarendon Press, Oxford, 1993).
[29] S. Chandrasekhar, *Liquid Crystals* (Cambridge University Press, 1977).
[30] A. Rapini, M. Papoular, *J. Phys. (Paris) Colloq.* **30**, 4 (1969).

**ROTATIONAL DEFORMATION INSTABILITY IN NEMATIC DUE
TO LAYER SURFACE CURVATURE**

A. N. Vasilev, N. P. Podolyak

Taras Shevchenko Kyiv University, Physics Faculty,

Department of Theoretical Physics, 2, Glushkov prosp., Building, 1, Kyiv, UA-03680, Ukraine

e-mail: vasilev@univ.kiev.ua

It is shown that surface curvature in the nematic layer causes some instability of the system toward rotational deformations of the director. We find conditions for rotational deformations to appear and propose a phase diagram for the system to determine its stable and unstable states.