

## ТЕРМОДИНАМІЧНІ ФУНКЦІЇ ОДНОВИМІРНИХ СЛАБКОВЗАЄМОДІЮЧИХ ГАРМОНІЧНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ ЗІ СТАТИСТИКОЮ ДЖЕНТІЛЕ

М. І. Топілко, А. А. Ровенчак

*Кафедра теоретичної фізики, Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005*

(Отримано 26 червня 2009 р.; в остаточному вигляді — 13 липня 2009 р.)

У роботі розглянуто одновимірну систему гармонічних осциляторів, які підпорядковуються статистиці Джентіле. На підставі відомої функції розподілу розраховано температурні залежності хімічного потенціалу, енергії та теплоємності модельної системи зі слабкою взаємодією. Проаналізовано особливості хімічного потенціалу системи слабковзаємодіючих гармонічних осциляторів за температури, рівної нулю.

**Ключові слова:** дробова статистика, термодинамічні функції, слабка взаємодія.

PACS number(s): 05.30.Pr, 05.70.—a

### ВСТУП

У тривимірному випадку для макроскопічного опису термодинамічних систем, які складаються з багатьох тотожних частинок, використовують загальновідомі статистики Фермі–Дірака й Бозе–Айнштайна. Частинки, які описуються за допомогою статистики Фермі–Дірака, називаються ферміонами. Вони мають півцілий спін, а їхнє розташування на енергетичних рівнях обмежене принципом Паулі, згідно з яким в одному квантовомеханічному стані може бути не більше одного ферміона. З іншого боку, частинки з цілим спіном називаються бозонами, а їхній статистичний опис здійснюється за допомогою статистики Бозе–Айнштайна. Кількість бозонів, які можуть перебувати в одному стані, — необмежена.

Існування лише двох типів статистики доводять, використовуючи перестановку двох тотожних частинок, за якої хвильова функція змінюється на фазовий множник. Здійснивши подвійну перестановку, ми отримуємо вихідну задачу. У такий спосіб можна показати, що фазовий множник може дорівнювати +1 (що відповідає бозонам), або –1 (що відповідає ферміонам). Однак у двовимірному випадку подвійна перестановка двох частинок реалізується обведенням однієї частинки навколо іншої на площині. Внаслідок перестановки з'являється фазовий множник  $\exp(i\pi\alpha)$ , де  $\alpha$  — довільне ціле число, яке ще називають статистичним параметром [1, 2]. Коли  $\alpha$  — дробове, то таку статистику називають дробовою. В одновимірному випадку перестановка реалізується інакше, однак можна зробити аналогічні висновки про можливість існування ряду проміжних статистик між загальновідомими статистиками Фермі–Дірака і Бозе–Айнштайна [3–5]. Для частинок, які описуються дробовою статистикою, Вільчек увів поняття еніона (англ. anyon) [1].

Хоча у тривимірному випадку немає частинок, які б описувалися статистиками із цього сімейства, усе ж

такі статистики є цікавими для розгляду й вивчення, оскільки можуть бути використані для моделювання багатьох систем, наприклад, квазічастинок, таких, як квазіелектрони та квазідірки. Їхню дробову статистику відкрито експериментально. Також причиною зміни статистики може бути врахування взаємодії [5, 6].

Застосування різних типів дробової статистики є актуальною задачею. Зокрема досліджено так звану виключну статистику Галдейна (Haldane) [2] в працях [7, 8]. Зв'язок між параметром еніонної статистики та взаємодією в одновимірних системах вивчали у працях [9, 10]. Властивості основного стану системи еніонів на одновимірній оптичній ґратці були предметом розгляду в [11]. Термодинаміку систем із різними типами дробової статистики досліджували в працях [12, 13].

Одним із прикладів дробової статистики є статистика Джентіле [14], або парастатистика. Для неї характерним є особливе заповнення енергетичних рівнів: кількість частинок, які можуть бути на енергетичному рівні, обмежене деяким скінченним числом  $M$ , яке називають порядком статистики. У граничних випадках, коли  $M$  дорівнюватиме одиниці чи нескінченності, ми отримуємо класичне заповнення частинок, як у статистиках Фермі–Дірака чи Бозе–Айнштайна відповідно. Виявляється, зокрема, що можна показати зв'язок між властивостями такої системи та скінченної системи бозонів [15].

У роботі досліджено одновимірну систему гармонічних осциляторів за близької до нуля температури. Інтерес до системи осциляторів пов'язаний із тим, що тепер досить активно вивчають властивості бозонних систем, які перебувають у зовнішньому полі (так звана гармонічна пастка) [16], відповідно, задача про систему гармонічних осциляторів є базовою. Використовуючи зв'язок функції розподілу частинок із термодинамічними величинами, досліджено термодинаміку системи для ідеального випадку та при включенні слабкої взаємодії між частинками.

## I. ВИХІДНІ ВИРАЗИ

### A. Функція розподілу у статистиці Дженгіле

Розглядатимемо систему тотожних частинок, у якій на кожному енергетичному рівні  $\varepsilon_i$  може бути скінченна кількість частинок, яка не перевищує заданого  $M$ . Така статистика, як зазначено у вступі, називається статистикою Дженгіле або загальніше — парастатистикою.

Вираз для чисел заповнення у статистиці Дженгіле має вигляд [4, 14, 17]:

$$f_M(\varepsilon_i, \mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/T} - 1} - \frac{M + 1}{e^{(M+1)(\varepsilon_i - \mu)/T} - 1}. \quad (1)$$

Легко показати, що в граничних випадках  $M = 1$  та  $M \rightarrow \infty$  цей вираз переходить у функції розподілу Фермі-Дірака  $f_{FD}(\varepsilon, \mu)$  та Бозе-Айнштайна  $f_{BE}(\varepsilon, \mu)$  відповідно:

$$f_M(\varepsilon, \mu) = \begin{cases} f_{FD}(\varepsilon, \mu), & M = 1 \\ f_{BE}(\varepsilon, \mu), & M \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (2)$$

Дослідимо поведінку функції  $f_M(\varepsilon, \mu)$  при  $(\varepsilon - \mu)/T \rightarrow 0$  та  $T \rightarrow 0$ .

Для першого випадку переписімо функцію розподілу, звівши праву частину до спільного знаменника

$$f_M(\varepsilon, \mu) = \frac{e^{(M+1)(\varepsilon - \mu)/T} - 1 - (M + 1)(e^{(\varepsilon - \mu)/T} - 1)}{(e^{(\varepsilon - \mu)/T} - 1)(e^{(M+1)(\varepsilon - \mu)/T} - 1)}. \quad (3)$$

У границі  $\frac{\varepsilon - \mu}{T} \rightarrow 0$  ми отримуємо невизначеність типу  $\frac{0}{0}$ , яку легко розв'язати, двічі застосувавши правило Лопітала. Остаточно одержуємо співвідношення:

$$\lim_{\frac{\varepsilon - \mu}{T} \rightarrow 0} f_M(\varepsilon, \mu) = \frac{M^2 + M}{2M + 2} = \frac{M}{2}. \quad (4)$$

Для другої границі  $T \rightarrow 0$  після нескладних перетворень маємо:

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_M(\varepsilon_i, \mu) = \begin{cases} M, & \varepsilon < \mu_0 \\ 0, & \varepsilon > \mu_0 \end{cases}. \quad (5)$$

Ця “сходінка” розвивається з підвищенням температури подібно до функції розподілу Фермі-Дірака. При низьких температурах ( $T \rightarrow 0$ ) хімічний потенціал  $\mu$  практично дорівнює енергії  $\mu_0$ , яка відіграє роль рівня Фермі.

### B. Врахування слабкої взаємодії в системі осциляторів

Розгляньмо одновимірну систему слабковзаємодіючих осциляторів, які підпорядковуються статистиці Дженгіле. Нехай взаємодія між осциляторами має вигляд

$$U(x) = g\delta(x), \quad (6)$$

де  $x$  — координата частинки в одновимірному просторі, а  $g$  — параметр взаємодії, при  $g = 0$  взаємодія відсутня.

Тоді запишімо вираз для гамільтоніана нашої системи:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\hat{p}_j^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 x_j^2 \right] + \sum_{1 \leq j < l \leq N} U(x_j - x_l) = \hat{H}_0 + \hat{U}, \quad (7)$$

де  $\hat{p}_j$  — імпульс частинки,  $m$  — маса однієї частинки,  $\omega$  — частота осциляцій, що відповідає зовнішньому потенціалу пастки.  $\hat{H}_0$  — це гамільтоніан ідеальної системи за відсутності міжчастинкової взаємодії, а  $\hat{U}$  — оператор взаємодії.

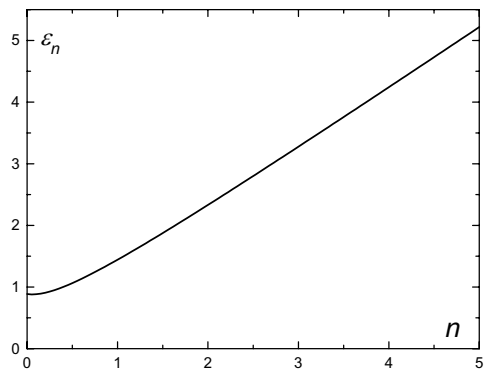


Рис. 1. Енергетичний спектр при  $\lambda = 0.5$ .

Енергетичний спектр системи  $\varepsilon_n$  такий:

$$\varepsilon_n = \hbar\omega n + \lambda c_n, \quad (8)$$

тут  $n$  — номер енергетичного рівня,  $\hbar$  — стала Планка,  $\lambda$  — параметр, пропорційний до  $g$ , а коефіцієнт  $c_n$  — функція складної структури [18] (див. рис. 1). Відраховуватимемо рівні від  $\hbar\omega/2$  та покладемо  $\hbar\omega$  рівним одиниці. Щоб знайти енергетичний спектр системи,

можна також скористатися звичайною стаціонарною теорією збурень.

Коефіцієнт  $c_n$  дорівнює

$$c_n = \frac{1}{n!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (9)$$

При великих  $n$ , використовуючи формулу Стірлінга, матимемо:

$$c_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Відзначмо, що для систем із дробовою статистикою можливий дещо інший підхід до розрахунку енергетичного спектра на підставі квантовомеханічних міркувань [19]. Автори цієї праці розглядали гармонічний осцилятор як систему, гамільтоніан якої є квадратичною формою

$$\hat{H} = \frac{1}{4} \left[ \hat{a}^\dagger \hat{b} + e^{-2\pi i/(M+1)} \hat{b} \hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger \hat{a} + e^{2\pi i/(M+1)} \hat{a} \hat{b}^\dagger \right]$$

за операторами породження  $\hat{a}^\dagger$  і знищення  $\hat{b}$ , що задовольняють таке комутаційне співвідношення:

$$[\hat{b}, \hat{a}^\dagger]_M \equiv \hat{b} \hat{a}^\dagger - e^{2\pi i/(M+1)} \hat{a}^\dagger \hat{b} = 1.$$

У наведених виразах збережено позначення  $M$  для порядку статистики. Вирази для енергетичних рівнів матимуть досить громіздкий вигляд, проте числові розрахунки, зроблені в нашій праці, нескладно провести і для іншої функціональної форми спектра.

## II. РОЗРАХУНОК ТЕРМОДИНАМІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Повну кількість частинок у системі задає співвідношення:

$$N = \sum_n f_M(\varepsilon_n, \mu), \quad (11)$$

а енергія системи пов'язана з  $f_M(\varepsilon_i, \mu)$  так:

$$E = \sum_n \varepsilon_n f_M(\varepsilon_n, \mu). \quad (12)$$

Із формули (11) можна отримати залежність хімічного потенціалу від температури  $T$  та від кількості частинок у системі  $N$ .

Розгляньмо низькотемпературну границю виразу (11) для системи незваємодіючих гармонічних осциляторів, енергетичний спектр якої  $\varepsilon_n = n$ . Щоб спростити аналіз, зручно перейти від дискретної суми до інтегрування за формулою Ейлера–Маклорена

$$\sum_{n=a}^b f(n) \approx \int_a^b f(t) dt + \frac{1}{2} [f(b) + f(a)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)], \quad (13)$$

де  $B_{2k}$  — числа Бернуллі;  $B_2 = 1/6$ ,  $B_4 = -1/30$ , ...

У результаті нескладних обчислень матимемо для  $N$

$$N = M\mu - T \ln \frac{1 - e^{-\mu/T}}{1 - e^{-\mu(M+1)/T}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^{-\mu/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{-\mu(M+1)/T} - 1} \right) + \dots \quad (14)$$

Зокрема у границі низьких температур буде такий зв'язок:

$$N = M\mu + M/2 + \dots,$$

а при  $T = 0$  це наближення дає

$$\mu(T = 0) = \frac{N}{M} - \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Далі розгляньмо термодинамічні величини системи гармонічних осциляторів зі слабкою міжчастинковою взаємодією. Розрахуймо перші поправки за параметром взаємодії  $\lambda$  у виразах для термодинамічних функцій. З цією метою зобразимо хімічний потенціал у вигляді

$$\mu = \mu_{\text{id}} + \Delta\mu, \quad (16)$$

де  $\mu_{\text{id}}$  — хімічний потенціал системи незваємодіючих осциляторів, а  $\Delta\mu$  — поправка, спричинена взаємодією. Використовуючи розклади в ряд за величинами  $\lambda$  і  $\Delta\mu$ , отримаємо для кількості частинок:

$$N = \sum_n \left[ \frac{1}{e^{(n-\mu_{\text{id}})/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(n-\mu_{\text{id}})/T} - 1} \right] + \sum_n (\Delta\mu - \lambda c_n) \frac{e^{(n-\mu_{\text{id}})/T}}{T} \left[ \frac{1}{(e^{(n-\mu_{\text{id}})/T} - 1)^2} - \frac{(M+1)^2 e^{M(n-\mu_{\text{id}})/T}}{(e^{(M+1)(n-\mu_{\text{id}})/T} - 1)^2} \right] + \dots, \quad (17)$$

тут вираз під першою сумою — не що інше, як функція розподілу з енергією незваємодіючих осциляторів  $\varepsilon_n = n$  ( $\lambda = 0$ )

$$f_M^{\text{id}}(n, \mu) = \frac{1}{e^{(n-\mu)/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(n-\mu)/T} - 1}, \quad (18)$$

тому зрозуміло, що перший доданок у правій частині дорівнює  $N$  і відповідні величини знищуються. Зручно ввести позначення для множника у другій сумі:

$$h_M(n) = e^{(n-\mu_{id})/T} \left[ \frac{1}{(e^{(n-\mu_{id})/T} - 1)^2} - \frac{(M+1)^2 e^{M(n-\mu_{id})/T}}{(e^{(M+1)(n-\mu_{id})/T} - 1)^2} \right]. \quad (19)$$

Тоді поправка  $\Delta\mu$  (у першому наближенні) матиме вигляд:

$$\Delta\mu = \lambda \frac{\sum_n c_n h_M(n)}{\sum_n h_M(n)}. \quad (20)$$

Для оцінки значення  $\Delta\mu$  можна, взагалі кажучи, знехтувати другим доданком у виразі (19).

Для енергії після аналогічних перетворень матимемо:

$$\begin{aligned} E &= \sum_n n f_M^{\text{id}}(n, \mu) \\ &+ \lambda \sum_n c_n \left[ f_M^{\text{id}}(n, \mu) - \frac{n}{T} h_M(n) \right] + \dots \\ &= E_{\text{id}} + \lambda \sum_n c_n \left[ f_M^{\text{id}}(n, \mu) - \frac{n}{T} h_M(n) \right] + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Розрахувавши енергію, можна обчислити й інші термодинамічні функції, наприклад, теплоємність системи:

$$C = \frac{dE}{dT}. \quad (22)$$

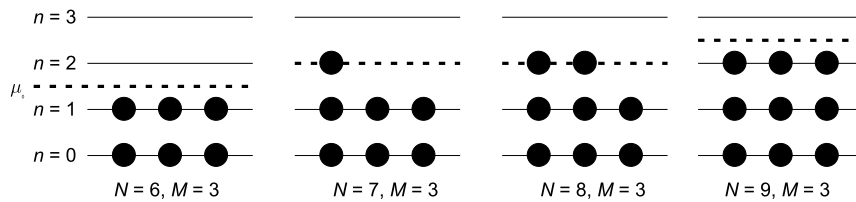


Рис. 2. Ілюстрація заповнення частинками енергетичних рівнів при  $T = 0$ .

Далі знайдемо, якого максимального значення  $n_{\text{max}}$  може набувати  $n$ , аби значення функції розподілу було відмінне від нуля.

$$n_{\text{max}} + \lambda c_{\text{max}} \leq \mu_0. \quad (24)$$

Розглянемо випадок без включення взаємодії ( $\lambda = 0$ ).  $n_{\text{max}}$  — це номер найвищого енергетичного рівня, на якому ще перебувають частинки. За нульової температури всі частинки розмістяться так, аби мати мінімальну енергію. Частинки, які підпорядковують-

### III. ХІМІЧНИЙ ПОТЕНЦІАЛ ПРИ $T = 0$

Проаналізуємо значення  $\mu_0$  хімічного потенціалу при  $T = 0$ . Розглянемо два випадки, коли  $\varepsilon_n > \mu_0$  та  $\varepsilon_n < \mu_0$ .

1)  $\varepsilon_n > \mu_0$ , дослідимо

$$f_M^{\text{id}}(\varepsilon_n, \mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1}.$$

Тоді показники експонент у знаменнику дорівнюватимуть  $+\infty$ , а сам вираз — нулеві.

Нагадаймо, що енергетичний рівень  $\varepsilon_n$  модельної системи дорівнює  $\varepsilon_n = n + \lambda c_n$ , тож можемо зробити висновок, що при  $n$ , які задовольнятимуть умову  $n + \lambda c_n > \mu_0$ , вираз під сумою у формулі (11) дорівнюватиме нулеві.

2)  $\varepsilon_n < \mu_0$ , за такої умови експоненти матимуть показник  $-\infty$ , тож вони дорівнюватимуть нулеві, отже:

$$\begin{aligned} f_M^{\text{id}}(\varepsilon_n, \mu) &= \frac{1}{e^{(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1} \\ &= -1 - \frac{M+1}{-1} = M. \end{aligned} \quad (23)$$

Тобто для всіх значень  $n$ , таких, що  $n + \lambda c_n \leq \mu_0$  вираз під сумою у формулі (11) дорівнює  $M$ .

ся статистиці Бозе, усі впадуть на нульовий енергетичний рівень, оскільки загальна кількість частинок, які можуть бути на енергетичному рівні, необмежена, тож для такої статистики  $n_{\text{max}}$  дорівнюватиме нулеві. Це явище має назву бозе-конденсації. Розміщення частинок, які підпорядковуються статистиці Фермі, обмежене принципом Паулі: на одному енергетичному рівні може бути не більше однієї частинки, тож при  $T = 0$  ферміони займуть стільки енергетичних рівнів, скільки є частинок у системі, тобто  $n_{\text{max}} = N - 1$

(одиничка з'являється через те, що енергетичні рівні відраховуються від нульового). Частинок ж, які підпорядковуються статистиці Дженгіле, можуть розміщуватися на енергетичному рівні кількісно не перевищуючи порядку статистики  $M$ . Таким чином, кількість енергетичних рівнів такої системи можна знайти діленням загальної кількості частинок  $N$  на максимально можливе число заповнення одного рівня  $M$ , причому, коли  $N$  ділиться на  $M$  без остачі, тобто дробова частина

$$\left\{ \frac{N}{M} \right\} = 0,$$

загальна кількість рівнів  $n^{\text{tot}}$  у системі дорівнюватиме:

$$n^{\text{tot}} = \frac{N}{M}, \quad (25)$$

а у випадку ненульової остачі —

$$n^{\text{tot}} = \left[ \frac{N}{M} \right] + 1, \quad (26)$$

тут квадратні дужки означають цілу частину числа.

Ці міркування зручно проілюструвати на простому прикладі, див. рис. 2.

Очевидно, що загальна кількість рівнів, які займають частинки при нульовій температурі, і  $n_{\text{max}}$  пов'язані таким співвідношенням:

$$n^{\text{tot}} = n_{\text{max}} + 1. \quad (27)$$

Ураховавши це, ми отримуємо:

$$\begin{cases} n_{\text{max}} = \frac{N}{M} - 1, & \left\{ \frac{N}{M} \right\} = 0 \\ n_{\text{max}} = \left[ \frac{N}{M} \right], & \left\{ \frac{N}{M} \right\} \neq 0. \end{cases} \quad (28)$$

Звідси матимемо умову для хімічного потенціалу при рівній нульовій температурі:

$$\begin{cases} \mu_0 \geq \frac{N}{M} - 1, & \left\{ \frac{N}{M} \right\} = 0 \\ \mu_0 \geq \left[ \frac{N}{M} \right], & \left\{ \frac{N}{M} \right\} \neq 0, \end{cases} \quad (29)$$

а вираз для  $\mu_0$ :

$$\begin{cases} \mu_0 = \frac{N}{M} - 1 + x, & \left\{ \frac{N}{M} \right\} = 0 \\ \mu_0 = \left[ \frac{N}{M} \right] + x, & \left\{ \frac{N}{M} \right\} \neq 0, \end{cases} \quad (30)$$

де  $x < 1$ .

Якщо загальна кількість частинок у системі  $N$  ділиться на  $M$  без остачі, тобто  $\left\{ \frac{N}{M} \right\} = 0$ , то числовий аналіз поведінки  $\mu$  при  $T \rightarrow 0$  дає для ідеальної системи  $x = \frac{1}{2}$ . Цікаво, що таке значення  $x$  точно отримуємо, якщо в розрахунках замінити суму на інтеграл і застосувати формулу Ейлера–Маклорена.

#### IV. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ РОЗРАХУНКІВ

Використовуючи зв'язок функції розподілу з повним числом частинок у системі  $N$  (див. формулу (11)), ми розраховували хімічний потенціал  $\mu$  як функцію температури.

У нашій задачі відсутній такий параметр, як об'єм, тому звичну умову термодинамічної границі  $N/V = \text{const}$  застосувати не можна. Для системи  $D$ -вимірних осциляторів роль термодинамічної границі виконує умова  $N^{1/D} = \text{const}$ . Її можна отримати на підставі різних міркувань [15,20]. Тому такі величини, як енергія чи температура, в одновимірному випадку зручно нормувати з множником  $1/N$ .

Числові розрахунки для  $N = 100$ ,  $M = 20$  і  $\lambda = 0.1$  та  $0.5$  наведено на рис. 3–6. Суцільною лінією показано залежність для ідеального газу ( $\lambda = 0$ ). Дані, за якими побудовано графіки, подано у таблиці 1.

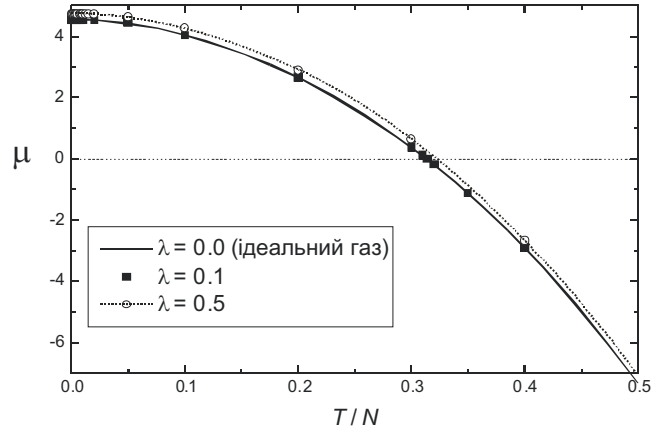


Рис. 3. Температурні залежності хімічного потенціалу  $\mu$  для  $\lambda = 0.1$  (квадратики)  $\lambda = 0.5$  (пунктирна лінія) та  $\lambda = 0$  (суцільна лінія).

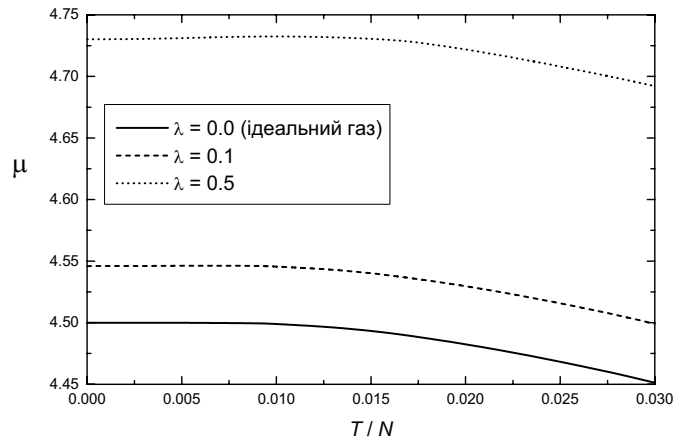


Рис. 4. Температурні залежності хімічного потенціалу  $\mu$  для  $\lambda = 0.1$  (штрихова лінія)  $\lambda = 0.5$  (пунктирна лінія) та  $\lambda = 0$  (суцільна лінія) в області низьких температур.

Як бачимо, з графіка важко якісно судити про відмінності в поведінці  $\mu$  з температурою для випадків ідеального газу та наявності взаємодії. Графічно відмінність між двома кривими натомість можна побачити лише на масштабованій залежності (рис. 4), де включено лише низькотемпературну область. Проте й тут не чітко видно особливості, яка простежується за табличними даними.

$T/N$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.5$
0.000	4.50000	<b>4.54604</b>	<b>4.73021</b>
0.005	4.49995	<b>4.54619</b>	<b>4.73107</b>
0.007	4.49981	<b>4.54626</b>	<b>4.73184</b>
0.008	4.49969	4.54622	<b>4.73217</b>
0.009	4.49951	4.54609	<b>4.73240</b>
0.010	4.49927	4.54585	<b>4.73249</b>
0.012	4.49830	4.54502	4.73225
0.015	4.49596	4.54285	4.73083
0.020	4.48962	4.53677	4.72588
0.050	4.38206	4.43113	4.62871
0.100	3.99287	4.04626	4.26267
0.200	2.60124	2.66193	2.90680
0.300	0.32952	0.39042	0.63345
0.310	0.04907	0.10968	0.35133
0.320	-0.24153	-0.18126	0.05886
0.350	-1.17535	-1.11633	-0.88161
0.400	-2.94485	-2.88847	-2.66472
0.500	-7.32411	-7.27408	-7.07579
1.000	-46.3626	-46.3354	-46.2273

Таблиця 1. Залежність хімічного потенціалу  $\mu$  від температури.

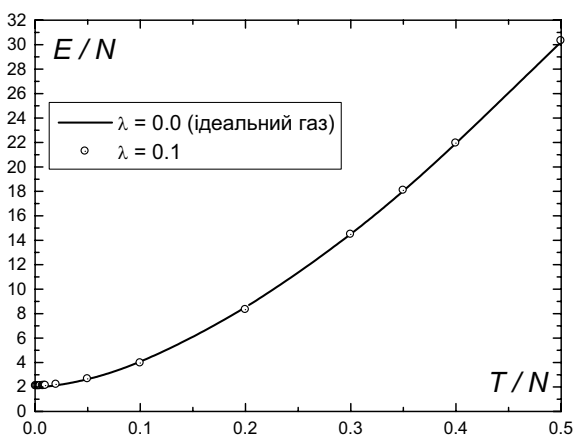


Рис. 5. Температурна залежність повної енергії системи слабковзаємодіючих одновимірних гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле (кружечками позначено взаємодіючу систему, суцільною лінією — ідеальну систему).

З таблиці 1 видно, що для ідеального газу ми маємо спадну функцію, а для значень  $\lambda = 0.1, 0.5$  — незначне відхилення, а саме, зростання  $\mu$  для малих температур (виділено жирним шрифтом у таблиці). Це зростання можна пояснити наявністю слабкої міжчастинкової взаємодії.

Наступним кроком був розрахунок енергії системи за виразом (12). Температурну залежність енергії системи слабковзаємодіючих одновимірних гармонічних осциляторів за статистикою Джентіле показано на рис. 5 і в таблиці 2.

$T$	$E_{id}$	$E(\lambda = 0.1)$	$C_{id}$	$C(\lambda = 0.1)$	$C(\lambda = 0.5)$
0.0	200.00	208.71	0.0000	0.0000	0.0000
0.05	200.00	208.72	0.0098	0.0102	0.0119
0.1	200.01	208.73	0.3469	0.3520	0.3733
0.2	200.09	208.82	1.2850	1.2925	1.3229
0.3	200.25	208.98	1.9756	1.9859	2.0289
0.4	200.49	209.21	2.6349	2.6497	2.7133
0.5	200.78	209.51	3.2907	3.3111	3.4018
0.7	201.57	210.30	4.5732	4.6059	4.7516
0.8	202.06	210.79	5.1859	5.2234	5.3885
0.9	202.60	211.34	5.7723	5.8132	5.9907
1.0	203.21	211.95	6.3298	6.3728	6.5565
2.0	211.82	220.60	10.549	10.583	10.717
5.0	257.00	265.87	19.363	19.391	19.506
10.0	387.24	396.27	32.452	32.486	32.619
20.0	822.87	832.01	53.586	53.565	53.450
30.0	1439.7	1448.4	68.949	68.875	68.568
40.0	2186.8	2194.6	79.795	79.701	79.330
50.0	3023.4	3030.2	86.983	86.890	86.528
100.0			97.266	97.234	97.105

Таблиця 2. Залежність енергії й теплоємності від температури.

Розрахувавши енергію, можемо отримати графік температурної поведінки теплоємності, для цього беремо похідну у виразі (22) різницевим методом, тобто

$$C = \frac{dE}{dT} \approx \frac{E(T + \Delta T) - E(T)}{\Delta T}$$

при малому значенні  $\Delta T$ . Аналітично робити ці розрахунки немає сенсу, оскільки залежність хімічного потенціалу  $\mu$  від температури можна одержати лише чисельно. Результати наведено на рис. 6.

При великих температурах графік функції теплоємності слабковзаємодіючих осциляторів має асимптоту  $C/N = 1$ , для прикладу,  $D$ -вимірний ідеальний газ має асимптоту  $D/2$  (в одновимірному випадку матимемо  $1/2$ ). Така особливість виникає внаслідок різної кількості ступенів

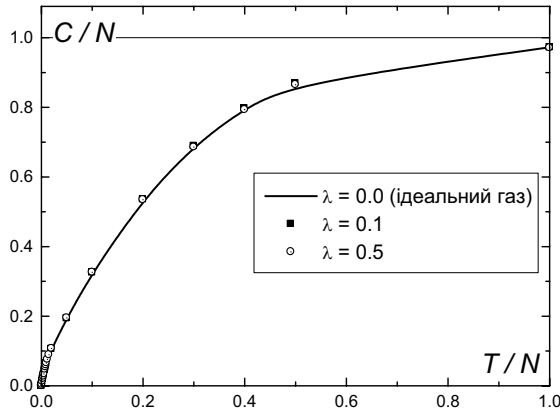


Рис. 6. Температурна поведінка теплоємності в системі слабковзаємодіючих одновимірних гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле.

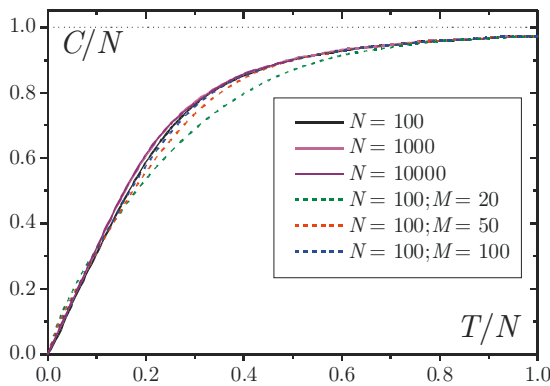


Рис. 7. (кольоровий он-лайн). Температурна поведінка теплоємності системи невзаємодіючих одновимірних гармонічних осциляторів з різними параметрами.

вільності в системах; система гармонічних осциляторів має вдвічі більше ступенів вільності, ніж система ідеального газу, тож для системи  $D$ -вимірних гармо-

нічних осциляторів при  $T \rightarrow \infty$  теплоємність системи  $C/N$  дорівнює  $D$ . Енергія системи при великих температурах є лінійною функцією температури.

На рис. 6 наведено для ілюстрації результати розрахунку теплоємності ідеальної системи осциляторів, що підпорядковуються статистиці Бозе (суцільні лінії) та дробовій статистиці (штрихові лінії) при різних значеннях  $N$  та  $M$ .

## V. ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто систему одновимірних слабковзаємодіючих гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле. Для дослідження термодинаміки такої системи використано вирази термодинамічних величин через числа заповнення.

Аналітично проаналізовано низькотемпературну границю хімічного потенціалу та поправки, пов'язані зі взаємодією.

Чисельно розраховано температурні залежності хімічного потенціалу, енергії та теплоємності для ідеальної системи та системи зі слабкою взаємодією. Результати чисельних розрахунків подано й вигляді графіків і таблиць. Виявлено незначне зростання температурної залежності хімічного потенціалу в області низьких температур за наявності слабкої міжчастинкової взаємодії.

Показано, що з підвищенням температури відповідні функції прямують до значень, отриманих для ідеального газу (з відповідною статистикою), що пов'язано з послабленням впливу взаємодії.

Результати цієї роботи можна застосовувати при аналізі фізичних систем зі слабкою взаємодією, для яких дробова статистика Джентіле виникає ефективно, зокрема внаслідок скінченної кількості частинок [15]. Поширення результатів на системи вищої вимірності буде предметом окремого дослідження.

- [1] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982).
- [2] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **67**, 937 (1991).
- [3] А. Б. Говорков, Физ. эл. част. ат. яд. **14**, 1229 (1983).
- [4] A. Khare, *Fractional Statistics and Quantum Theory* (World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1998).
- [5] С. В. Машкевич, Диссерт. д-ра физ.-мат. наук, Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко (Киев, 2005).
- [6] К. С. Кузьмин, в кн. *Астрофизика и физика микромира* (Изд-во Иркут. ун-та, Иркутск, 1998), с. 206.
- [7] M. C. Bergere, J. Math. Phys. **41**, 7252 (2000).
- [8] A. Comtet, S. N. Majumdar, S. Ouvry, J. Phys. A **40**, 11255 (2007).
- [9] M. V. N. Murthy, R. Shankar, Phys. Rev. Lett. **73**, 3331 (1994).
- [10] Z. N. C. Ha, Nucl. Phys. B. **435**, 604 (1995).
- [11] Yajiang Hao, Yunbo Zhang, Shu Chen, Phys. Rev. A **79**, 043633 (2009).
- [12] Wu-Sheng Dai, Mi Xie, Ann. Phys. **309**, 295(2004).
- [13] G. G. Potter, G. Müller, M. Karbach, Phys. Rev. E **75**, 061120 (2007).
- [14] G. Gentile, Nuovo Cim. **17**, 493 (1940).
- [15] A. Rovenchak, Fiz. Nizk. Temp. **35**, 510 (2009); Low Temp. Phys. **35**, 400 (2009).
- [16] C. J. Pethick, H. Smith *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, 2001).
- [17] А. Исихара, *Статистическая физика* (Мир, Москва, 1973).
- [18] A. A. Rovenchak, J. Low Temp. Phys. **148**, 411 (2007).
- [19] Y. Shen, W.-Sh. Dai, M. Xie, Phys. Rev. A **75**, 042111 (2007).
- [20] A. Posazhennikova, Rev. Mod. Phys. **78**, 1111 (2006).

M. I. ТОПІЛКО, А. А. РОВЕНЧАК

**THERMODYNAMIC FUNCTIONS OF ONE-DIMENSIONAL WEAKLY-INTERACTING  
HARMONIC OSCILLATORS WITH THE GENTILE STATISTICS**

M. I. Topilko, A. A. Rovenchak

*Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv  
12, Drahomanov St., Lviv, UA-79005, Ukraine*

A one-dimensional system of harmonic oscillators obeying the fractional Gentile statistics is considered. For such a system, the temperature dependences of the chemical potential, energy and heat capacity of the model system are calculated using the known expression for the distribution function. The peculiarities of the chemical potential at the zero temperature are analyzed.