

ЕКРАНУВАННЯ ВЗАЄМОДІЙ ТА ЙОНІЗАЦІЙНА РІВНОВАГА В ЗОРЯНИХ ФОТОСФЕРАХ

М. В. Ваврух, О. М. Стельмах, С. В. Смеречинський
*Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра астрофізики,
вул. Кирила і Мефодія, 8, Львів, 79005, Україна*

(Отримано 8 липня 2009 р.; в остаточному вигляді — 1 жовтня 2009 р.)

З метою розрахунку коефіцієнта неперервного поглинання у фотосферах зір різних спектральних класів у наближенні закону діючих мас досліджено температурну залежність рівноважних концентрацій частинок у водневій та воднево-гелієвій моделях фотосфер в інтервалі температур $(5 \cdot 10^3 \div 5 \cdot 10^4)$ К та густин $(10^{-7} \div 10^{-5})$ г/см³ у межах самоузгодженого розрахунку статистичної суми атома водню. Установлено немонотонну температурну залежність параметра екранування, а також концентрації від'ємних йонів водню, з чим пов'язаний основний механізм поглинання в неперервному спектрі зір ранніх та середніх спектральних класів. Проаналізовано відхилення результатів, одержаних у використаному наближенні, від тих, що отримують за допомогою стандартних співвідношень Саха.

Ключові слова: зоряні фотосфери, екранування взаємодій, локалізовані стани, йонізаційна рівновага, температурна залежність.

PACS number(s): 97.10.Ex

I. ВСТУП

Елементарні процеси взаємодії фотонів з атомними об'єктами зоряних фотосфер відбуваються в середовищі частково йонізованої плазми. Вільні електричні заряди спричиняють кореляційні ефекти, які впливають на формування енергетичного спектра та хвильових функцій атомів, йонів, молекул і тим самим — на величини поперечних перерізів відповідних реакцій, а також на йонізаційну рівновагу. Однак і в ранніх [1–7], і в пізніших роботах (див. [8–12]), присвячених розрахункам коефіцієнта неперервного поглинання чи поперечних перерізів процесів взаємодії фотонів з атомами та йонами, як правило, середовище до уваги не береться, а розрахунки концентрації частинок ґрунтуються на використанні співвідношень Саха, що є спрощеним варіантом закону діючих мас [13, 14].

Як відомо, константа рівноваги в законі діючих мас визначається як взаємодією між частинками, так і статистичними сумами атомів, йонів та електронів [13]. Особливістю зоряних фотосфер є мала густина речовини й відносно високі температури. Через це фотосфери є слабо неідеальними системами, тому наближено можна розглядати їх як суміш ідеальних газів атомів, йонів та електронів. Однак розбіжність статистичної суми ізольованого атома водню чи воднеподібних атомів створює суттєві труднощі для застосування закону діючих мас. Відомі різні формальні варіанти регуляризації статсуми атома водню, які запропонували свого часу Планк [15], Бриллюен [16], Ларкін [17], Ебелінг [18], Ріве і Ромпе [19], Еккер і Вайзель [20] та інші, що використовують різні процедури “обрізання” розбіжного ряду.

Наявність вільних зарядів спричиняє екранування взаємодій, що у слабо неідеальній невиродженій системі зводиться до заміни кулонівського потенціалу

взаємодії електрона з протоном на екранований потенціал Дебая

$$\tilde{V}(r) = -\frac{e^2}{r} \exp(-\kappa r) = -\frac{2 Ry}{r^*} \exp(-\xi r^*), \quad (1)$$
$$\kappa = \left(4\pi e^2 \sum_{s=1}^{s_0} z_s^2 n_s [k_B T]^{-1} \right)^{1/2},$$

де $\xi = \kappa a_0$ — безрозмірний параметр екранування, $r^* = r a_0^{-1}$ (a_0 — радіус Бора, n_s — концентрація частинок s -го сорту, z_s — їхня валентність, T — температура). Кількість квантових станів електрона в полі з потенціалом (1) є скінченною, що знімає проблему розбіжності статсуми атома водню. Ця ідея відома давно, такий підхід простий і привабливий, але вимагає знання залежності енергетичного спектра електрона в екранованому полі від параметра екранування, як справедливо відзначили автори [13].

У полі екранованого протона кількість квантових станів є скінченною, а енергетичні рівні визначаються квантовими числами n, l . Квантовомеханічна задача розрахунку залежності енергетичного спектра від параметра екранування досліджена як чисельними, так і аналітичними методами (див. [21–23]), а також посилення, наведені в цих роботах). Зокрема в роботі [23] за допомогою чисельного інтегрування рівняння Шредингера для нижчих енергетичних рівнів розраховано критичні значення параметра екранування $\xi_{n,l}$, при яких рівень $E_{n,l}$ переходить у неперервний спектр, а також протабульовано залежність енергетичних рівнів від ξ . У праці [21] для станів з безвузловими радіальними функціями ($1s, 2p, 3d, 4f, \dots$) знайдено точні аналітичні розв'язки у вигляді безмежнократних інтегралів за деяким числовим параметром і розроблено процедуру їх використання для наближеного розрахунку залежності енергетичних рівнів від параметра екранування. У праці [22] за допомогою

іншого підходу одержано наближені аналітичні вирази для енергетичних рівнів усіх квантових станів як функцій n, l та параметра ξ . Як у роботі [23], так і в [22] досліджено явище кросоверу енергетичних рівнів — перетину кривих $E_{n,l}(\xi)$ для високозбуджених рівнів в околі точок $\xi_{n,l}$, коли $E_{n_2,l_2} < E_{n_1,l_1}$ при $n_2 > n_1$, але $l_2 < l_1$.

Отже, проблема розбіжності статсуми знімається. Однак при розв'язуванні рівняння Шредингера параметр ξ є незалежним числовим параметром, а незалежними параметрами в задачі про йонізаційну рівновагу виступають температура й густина (або концентрація баріонів). Тому виникає допоміжна задача про залежність параметра екранування від температури й густини, що в нашій роботі виконано в самоузгодженому наближенні. Ми встановили немонотонну температурну залежність параметра екранування. Це дало змогу дослідити температурну залежність концентрацій різних частинок у межах закону діючих мас та виявити область температур, де наближено застосовні стандартні співвідношення Саха. Специфіка задачі, яку ми розглядаємо, зумовлена слабким екрануванням, на відміну від йонізаційної рівноваги у твердих тілах (див. [13]), що вимагає врахування великої кількості локалізованих станів електрона в полі екранованого заряду. Ми використали аналітичну залежність енергетичних рівнів від параметра ξ , однак бачимо тепер, що це можна зробити також наближено, використовуючи результати числового інтегрування рівняння Шредингера з потенціалом (1), наприклад з роботи [23].

II. МОДЕЛЬ ВОДНЕВОЇ ПЛАЗМИ. ЗАКОН ДІЮЧИХ МАС

Найбільш поширеними хімічними елементами у фотосферах зір є водень і гелій, частка всіх інших елементів низька. Гелій може бути у вигляді нейтральних атомів (He), йонів (He⁺) чи α -частинок. Поряд із нейтральними атомами водню (H) існують протони (H⁺) та від'ємні йони (H⁻). Для кожного з цих хімічних елементів є дві стадії йонізації, тому опис йонізаційної рівноваги цих елементів цілком ідентичний. Звичайно, у фотосферах зір пізніх спектральних класів є молекули та молекулярні йони водню, але опис фотосфер цих зір не є завданням цієї статті.

Для означеності розглянемо йонізаційну рівновагу в моделі водневої однорідної плазми, що перебуває при температурі T з густиною маси ρ в об'ємі V .

Згідно з концепцією закону діючих мас і прийнятим тут наближенням, атоми водню, протони та від'ємні йони водню будемо розглядати як окремі сорти частинок, що не взаємодіють між собою. На першій стадії відбувається процес йонізації-рекомбінації $H^- \rightleftharpoons H + e$, який, згідно з законом діючих мас [24], описуємо співвідношенням

$$\frac{n_H n_e}{n_{H^-}} = \frac{Z_H Z_e}{V Z_{H^-}}, \quad (2)$$

де n_{H^-} , n_H, n_e — концентрації йонів H⁻, атомів та електронів, Z_{H^-} , Z_H, Z_e — статистичні суми йона H⁻, нейтрального атома та електрона. Переходячи до координат центра мас, запишімо Z_{H^-} , Z_H у вигляді

$$\begin{aligned} Z_H &= Z_{\text{ц. м. (H)}} \tilde{Z}_H, \\ Z_{H^-} &= Z_{\text{ц. м. (H}^-)} \tilde{Z}_{H^-}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $Z_{\text{ц. м. (H)}}$ — статистична сума центра мас атома водню, $Z_{\text{ц. м. (H}^-)}$ — така ж величина для йона H⁻, а \tilde{Z}_H та \tilde{Z}_{H^-} — статистичні суми відносного руху електронів в атомі та йоні (статсуми за внутрішніми, електронними ступенями вільності). Нехтуючи різницею мас атома водню та йона H⁻, приймімо, що $Z_{\text{ц. м. (H)}} = Z_{\text{ц. м. (H}^-)}$,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{H^-} &= \exp\left(-\frac{E_{H^-}(\xi)}{k_B T}\right), \\ \tilde{Z}_H &= 2 \sum_{n \geq 1} \sum_{l \geq 0} (2l+1) \exp\left(-\frac{E_{n,l}(\xi)}{k_B T}\right), \\ \frac{1}{V} Z_e &= 2 \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (4)$$

де m_e — маса електрона, $E_{n,l}(\xi)$ — енергетичні рівні електрона в екранованому полі протона, $E_{H^-}(\xi)$ — енергія нерухомого йона H⁻, усі взаємодії в якому екрановані.

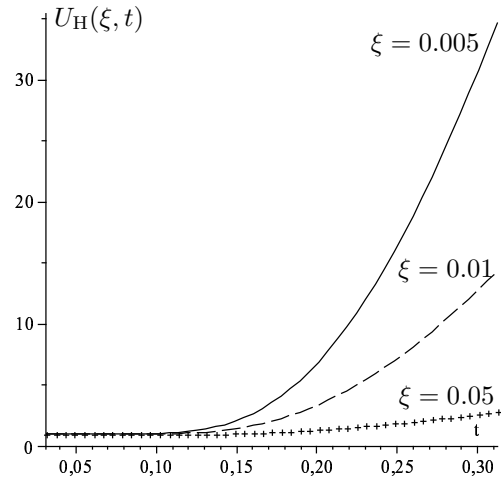


Рис. 1. Температурна залежність функції $U_H(\xi, t)$ при фіксованих ξ .

Для зручності перейдімо до безрозмірних температури, енергії та концентрації баріонів

$$\begin{aligned} t &= k_B T \left\{ \frac{e^2}{2a_0} \right\}^{-1}, \quad \varepsilon_{n,l}(\xi) = E_{n,l}(\xi) \left\{ \frac{e^2}{2a_0} \right\}^{-1}, \\ n^* &= \frac{\rho}{m_H} a_0^3. \end{aligned} \quad (5)$$

Статистичну суму атома \tilde{Z}_H запишімо так

$$\tilde{Z}_H = 2U_H(\xi, t) \exp\left(-\frac{\varepsilon_{1,0}(\xi)}{t}\right), \quad (6)$$

$$U_H(\xi, t) = 1 + \sum_{n \geq 2} \sum_{l \geq 0} (2l+1) \exp\left\{\frac{1}{t}[\varepsilon_{1,0}(\xi) - \varepsilon_{n,l}(\xi)]\right\},$$

маючи на увазі, що l не може перевищувати значення $n-1$, але не всі високоезбуджені рівні з великими l можуть реалізуватися при заданих n через наявність кросоверу. На рисунку 1 наведено залежність функції $U_H(\xi, t)$ від температури при фіксованих значеннях ξ , які за порядком величини відповідають зоряним фотосферам. Як видно з рисунка, при температурах $T \leq 1.5 \cdot 10^4$ К функція $U_H(\xi, t)$ мало відрізняється від одиниці, однак зростає експоненційно при високих температурах.

Таким чином, першу стадію йонізації описуємо співвідношенням

$$n_H^* = 4 \frac{n_{H^-}^*}{n_e^*} \left\{\frac{t}{4\pi}\right\}^{3/2} U_H(\xi, t) \exp\left[-\frac{1}{t}I_1(\xi)\right], \quad (7)$$

де $I_1(\xi) = \varepsilon_{1,s}(\xi) - \varepsilon_{H^-}(\xi)$ — енергія йонізації йона H^- у рідбергах; а $n_H^* = n_H a_0^3$, $n_{H^-}^* = n_{H^-} a_0^3$, $n_e^* = n_e a_0^3$ — безрозмірні концентрації частинок різних сортів. У вакуумі $I_1(0) \equiv 0.0555\dots$, а при екрануванні всіх взаємодій $I_1(\xi) \cong 0.0555\dots + O(\xi^2)$ для $\xi \ll 1$ ($\varepsilon_{1,0}(\xi) = -1 + 2\xi + O(\xi^2)$ у цій же області).

Другу стадію йонізації водню з утворенням протонів й електронів ($H \rightleftharpoons p + e$) описуємо співвідношенням

$$n_p^* = \frac{n_H^*}{n_e^*} \left\{\frac{t}{4\pi}\right\}^{3/2} \frac{1}{U_H(\xi, t)} \exp\left[-\frac{1}{t}I_2(\xi)\right], \quad (8)$$

де $I_2(\xi) = -\varepsilon_{1,0}(\xi)$ — енергія йонізації атома з екранованою взаємодією електрона з протоном. При $U_H(\xi, t) = 1$ і $\xi = 0$ формули (7), (8) відповідають добре відомим співвідношенням Саха.

Для зручності наступних розрахунків введемо відносні концентрації частинок

$$y_{H^-} = \frac{n_{H^-}^*}{n^*}, \quad y_H = \frac{n_H^*}{n^*}, \quad y_p = \frac{n_p^*}{n^*}, \quad y_e = \frac{n_e^*}{n^*} \quad (9)$$

з очевидною умовою нормування

$$y_{H^-} + y_H + y_p = 1 \quad (10)$$

($n^* = n_H^* + n_{H^-}^* + n_p^*$). З рівнянь (7), (8), (10) знаходимо

$$\begin{aligned} y_{H^-} &= y_e^2 \{y_e^2 + y_e C_H + C_H C_p\}^{-1}, \\ C_H &= \frac{4}{n^*} \left(\frac{t}{4\pi}\right)^{3/2} U_H(\xi, t) \exp\left[-\frac{1}{t}I_1(\xi)\right], \\ C_p &= \frac{1}{n^*} \left(\frac{t}{4\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{U_H(\xi, t)} \exp\left[-\frac{1}{t}I_2(\xi)\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Використовуючи умову електронейтральності

$$n_e^* + n_{H^-}^* = n_p^* \quad (12)$$

та співвідношення (7), (8), одержуємо рівняння для невідомого y_e :

$$y_e = \{C_H C_p - y_e^2\} \{y_e^2 + y_e C_H + C_H C_p\}^{-1}. \quad (13)$$

Безрозмірний параметр екранування, що фігурує у формулах (6)–(13), не є незалежним, він — функція температури t і концентрації заряджених частинок. У водневій моделі

$$\xi = \left\{\frac{8\pi}{t} n^* [y_e + y_p + y_{H^-}]\right\}^{1/2}. \quad (14)$$

Використовуючи рівняння (7), (9)–(13), запишемо ξ у такому вигляді

$$\xi = \left\{\frac{16\pi n^*}{t} y_e \left[1 + \frac{y_e}{y_e^2 + y_e C_H + C_H C_p}\right]\right\}^{1/2}. \quad (15)$$

У прийнятому наближенні система рівнянь (13), (15) є точною. Як ми побачимо далі, концентрація йонів H^- на декілька порядків менша за сумарну концентрацію важких частинок, тому обчислення параметра екранування в першому наближенні достатньо проводити без урахування негативних йонів, чому відповідає нехтування членами y_e^2 у рівняннях (13), (15). Виключаючи y_e із цієї системи рівнянь, одержуємо нелінійне рівняння для безрозмірного параметра екранування

$$\begin{aligned} (4\pi)^{3/2} \left(\frac{\xi}{4\sqrt{\pi}}\right)^4 t^{1/2} U_H(\xi, t) \exp\left[-\frac{\varepsilon_{1,0}(\xi)}{t}\right] \\ + \left(\frac{\xi}{4\sqrt{\pi}}\right)^2 t = n^*, \end{aligned} \quad (16)$$

розв'язок якого вдається дослідити майже аналітично. Оскільки n^* є малим параметром, то при високих температурах ($t \geq \frac{1}{5}$) розв'язок цього рівняння має асимптотику

$$\xi_0^{(1)} = 4\sqrt{\pi} \left(\frac{n^*}{t}\right)^{1/2} + \dots, \quad (17)$$

що відповідає майже повній йонізації, а при низьких ($t \leq 0, 1$), коли ступінь йонізації малий,

$$\xi_0^{(2)} = 4^{5/8} \pi^{1/8} \frac{(n^*)^{1/4}}{t^{1/8}} \exp\left[-\frac{1}{4t}\right] + \dots \quad (18)$$

Ця залежність при заданих n^* зображена на рисунках 2а–2с точковими (верхніми) кривими. До рівняння (16) можна застосувати метод ітерацій, використовуючи $\xi_0^{(1)}$ та $\xi_0^{(2)}$ як нульові наближення. У першому наближенні знаходимо такі розв'язки (у відповідних інтервалах температур):

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1)} &= \xi_0^{(1)} \left\{1 - 4\pi^{3/2} \frac{n^*}{t^{3/2}} U_H(\xi_0^{(1)}, t) \exp\left[\frac{1 - 2\xi_0^{(1)}}{t}\right]\right\}, \\ \xi_1^{(2)} &= \xi_0^{(2)} \left\{1 - \frac{t^{3/4}}{(n^*)^{1/4} \pi^{3/4} 4^{7/4}} \exp\left[-\frac{1}{2t}\right]\right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

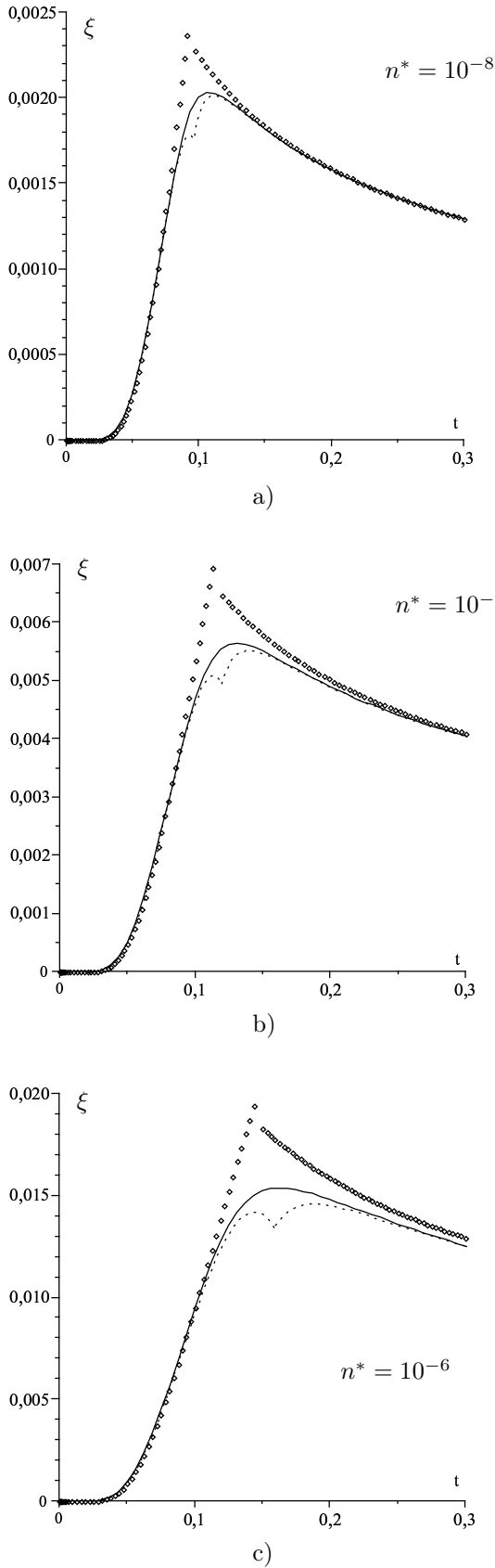


Рис. 2. Температурна залежність параметра екранування ξ при фіксованих значеннях густини фотосфери.

Залежність $\xi(t)$, що описується формулами (19), зображена на рисунках 2а–2с пунктирними (нижні-

ми) кривими. При цьому для $U_H(\xi, t)$ використано інтерполяційну формулу, побудовану на основі виконаних раніше розрахунків цієї функції, а саме

$$U_H(\xi, t) = 1 + \varphi(\xi) \exp\left(\frac{\varepsilon_{1,0}(\xi)}{t}\right);$$

$$\varphi(\xi) = 863.87(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi_1 - \xi_2)^{-1}(\xi_1 - \xi_3)^{-1} + 362.88(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi_2 - \xi_1)^{-1}(\xi_2 - \xi_3)^{-1} + 209.457(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi_3 - \xi_1)^{-1}(\xi_3 - \xi_2)^{-1} \quad (20)$$

при $\xi_1 = 0.005$; $\xi_2 = 0.01$; $\xi_3 = 0.015$.

Суцільні криві рисунків 2а–2с зображують “точний” розв’язок, знайдений із системи рівнянь (13), (15) при інтерполяції (20), одержаний чисельним методом. Як видно з цих рисунків, пунктирні криві не тільки якісно відображають залежність параметра екранування від температури, а й, на диво, близькі до “точного” чисельного розв’язку. Характерною особливістю температурної залежності ξ є наявність максимуму, положення якого зміщується в область вищих температур зі збільшенням густини плазми. Максимум параметра екранування розташований в області $(2 \div 3) \cdot 10^4$ К. Висота максимуму також зростає зі збільшенням загальної концентрації важких частинок.

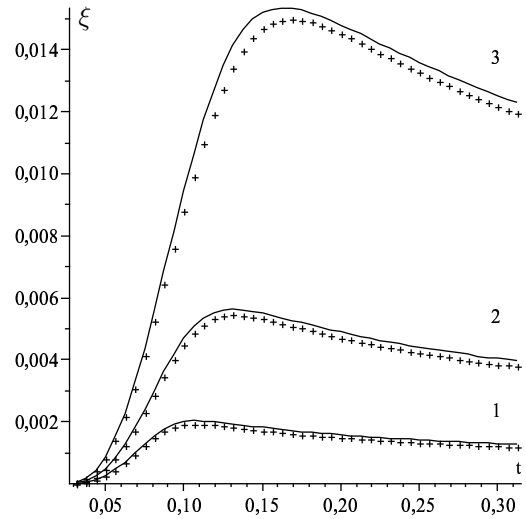


Рис. 3. Температурна залежність параметра екранування ξ при фіксованих значеннях густини фотосфери. Кривий 1 відповідають загальній концентрації баріонів $n^* = 10^{-8}$, 2 – $n^* = 10^{-7}$, 3 – $n^* = 10^{-6}$.

На рисунку 3 зображено “точний” чисельний розв’язок рівняння (16) (суцільні криві) і наближений, знайдений при $U_H(\xi, t) = 1$, $\varepsilon_{1,0} = -1$. Як бачимо, відносна похибка зростає й дорівнює в максимумі близько 5%. Залежність ξ від густини є суттєвою, але для фотосфери Сонця ($10^{-8} < n^* < 10^{-6}$) параметр екранування малий ($\xi \approx 10^{-2}$).

Залежність розв’язку рівняння (13) від температури й загальної концентрації ілюструє рисунок 4, при цьому хрестики відповідають наближенню $U_H(\xi, t) = 1$.

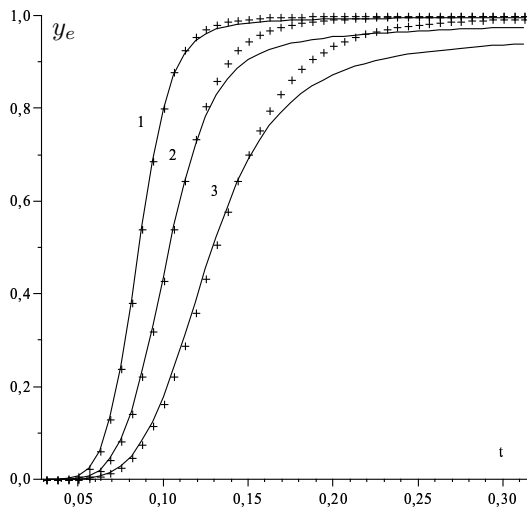


Рис. 4. Температурна залежність відносної концентрації електронів. Хрестики відповідають наближенню $U_H(\xi, t) = 1$. Криві 1 відповідають загальній концентрації баріонів $n^* = 10^{-8}$, 2 — $n^* = 10^{-7}$, 3 — $n^* = 10^{-6}$.

Температурна й концентраційна залежність відносної концентрації протонів та атомів водню, розрахована за формулами (7), (8), подана на рисунку 5. Відповідні криві є монотонними функціями температури.

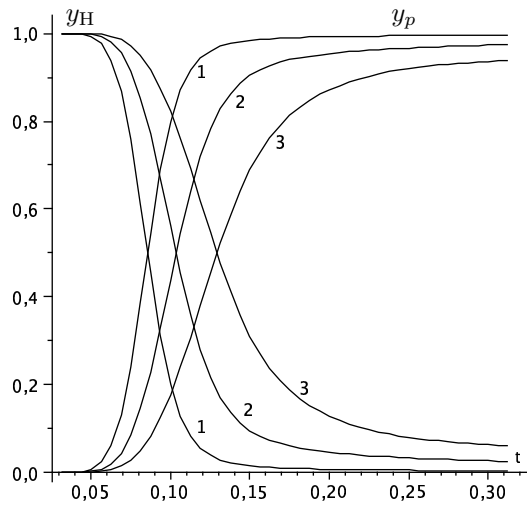


Рис. 5. Температурна залежність відносної концентрації нейтральних атомів водню та протонів. Криві 1 відповідають загальній концентрації баріонів $n^* = 10^{-8}$, 2 — $n^* = 10^{-7}$, 3 — $n^* = 10^{-6}$.

Відносна концентрація йонів H^- є немонотонною функцією температури, максимум якої розташований в області $(12 \div 19)10^3$ K і зміщується в бік вищих температур зі зростанням загальної густини плазми (рисунку 6). Як бачимо, концентрація йонів H^- на 4–6 порядків нижча за сумарну концентрацію атомів та протонів, тому розрахувати параметр екранування можна без урахування від'ємних йонів.

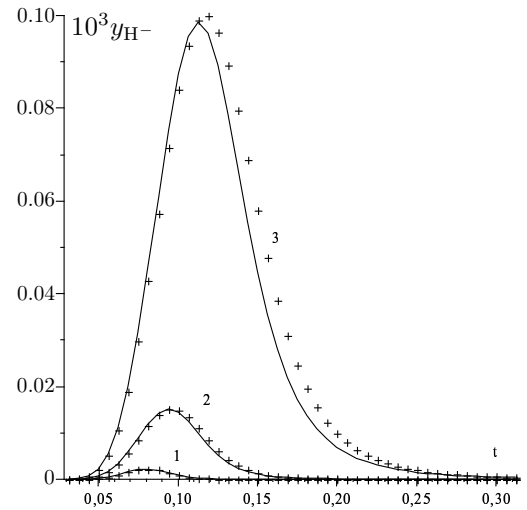


Рис. 6. Температурна залежність відносної концентрації негативних йонів водню. Хрестики відповідають наближенню $U_H(\xi, t) = 1$. Крива 1 відповідає загальній концентрації баріонів $n^* = 10^{-8}$, 2 — $n^* = 10^{-7}$, 3 — $n^* = 10^{-6}$.

III. МОДЕЛЬ ВОДНЕВО-ГЕЛІЄВОЇ ПЛАЗМИ

Розглянемо далі реалістичнішу модель фотосфери, у якій парціальна густина водню дорівнює $\rho_H = \rho X$, а гелію $\rho_{He} = \rho Y$, де ρ — загальна густина ($X + Y = 1$). Йонізація як водню, так і гелію проходить у дві стадії, незалежно для кожного хімічного елемента. Як бачимо з розрахунків попереднього параграфу, наближення $U_H(\xi, t) = 1$ є цілком допустимим для області низьких температур. У зв'язку з тим, що перший потенціал йонізації ізолюваного атома гелію в рідбергах становить $I_3^0 = 1.81 \dots$, а другий $I_4^0 = 4.00$, то температури, які ми розглядаємо, є низькими стосовно йонізації гелію. Тому приймемо наближення $U_{He}(\xi, t) = 1$, а зміну потенціалів йонізації за рахунок екранування врахуємо в лінійному наближенні за параметром ξ :

$$I_3(\xi) = I_3^0 - 6\xi + \dots ; \quad I_4(\xi) = I_4^0 - 4\xi + \dots \quad (21)$$

Щоб описати йонізаційну рівновагу в наближенні закону діючих мас, до співвідношень (7)–(8) слід додати співвідношення, що описують дві стадії йонізації гелію:

$$n_{He^+}^* = 4 \frac{n_{He}^*}{n_e^*} \left(\frac{t}{4\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{1}{t} I_3(\xi) \right], \quad (22)$$

$$n_{He^{++}}^* = \frac{n_{He^+}^*}{n_e^*} \left(\frac{t}{4\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{1}{t} I_4(\xi) \right].$$

Умову електронейтральності тепер запишемо у вигляді:

$$n_e^* + n_{H^-}^* = n_p^* + n_{He^+}^* + 2n_{He^{++}}^* \quad (23)$$

За аналогією до формул (9) введемо відносні концентрації

$$\begin{aligned} y_{\text{H}^-} &= n_{\text{H}^-} \left(X \frac{\rho}{m_{\text{H}}} \right)^{-1}, & y_{\text{H}} &= n_{\text{H}} \left(X \frac{\rho}{m_{\text{H}}} \right)^{-1}, & y_p &= n_p \left(X \frac{\rho}{m_{\text{H}}} \right)^{-1}, \\ y_{\text{He}} &= n_{\text{He}} \left(Y \frac{\rho}{4m_{\text{H}}} \right)^{-1}, & y_{\text{He}^+} &= n_{\text{He}^+} \left(Y \frac{\rho}{4m_{\text{H}}} \right)^{-1}, & y_{\text{He}^{++}} &= n_{\text{He}^{++}} \left(Y \frac{\rho}{4m_{\text{H}}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

а також

$$y_e = n_e \left(\frac{\rho}{m_{\text{H}}} \right)^{-1}. \quad (25)$$

Із системи рівнянь (22)–(24) знаходимо

$$y_{\text{He}} = y_e^2 \{ y_e^2 + y_e C_{\text{He}^+} + C_{\text{He}^+} C_{\text{He}^{++}} \}^{-1}, \quad (26)$$

де

$$C_{\text{He}^+} = \frac{4}{n^*} \left(\frac{t}{4\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{1}{t} I_3(\xi) \right], \quad (27)$$

$$C_{\text{He}^{++}} = \frac{1}{n^*} \left(\frac{t}{4\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{1}{t} I_4(\xi) \right].$$

При цьому y_{H^-} визначаємо формулами (11), у яких тепер n^* є загальною безрозмірною концентрацією баріонів.

Оскільки

$$y_{\text{H}} = \frac{y_{\text{H}^-} C_{\text{H}}}{y_e}, \quad y_p = \frac{y_{\text{H}^-} C_p C_{\text{H}}}{y_e^2}, \quad (28)$$

$$y_{\text{He}^+} = \frac{y_{\text{He}} C_{\text{He}^+}}{y_e}, \quad y_{\text{He}^{++}} = \frac{y_{\text{He}} C_{\text{He}^+} C_{\text{He}^{++}}}{y_e^2}, \quad (29)$$

то умова електронейтральності набирає вигляду

$$y_e = X \frac{C_p C_{\text{H}} - y_e^2}{y_e^2 + y_e C_{\text{H}} + C_{\text{H}} C_p} + \frac{Y}{4} \cdot \frac{C_{\text{He}^+} y_e + 2C_{\text{He}^{++}} C_{\text{He}^+}}{y_e^2 + y_e C_{\text{He}^+} + C_{\text{He}^+} C_{\text{He}^{++}}}. \quad (30)$$

У воднево-гелієвій моделі безрозмірний параметр екранування визначаємо виразом:

$$\xi = a_0 \left\{ \frac{4\pi e^2}{k_{\text{B}} T} [n_e + n_p + n_{\text{He}^+} + n_{\text{H}^-} + 4n_{\text{He}^{++}}] \right\}^{1/2}. \quad (31)$$

Використовуючи формули (24), (28) та рівняння (30), перетворимо співвідношення (31) до такої форми:

$$\xi = \left\{ \frac{16\pi}{t} n^* \right\}^{1/2} \left\{ y_e + X \frac{y_e^2}{y_e^2 + y_e C_{\text{H}} + C_{\text{H}} C_p} + \frac{Y}{4} \cdot \frac{C_{\text{He}^+} C_{\text{He}^{++}}}{y_e^2 + y_e C_{\text{He}^+} + C_{\text{He}^+} C_{\text{He}^{++}}} \right\}^{1/2}. \quad (32)$$

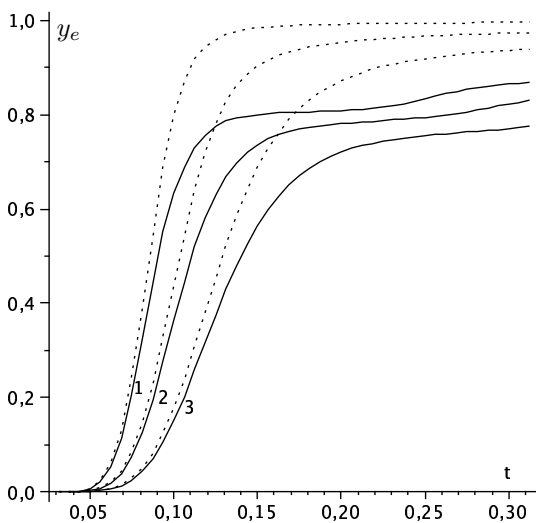


Рис. 7. Температурна залежність відносної концентрації електронів. суцільні криві відповідають водневій моделі, суцільні — воднево-гелієвій. Криві 1 відповідають загальній концентрації баріонів $n^* = 10^{-8}$, 2 — $n^* = 10^{-7}$, 3 — $n^* = 10^{-6}$.

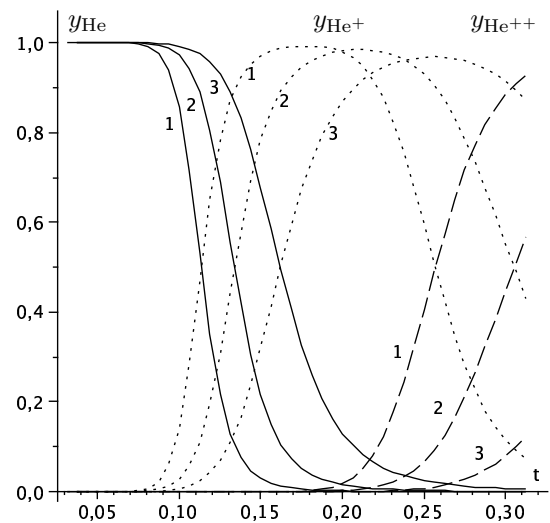


Рис. 8. Температурна залежність відносної концентрації нейтральних, однократно і двократно йонізованих атомів гелію. Криві 1 відповідають загальній концентрації баріонів $n^* = 10^{-8}$, 2 — $n^* = 10^{-7}$, 3 — $n^* = 10^{-6}$.

Це співвідношення узагальнює рівняння (15) і переходить в останнє за низьких температур, коли множники C_{He^+} , $C_{\text{He}^{++}}$ є малими величинами. Система рівнянь (30), (32) визначає залежність параметра екранування та відносної електронної концентрації від температури та густини для воднево-гелієвої моделі фотосфери. У результаті чисельного розв'язування цієї системи рівнянь одержано температурну залежність параметра екранування та відносних концентрацій різних частинок при заданих густинах для хімічного складу, близького до сонячного ($X = 0.75$, $Y = 0.25$). На рисунку 7 наведено температурну залежність електронної концентрації у водневій та воднево-гелієвій моделях. Температурну залежність атомів гелію, його йонів та α -частинок показано на рисунку 8. У воднево-гелієвій моделі температурна залежність відносної концентрації йонів H^- подібна до тієї, яку одержуємо в межах водневої моделі при тих самих густинах, а вплив гелію зводиться, в основному, до зменшення висоти максимуму та деякого зсуву його в бік нижчих температур (рисунок 9).

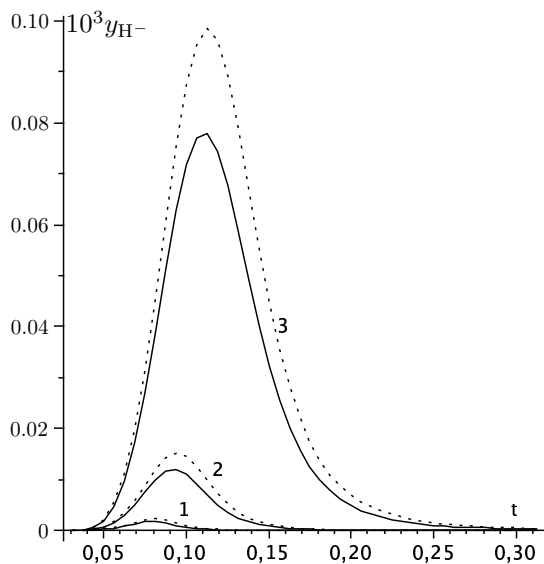


Рис. 9. Температурна залежність відносної концентрації негативних йонів водню у водневій (пунктирні криві) та воднево-гелієвій (суцільні криві) моделях. Криві 1 відповідають загальній концентрації баріонів $n^* = 10^{-8}$, 2 — $n^* = 10^{-7}$, 3 — $n^* = 10^{-6}$.

IV. ВИСНОВКИ

Коректний розрахунок йонізаційної рівноваги неможливий без урахування екрануючих властивостей плазми. Використовуючи результати наших розрахунків квантових станів електрона в полі екранованого заряду, ми виконали докладні самоузгоджені розрахунки йонізаційної рівноваги для водневої та воднево-гелієвої моделей плазми для значень температур і густин, характерних для зоряних фотосфер. Ми встановили немонотонну температурну залежність параметра екранування з максимумом в околі $(20 \div 30)10^3$ К. Це означає, що при різних температурах слід ураховувати різне число дискретних рівнів електрона в атомі водню. Як виявляється, безрозмірний параметр екранування для зоряних фотосфер має порядок 10^{-2} , що відповідає кількості зв'язаних станів електрона в атомі водню порядку 10^2 .

Немонотонну температурну залежність має й концентрація негативних йонів водню, максимум цієї функції є в околі $(13 \div 19)10^3$ К, що приводить до аналогічної залежності коефіцієнта неперервного поглинання, сформованого процесами фотойонізації негативних йонів водню.

Як випливає з наших розрахунків, ефект екранування взаємодій у частково йонізованій плазмі не настільки малий, щоби ним можна було нехтувати у прецизійних розрахунках характеристик зоряних фотосфер. Однак результати розрахунку йонізаційної рівноваги не дуже чутливі до наближень, які застосовуються при обчисленні статистичної суми атома водню, особливо в області невисоких температур. Як видно з рисунка 1, функція $U_{\text{H}}(\xi, t)$ може відрізнитися від одиниці в десятки разів. При цьому відносна електронна концентрація змінюється на якихось 10% (див. рис. 4), відносна концентрація йонів H^- — на 15% (рис. 6). Така слабка чутливість результатів зумовлена структурою рівняння (13), у якому множник $C_{\text{H}}C_p$, який особливо важливий при низьких температурах (коли y_e є малим), від $U_{\text{H}}(\xi, t)$ не залежить. Через те наближення $U_{\text{H}}(\xi, t) = 1$, що відповідає стандартним співвідношенням Саха, приводить до невеликих похибок при розрахунку йонізаційної рівноваги для зір середніх спектральних класів з ефективними температурами атмосфер $T_{\text{eff}} \leq 10^4$ К. Область температур, у якій застосовне наближення $U_{\text{He}}(\xi, t) = 1$, визначається нерівністю $T_{\text{eff}} \leq 4 \cdot 10^4$ К, що обґрунтовує наближення, яке ми використали в цій праці.

[1] S. Chandrasekhar, G. Herzberg, Phys. Rev. **98**, 1050 (1955).
 [2] J. F. Hart, G. Herzberg, Phys. Rev. **106**, 79 (1957).
 [3] S. Chandrasekhar, D. D. Elbert, Astropys. J. **128**, 633 (1958).
 [4] C. Schwartz, Phys. Rev. **123**, 1700 (1961).
 [5] S. Geltman, Astrophys. J. **136**, 937 (1962).
 [6] J. Macek, Proc. Phys. Soc. **92**, 365 (1967).

[7] J. Macek, J. Phys. B **1**, 831 (1968).
 [8] A. R. P. Rau and U. Fano, Phys. Rev. A **4**, 1751 (1971).
 [9] C. H. Greene, A. R. P. Rau, Phys. Rev. A **32**, 1352 (1985).
 [10] S. Geltman, Phys. Rev. A **42**, 6958 (1990).
 [11] S. Geltman, Phys. Rev. A **43**, 4930 (1991).
 [12] A. R. P. Rau, J. Astrophys. Astron. **17**, 113 (1996).
 [13] В. Эбелинг, В. Крафт, Д. Кремт, Теория связанных

- состояний и ионизационного равновесия в плазме и твердом теле* (Мир, Москва, 1979).
- [14] Г. С. Бисноватый-Коган, *Физические вопросы теории звездной эволюции* (Наука, Москва, 1989).
- [15] M. Planck, Ann. Phys. (Leipzig) **75**, 673 (1924).
- [16] L. Brillouin, *Les Statistiques Quantiques et leurs Applications* (Paris, 1930).
- [17] А. И. Ларкин, Журн. эксп. теор. физ. **38**, 1896 (1960).
- [18] W. Ebeling, Ann. Phys. (Leipzig) **19**, 104 (1967).
- [19] K. H. Riewe, R. Rompe, Ann. Phys. (Leipzig) **111**, 79 (1938).
- [20] G. H. Ecker, W. Weizel, Ann. Phys. (Leipzig) **17**, 126 (1956).
- [21] М. В. Ваврух, О. М. Стельмах, Н. Л. Тишко, Р. І. Коритко, Журн. фіз. досл. **12**, 3001-1 (2008).
- [22] М. В. Ваврух, О.М. Стельмах, Н. Л. Тишко, Журн. фіз. досл. **13** (2009).
- [23] F. J. Rogers, H. C. Graboske, Jr., D. J. Harwood, Phys. Rev. A **1**, 1577 (1970).
- [24] І. О. Вакарчук, *Теорія зоряних спектрів* (Львівський національний університет, Львів, 2002).

THE SCREENING OF INTERACTION AND THE IONIZATION EQUILIBRIUM IN THE PHOTOSPHERES OF STARS

M. V. Vavruk, O. M. Stelmakh, S. V. Smerechynskyi
*Ivan Franko National University of Lviv, Department of Astrophysics,
8, Kyryla i Mefodija St., Lviv, UA-79005, Ukraine,
vavruk@physics.wups.lviv.ua*

The temperature dependence of the particle concentration in hydrogen and hydrogen-helium models of stars photospheres in the temperature region ($5 \cdot 10^3 \div 5 \cdot 10^4$) K at the densities of ($10^{-7} \div 10^{-5}$) g/cm³ is investigated. A self-consistent calculation of the partition function of the hydrogen atom is performed. A non-monotonous dependence of the screening parameter and the concentration of H⁻-ions is established.