

РЕЛЯТИВІСТСЬКА КВАЗІКЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ТУНЕЛЬНОЇ ЙОНІЗАЦІЇ В ЗОВНІШНІХ СКАЛЯРНО-ВЕКТОРНИХ ПОЛЯХ

В. Ю. Лазур, В. В. Рубіш, О. К. Рейтій

*Ужгородський національний університет, кафедра теоретичної фізики,
вул. Волошина, 54, Ужгород, 88000, Україна*

(Отримано 9 лютого 2009 р.; в остаточному вигляді — 22 серпня 2009 р.)

Узагальнено правила квантування Бора-Зоммерфельда і формули Гамова для ширини квазістаціонарного рівня з урахуванням релятивізму, спіна та лоренц-структури потенціалів взаємодії. Побудовано релятивістську квазікласичну теорію йонізації кулонівської системи ($V_{\text{Coul}} = -\xi/r$) радіально-постійними далекодійними скалярним ($S_{\text{l.r.}} = (1 - \lambda)(\sigma r + V_0)$) і векторним ($V_{\text{l.r.}} = \lambda(\sigma r + V_0)$) полями. У граничних випадках одержано наближені аналітичні вирази для положення E_r і ширини Γ підбар'єрних резонансів, які демонструють сильну залежність Γ від енергії зв'язаного рівня й коефіцієнта змішування λ . Також отримано прості аналітичні формули для асимптотичних коефіцієнтів діраківських радіальних хвильових функцій у нулі та на нескінченності.

Ключові слова: рівняння Дірака, лоренц-структура потенціалів взаємодії, ефект Штарка, квазістаціонарні стани.

PACS number(s): 03.65.Pm, 03.65.Sq, 03.65.Xp, 31.15.Gy, 32.60.+i, 32.70.Jz

І. ВСТУП

Широке коло задач із різних ділянок фізики — фізики елементарних частинок, ядерної фізики, фізики атомних зіткнень та інших — пов'язане з уявленнями про формування та розпад нестабільних (квазістаціонарних) станів квантових систем [1]. Властивості таких станів становлять інтерес для дослідження йонізації атомів, йонів і напівпровідників під дією постійних й однорідних електричного та магнітного полів [2], для опису кластерних розпадів атомних ядер [3] та ефектів спонтанного народження позитронів [4, 5], при розгляді вакуумної оболонки надкритичного атома [4–6], а також з погляду дослідження рівняння Дірака в сильних зовнішніх полях.

Релятивістська теорія розпадних станів досить добре розроблена для випадків, коли складники потенціалу взаємодії ферміона із зовнішніми полями належать до векторного типу, тобто є компонентами лоренц-вектора A_μ [2, 5–7]. Водночас внутрішня логіка розвитку теорії розпадних станів диктує, мабуть, постановку цілої низки якісно нових задач, які походять із ядерної фізики та фізики елементарних частинок. Так, наприклад, кваркова структура нуклонів та багатокваркові стани в ядрі змушують по-новому подивитися і на природу внутрішньоядерних сил. Під стимулюючим впливом КХД проблема прояву кварк-глюонних степенів свободи в атомних ядрах і ядерних процесах одержала в останнє десятиліття новий розвиток і тепер, без сумніву, становить головну перспективу фундаментальних досліджень у цій галузі ядерної фізики (див., наприклад, [8]).

Як відомо, проблема проходження крізь потенціальні бар'єри лежить в основі теоретичного розгляду явищ кластерних розпадів атомних ядер і нестабільних резонансних станів сильно взаємодіючих еле-

ментарних частинок. Послідовний теоретичний опис таких явищ повинен базуватися на релятивістських хвильових рівняннях з урахуванням того, що взаємодії між елементарними частинками можуть здійснюватися (крім електромагнітних) і силами, які не залежать від електричного заряду. Такими є, наприклад, ядерні взаємодії між нуклонами, зумовлені взаємодією нуклонів із мезонним полем. Такі сили вперше увів І. Е. Тамм ще в 1934 р. [9], а останніми роками векторний і псевдовекторний варіанти цих взаємодій докладно розглядали автори відомої монографії [7]. З погляду нових задач теорії сильних взаємодій становить інтерес дослідження загальнішого випадку, коли частинка зі спіном $1/2$ взаємодіє зі скалярним і векторним полями одночасно. Як відомо, на сьогодні є всі підстави вважати, що між кварками в гадронах існують так і взаємодії.

Основні труднощі теорії квазістаціонарних станів (у зазначених вище застосуваннях) зумовлені тим, що взаємодії в багатьох випадках не можуть бути описані в межах стандартних методів, які використовують розклади за малим енергетичним параметром. У задачах, пов'язаних з описом квазістаціонарних станів релятивістських складених систем, з'являються додаткові труднощі, які виникають щоразу, коли доводиться розв'язувати рівняння Дірака з невідокремлюваними змінними. У сучасній теорії розпадних станів ці труднощі обходять за допомогою розвинутої в роботах [2, 10] релятивістської версії методу уявного часу, що дає змогу обчислювати ймовірність тунелювання релятивістських частинок крізь потенціальні бар'єри, у тому числі такі, що не мають сферичної симетрії.

Хоча цей метод має евристичну силу і фізичну наочність, його все ж не можна вважати строго математично обґрунтованим, незважаючи на деякі спроби в цьому напрямку [2, 11]. Як відомо, врахування

кулонівської взаємодії між електроном, що вилітає, й атомним остовом у межах методу уявного часу становить значні труднощі і, наприклад, у теорії багатофотонної йонізації атомів [2] не виконано повною мірою і до сьогодні.

На щастя, багато цікавих питань релятивістської теорії квазістаціонарних станів можна з'ясувати на прикладі простих моделей, які дають змогу знайти точний або асимптотично точний розв'язок рівняння Дірака. Із різноманіття задач такого типу тут ми розглянемо гібридну версію (13) сферичної моделі ефекту Штарка (СМЕШ). Включення в стандартну СМЕШ "нових" взаємодій, пов'язаних із скалярним полем, відкриває нові можливості для її застосувань у релятивістській ядерній фізиці та КХД. У загальнішому контексті ставиться нестандартна модельна задача вивчити вплив на систему кулонівських рівнів разом узятих радіально-постійних скалярного і векторного полів. Не зважаючи на те, що це питання ставили ще в ранніх дослідженнях [12], практичної кількісної оцінки для зсуву рівня і його ширини так і не було зроблено. Вже у цій простій моделі виникає багато цікавих ефектів, характерних для електричного і скалярного полів.

Квазістаціонарні розв'язки рівняння Дірака в складеному полі (13) при $1/2 < \lambda \leq 1$ і відповідний комплексний спектр енергії породжуються умовою випромінювання, тобто вимогою, щоб розв'язки $F(r)$, $G(r)$ на нескінченності являли собою розбіжну хвилю (див. формулу (21) в [13]). Якщо E дійсне, то такого розв'язку нема, однак існує нескінченно багато комплексних квазістаціонарних рівнів $E = E_r - i\Gamma/2$ з експоненціально малою уявною частиною Γ .

Для поля (13), що складається із суміші кулонівського та радіально-постійних векторного і скалярного полів, рівняння Дірака розділяється у сферичних координатах, що, здавалося б, повинно істотно полегшити обчислення положення E_r і ширини Γ резонансу. Відзначимо, однак, що при стандартному підході (числове розв'язання системи Дірака) ми наштукхуємося на відомі труднощі, пов'язані з експоненціальним зростанням гамівської хвильової функції (при $r \rightarrow \infty$) квазістаціонарного стану. Через складність цієї задачі розв'яжемо її у квазікласичному наближенні, що дає для положення резонансу E_r і його ширини Γ корисні аналітичні вирази. Крім міркувань зручності, метод ВКБ, або квазікласичне наближення, має низку принципівих переваг порівняно з іншими методами. Як відомо, на відміну від теорії збурень це наближення не пов'язане з малістю взаємодії і тому має ширшу область застосовності, що дає змогу досліджувати якісні закономірності в поведінці та властивостях квантовомеханічних систем. Інша важлива перевага методу полягає в тому, що він однаковою мірою застосовний до випадків як електромагнітного, так і скалярного зовнішніх полів. Далі розглядаємо ту версію методу ВКБ, яка запропонована в [13–15] і може використовуватися як для дискретного спектра, так і для опису квазістаціонарних станів (резонансів).

Стисло опишемо зміст роботи. У розд. II про-

ведено узагальнення правила квантування Бора–Зоммерфельда на релятивістський випадок, коли частинка спіну 1/2 взаємодіє зі скалярним і векторним зовнішніми полями одночасно. У наступному розділі розглянуто питання про те, як за допомогою методу ВКБ знаходити з прийнятною точністю асимптотичні коефіцієнти хвильової функції в нулі та на нескінченності. Четвертий розділ присвячено побудові квазікласичної теорії йонізації кулонівської системи радіально-постійними скалярним і векторним полями, яка враховує релятивістські ефекти і спін ферміона. У граничних випадках $\sigma/\xi\tilde{m}^2 \ll 1$ і $\sigma\gamma/E_r^2 \ll 1$ одержано наближені аналітичні вирази для ширини Γ підбар'єрних резонансів, які демонструють сильну залежність Γ від енергії зв'язаного рівня E_r і параметра зміщування λ .

II. ПОЛОЖЕННЯ КВАЗІСТАЦІОНАРНИХ СТАНІВ

Після відокремлення кутових змінних у рівнянні Дірака зі сферично-симетричними векторним $V(r)$ та скалярним $S(r)$ потенціалами взаємодії виникає система рівнянь першого порядку для радіальних функцій F і G ($c = 1$):

$$\left. \begin{aligned} \hbar \frac{dF}{dr} + \frac{\tilde{k}}{r} F - [(E - V(r)) + (m + S(r))] G &= 0, \\ \hbar \frac{dG}{dr} - \frac{\tilde{k}}{r} G + [(E - V(r)) - (m + S(r))] F &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Тут \hbar — стала Планка, $\tilde{k} = \hbar k$, $k = \mp(j + 1/2)$ — інтеграл руху діраківської частинки в центральному полі, $j\hbar$ — повний кутовий момент; означення і нормування функцій F та G такі ж, як і в працях [13–15].

Для опису явищ, пов'язаних з утворенням і розпадом квазістаціонарних станів, розглянемо клас потенціалів $V(r)$ і $S(r)$, для яких ефективний потенціал (див. (11)) квадратованого рівняння Дірака має бар'єр (типу зображеного на рис. 1).

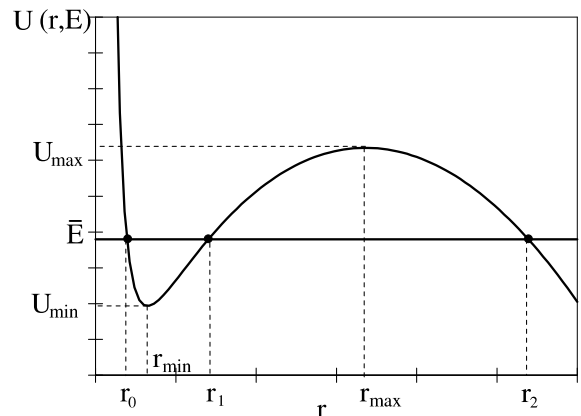


Рис. 1. Ефективний потенціал $U(r, E)$ бар'єрного типу; r_0, r_1, r_2 — корені рівняння $p^2(r) = 0$.

Наведемо алгоритм побудови квазікласичних розв'язків системи Дірака (1). Вчинимо як завжди [14, 15]: шукатимемо розв'язок цієї системи у вигляді добутку швидкоосцилюючого фазового множника на повільноосцилюючу амплітуду:

$$\chi(r) = \begin{pmatrix} F(r) \\ G(r) \end{pmatrix} = \exp \left\{ \int^r y(r') dr' \right\} \varphi(r),$$

$$y(r) = \hbar^{-1} y_{-1}(r) + y_0(r) + \hbar y_1(r) + \dots,$$

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \varphi^{(n)}(r),$$

де $\hbar \rightarrow 0$ — малий параметр, а $\varphi(r)$ і $\varphi^{(n)}(r)$ — двокомпонентні величини (верхня компонента відповідає радіальній функції F , нижня — G). Розклади $y(r)$ і $\varphi(r)$ за \hbar приводять до ланцюжка матричних диференціальних рівнянь для $y_{(n)}(r)$ і $\varphi^{(n)}(r)$, які розв'язуються послідовно за допомогою відомої техніки лівих та правих власних векторів відповідної однорідної системи, що обчислюються у явному вигляді. Приведемо кінцеві формули для хвильової функції квазістаціонарного стану. Вони мають різний вигляд у трьох областях: I) потенціальна яма $r_0 < r < r_1$; II) підбар'ерна область $r_1 < r < r_2$; III) класично дозволена область $r > r_2$ з квазидискретним енергетичним спектром. Тут r_0, r_1 і r_2 — точки повороту, в яких радіальний квазікласичний імпульс

$$p(r) = \sqrt{(E - V(r))^2 - (m + S(r))^2 - (k/r)^2}$$

перетворюється в нуль (див. рис. 1). У класично дозволеній області $r_0 < r < r_1$ маємо:

$$F(r) = C_1^{\pm} \left[\frac{E - V + m + S}{p(r)} \right]^{1/2} \cos \Theta_1,$$

$$G(r) = C_1^{\pm} \operatorname{sgn} k \left[\frac{E - V - m - S}{p(r)} \right]^{1/2} \cos \Theta_2. \quad (2)$$

Тут ми використали такі нові позначення:

$$\Theta_1(r) = \int_{r_1}^r \left(p + \frac{k w}{p r} \right) dr + \frac{\pi}{4},$$

$$\Theta_2(r) = \int_{r_1}^r \left(p + \frac{k \tilde{w}}{p r} \right) dr + \frac{\pi}{4}, \quad (3)$$

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{V' - S'}{m + S + E - V} - \frac{1}{r} \right),$$

$$\tilde{w} = \frac{1}{2} \left(\frac{V' + S'}{m + S - E + V} + \frac{1}{r} \right). \quad (4)$$

Якщо ширина квазістаціонарного рівня $\Gamma \ll 1$ (що підтверджується обчисленнями), то умова нормування на одну частинку, локалізовану в області $r_0 < r < r_1$, визначає константи нормування C_1^{\pm} :

$$\int_{r_0}^{r_1} (F^2 + G^2) dr = 1,$$

$$|C_1^{\pm}| = \left\{ \int_{r_0}^{r_1} \frac{E - V(r)}{p(r)} dr \right\}^{-1/2} = \left(\frac{2}{T} \right)^{1/2}, \quad (5)$$

де T — період радіальних коливань класичної релятивістської частинки з енергією E_r у потенціальній ямі I.

У підбар'ерній області ($r_1 < r < r_2$) розв'язок, що відповідає загасаючій експоненті, при $k > 0$ має вигляд

$$\chi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \frac{C_2^+}{\sqrt{qQ}} \times \exp \left\{ - \int_{r_2}^r \left[q + \frac{(m + S)V' + (E - V)S'}{2qQ} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} -Q \\ m + S - E + V \end{pmatrix}, \quad (6)$$

а для станів з $k < 0$

$$\chi = \frac{C_2^-}{\sqrt{qQ}} \exp \left\{ - \int_{r_2}^r \left[q - \frac{(m + S)V' + (E - V)S'}{2qQ} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} m + S + E - V \\ -Q \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Тут $q = |p(r)|$, $Q = q + |k|r^{-1}$.

Нарешті, при $r > r_2$ квазістаціонарному станові відповідає розбіжна хвиля; квазікласичні формули для F і G при $k > 0$ мають вигляд

$$\chi = \frac{C_3^+}{\sqrt{pP}} \exp \left\{ \int_{r_2}^r \left[ip + \frac{(m + S)V' + (E - V)S'}{2pP} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} iP \\ m + S - E + V \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де $P = p + i|k|r^{-1}$. Для станів з $k < 0$ радіальна хвильова функція χ виглядає так:

$$\chi = \frac{C_3^-}{\sqrt{pP}} \exp \left\{ \int_{r_2}^r \left[ip - \frac{(m + S)V' + (E - V)S'}{2pP} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} m + S + E - V \\ iP \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Побудовані квазікласичні представлення (2)–(9) втрачають зміст у малих околах точок повороту r_j ($j = 0, 1, 2$). Для обходу цих точок та зшивання розв'язків можна використати метод Цваана [16], що дає змогу встановити зв'язок між константами нормування в різних областях:

$$C_2^\pm = -i C_3^\pm = \mp \frac{C_1^\pm}{2} \left[\frac{E - V(r_1) + m + S(r_1)}{|k| r_1^{-1}} \right]^{\pm \frac{1}{2}} \exp \left\{ - \int_{r_1}^{r_2} \left[q \pm \frac{(m + S)V' + (E - V)S'}{2qQ} \right] dr \right\}. \quad (10)$$

Отримані квазікласичні формули дають змогу розв'язати широке коло задач у теорії квазістаціонарних станів. Так, у випадку експоненціальної малості проникності бар'єра в ефективному потенціалі (ЕП)

$$U(r, E_r) = \frac{E_r}{m} V + S + \frac{S^2 - V^2}{2m} + \frac{k^2}{2m r^2},$$

$$\bar{E}_r = (E_r^2 - m^2)/2m \quad (11)$$

дійсна частина енергії рівня $E_r = E_{n_r, k}$ визначається умовою квантування:

$$\int_{r_0}^{r_1} \left(p + \frac{k w}{p r} \right) dr = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

де n_r має зміст радіального квантового числа.

Тепер ми дослідимо один конкретний приклад векторного і скалярного потенціалів

$$V(r) = -\frac{\xi}{r} + \lambda v(r), \quad S(r) = (1 - \lambda)v(r),$$

$$v(r) = \sigma r + V_0, \quad (13)$$

у суміші яких при $1/2 < \lambda \leq 1$ і всякому $\sigma \neq 0$ існують квазістаціонарні стани фермі-частинок; тут V_0 — дійсна стала, ξ — кулонівська константа зв'язку, а λ — коефіцієнт змішування векторної та скалярної частин далекодійного потенціалу $v(r)$. Далекодійний потенціал $v(r)$ містить внески лоренц-векторної $V_{l.r.}(r) = \lambda v(r)$ та лоренц-скалярної $S_{l.r.}(r) = (1 - \lambda)v(r)$ складових, перша з яких (при $1/2 < \lambda \leq 1$) домінує у всьому діапазоні значень r , $0 < r < \infty$.

Ефективний потенціал ЕП $U(r, E_r)$ (11) навіть у відносно простій моделі взаємодії (13) є складною функцією вихідних потенціалів $V(r)$ і $S(r)$, енергії рівня E_r , повного моменту j і має істотно різний вигляд при $0 \leq \lambda < 1/2$, $1/2 < \lambda \leq 1$ та $\lambda = 1/2$. Виникнення квазістаціонарних станів у потенціалній моделі (13) при $1/2 < \lambda \leq 1$ і $\sigma \neq 0$ є дуже природним. За вказаних умов ЕП $U(r, E_r)$ відповідає відштовхуванню на малих відстанях ($r \lesssim 1$), яке переходить у квадратичне притягання при $r \gg 1$ (див. [13]). Це вказує на визначальну роль далекодійних векторних сил (типу електростатичних) у виникненні бар'єру в ЕП $U(r, E_r)$. Завдяки цьому з'являється можливість розпаду рівня шляхом просочування частинки крізь потенціалний бар'єр в ЕП $U(r, E_r)$. Таким чином, при $1/2 < \lambda \leq 1$ зв'язаний стан перетворюється на квазістаціонарний. Його хвильова функція має при $r \rightarrow \infty$

асимптотику типу розбіжної хвилі (8), (9). Водночас енергія $E(\sigma)$ при всякому $\sigma \neq 0$ стає комплексною ($E = E_r - i\Gamma/2$), і її уявна частина безпосередньо пов'язана з імовірністю йонізації рівня зовнішнім полем (13).

Інтерес до потенціальної моделі (1), (13) при $0 \leq \lambda < 1/2$ в основному зумовлений її використанням для опису спектрів мас мезонів і баріонів і не вичерпується дотепер (див. наприклад, статті [13, 17] і посилання в них). Вона вдало поєднує в собі ефективну кулонівську взаємодію на малих відстанях r і лінійне зростання при великих r , яке приводить до невилітання кольорових кварків і відповідає натягнутій між кварками струні. Докладно обчислено спектри мас для важко-легких мезонів із використанням потенціалів, що задаються виразами (13), в нашій попередній роботі [13]. В цьому випадку параметри моделі (13) визначаються стандартно: σ — натяг струни, ξ — кулонівський коефіцієнт, V_0 — власна енергія статичного джерела, а параметр λ , який задає відносний внесок векторного $V_{l.r.}(r)$ і скалярного $S_{l.r.}(r)$ потенціалів, пробігає область значень $0 \leq \lambda < 1/2$.

Доданок $(S^2 - V^2)/2m$ в ЕП (11) домінує на великих відстанях і приводить при $0 \leq \lambda < 1/2$ до ефективного відштовхування незалежно від знака σ . Це відштовхування є чисто релятивістським ефектом і пов'язане з тим, що взаємодія ферміона зі скалярним зовнішнім полем $S(r)$ додається до скалярної величини m — маси частинки, тоді як векторний потенціал $V(r)$ вводиться у вільне рівняння Дірака мінімальним чином, як часова компонента 4-потенціалу A_μ . Наявність в ЕП $U(r, E_r)$ релятивістських членів $(S^2 - V^2)/2m$ приводить при $0 \leq \lambda < 1/2$ до квадратичного зростання $U(r, E_r) \sim (1 - 2\lambda)(\sigma r)^2/2m$ на великих відстанях, що забезпечує невилітання (не спостережуваних у вільному стані) кольорових кварків і глюонів. Ці властивості ЕП $U(r, E_r)$ моделі взаємодії (13) говорять про те, що для конфайнмента істотно саме скалярні поля, але зовсім не векторні.

Обговорюючи міжкварковий потенціал, доцільно дослідити якісні закономірності квазікласичного спектра моделі взаємодії (13) також у фазі вилітання кольору, $1/2 < \lambda \leq 1$. Можна навіть стверджувати, що без такого дослідження неможливо зрозуміти більшість непертурбативних явищ, що виникають на великих відстанях, природу утримуючих сил та динаміку взаємодії кварків на великих відстанях.

Звичайно, розглядані фізичні об'єкти (кварки) не можуть бути вільними частинками. Однак не слід

уявляти собі, що натягнута між кварками струна може стати нескінченно довгою. За межами застосовності теорії збурень сильна взаємодія на великих відстанях неминуче приводить до народження заряджених (за кольором) частинок і робить задачу принципово багаточастинковою. Тому зазвичай розглядають задачу про розсіяння кварків, що входять до складу безколірних об'єктів, таких, як гадрони. Те ж саме справедливо і для задач КХД, пов'язаних з описом квазістаціонарних станів потенціального типу. При цьому природно постають питання про вплив на властивості квазістаціонарних станів різних фізичних чинників — зовнішніх полів зі змішаною лоренц-структурою потенціалів взаємодії, адиабатично повільної зміни параметрів взаємодії, зв'язку з іншими (зовнішніми і внутрішніми) степенями свободи, трансляційної та спінової симетрій і т. д.

Нижче в наступних двох розділах ми викладемо застосування розвинуеного вище формалізму квазікласичних асимптотик до обчислення зсувів і ширин квазістаціонарних станів потенціальної моделі (13) у режимі вилітання кольорових зарядів ($1/2 < \lambda \leq 1$). Особливий випадок $\lambda = 1/2$, що розділяє фазу невилітання кольорових зарядів (тобто конфайнмента) і фазу вилітання кольору (тобто деконфайнмента), ми розглянемо у наших наступних працях.

Йдучи за описаною в [13] схемою обчислень, надамо квазікласичному імпульсу зручної для подальшого форми:

$$p(r) = |\sigma| \sqrt{2\lambda - 1} \frac{R_1(r)}{r} = |\sigma| \sqrt{2\lambda - 1} \frac{[(a-r)(b-r)(r-c)(r-d)]^{1/2}}{r}.$$

Тут σ відіграє роль напруженості радіально-постійного далекодійного поля, а точки повороту a, b, c і d визначаються як розв'язки рівняння $r^4 + fr^3 + gr^2 + hr + l = 0$, де коефіцієнти

$$f = \frac{2\eta_1}{(1-2\lambda)\sigma}, \quad g = -\frac{\tilde{E}_r^2 - \tilde{m}^2 - 2\xi\sigma\lambda}{(1-2\lambda)\sigma^2},$$

$$h = -\frac{2\tilde{E}_r\xi}{(1-2\lambda)\sigma^2}, \quad l = \frac{\gamma^2}{(1-2\lambda)\sigma^2},$$

а величини $\gamma = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ і $\eta_1 = (1-\lambda)\tilde{m} + \lambda\tilde{E}_r$. Уведені тут характерні параметри $\tilde{E}_r = E_r - \lambda V_0$ і

$\tilde{m} = m + (1-\lambda)V_0$ мають зміст “зсунуто” енергії і “зсунуто” маси відповідно. Вказане рівняння має чотири дійсні корені ($d < c < b < a$), які визначаються рівностями:

$$a, b = -\frac{f}{4} + \frac{1}{2}(\Xi \pm \Delta_+),$$

$$c, d = -\frac{f}{4} - \frac{1}{2}(\Xi \mp \Delta_-),$$
(14)

де

$$\Xi = \left[\frac{f^2}{4} - \frac{2g}{3} + \frac{u}{3} \left(\frac{2}{Z} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{Z}{2} \right)^{1/3} \right]^{1/2},$$

$$\Delta_{\pm} = \sqrt{F \pm \frac{D}{4\Xi}},$$

$$F = \frac{f^2}{2} - \frac{4g}{3} - \frac{u}{3} \left(\frac{2}{Z} \right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{Z}{2} \right)^{1/3},$$

$$Z = v + \sqrt{-4u^3 + v^2}, \quad D = -f^3 + 4fg - 8h,$$

$$v = 2g^3 - 9fgh + 27h^2 + 27f^2l - 72gl,$$

$$u = g^2 - 3fh + 12l,$$

причому верхні знаки в (14) відповідають точкам повороту a і c , а нижні — точкам b і d .

Інтегрування за r в умові квантування (12) здійснюється в тій області простору, де $\tilde{E}_r - U(r, E_r) > 0$. Для розглянутих потенціалів (13) при $1/2 < \lambda \leq 1$ це означає, що $r_0 = c$ і $r_1 = b$, причому $c < r < b$ і $r > a$ — класично дозволені області, а $b < r < a$ — підбар'єрна область, у якій $p^2(r) < 0$; при $r > a$ частинка йде на нескінченність. Якщо максимальне значення потенціальної функції $U(r, E_r)$ досягається в точці $r_{\max} \approx \eta_1[(2\lambda - 1)\sigma]^{-1}$ для $\sigma > 0$ ($r_{\max} \approx [\tilde{E}_r\xi/(\eta_1|\sigma|)]^{1/2}$ для $\sigma < 0$), а мінімум при $r_{\min} \approx \gamma^2/\tilde{E}_r\xi$, то спектр енергії підбар'єрних резонансів лежить на інтервалі $U_{\min} < \tilde{E}_r < U_{\max}$. Обговорювана ситуація схематично зображена на рис. 1. Заповненими (чорним) кружками позначено положення точок повороту.

Використовуючи прийоми обчислення інтегралів квантування з розділу IV праці [13], фазові інтеграли в рівнянні (12) можна подати у вигляді:

$$J_1 = \int_c^b p(r) dr = \sqrt{2\lambda - 1} |\sigma| \int_c^b \frac{(r^3 + fr^2 + gr + h + lr^{-1})}{R_1} dr, \quad (15)$$

$$J_2 = \int_c^b \frac{k w}{p(r)r} dr = -\frac{k}{2\sqrt{2\lambda - 1} |\sigma|} \left[\int_c^b \frac{dr}{(r - \lambda_+) R_1} + \int_c^b \frac{dr}{(r - \lambda_-) R_1} \right], \quad (16)$$

де введено позначення

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\tilde{E} + \tilde{m} \mp \sqrt{(\tilde{E} + \tilde{m})^2 - 4\xi\sigma(1-2\lambda)}}{2\sigma(1-2\lambda)}.$$

У загальному випадку для довільних значень ξ і σ інтеграли J_1 і J_2 не можна обчислити в замкнутому вигляді в елементарних функціях. Проведене перетворення J_1 і J_2 зручне тим, що наявні в правій частині

формул (15) і (16) інтеграли зводяться після заміни змінної інтегрування [18]

$$r = \frac{c(b-d) - d(b-c)\sin^2\varphi}{b-d - (b-c)\sin^2\varphi} \quad (17)$$

до повних еліптичних інтегралів першого, другого або третього роду. У підсумку ми одержуємо трансцендентне рівняння

$$\left\{ \frac{|\sigma|(c-d)^2}{\Re} \left[\bar{N}_1 F(\bar{\chi}) + \bar{N}_2 E(\bar{\chi}) + \bar{N}_3 \Pi(\bar{\nu}, \bar{\chi}) + \bar{N}_4 \Pi\left(\frac{d}{c}\bar{\nu}, \bar{\chi}\right) \right] + \frac{k}{2(2\lambda-1)|\sigma|} \left[(c-d)(\bar{N}_5 \Pi(\bar{\nu}_+, \bar{\chi}) + \bar{N}_6 \Pi(\bar{\nu}_-, \bar{\chi})) + \bar{N}_7 F(\bar{\chi}) \right] \right\} = \frac{\sqrt{(a-c)(b-d)}}{2\sqrt{2\lambda-1}} \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (18)$$

яке визначає (у квазікласичному наближенні) дійсну частину $E_r = E_{n_r, k}$ комплексної енергії квазістаціонарних станів при $U_{\min} < \bar{E}_r < U_{\max}$. Тут величини $\bar{\nu}$, $\bar{\nu}_{\pm}$, $\bar{\chi}$, \Re , \bar{N} , \bar{N}_j ($j = 1, 2, \dots, 7$) одержуються з відповідних виразів (Д.1)–(Д.6) для ν , ν_{\pm} , χ , \Re , \Re , N_j одночасними замінами $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$, $c \rightarrow d$ і $d \rightarrow a$.

Отримане рівняння (18) для визначення штарківської енергії¹ $E_r = E_{n_r, k}$ може бути розв'язане тільки числовими методами. Побудова асимптотики резонансів — задача, для розв'язання якої так само, як і у [13], доводиться застосовувати асимптотичні методи обчислення фазових інтегралів. Це накладає деякі обмеження на обчислення зсувів квазістаціонарних рівнів та їхніх ширин як в області малих, так і не занадто великих значень напруженості σ радіально-постійного (скалярно-векторного) далекодійного поля. Як виявилось, величина \tilde{m} ділить область зміни $\tilde{E}_r = E_r - \lambda V_0$ на дві області, у яких спектр квазістаціонарних станів має різну асимптотику. Розгляньмо декілька найбільш типових ситуацій, пов'язаних зі значенням енергії \tilde{E}_r відносно рівня $\tilde{E}_r = \tilde{m}$.

А. При $\tilde{E}_r < \tilde{m}$, $U_{\min} < \bar{E}_r < m$ (див. рис. 1, де $U_{\min} = U(r_{\min}, E_r)$, $r_{\min} \approx \gamma^2/\tilde{E}_r\xi$) і виконанні умови $\sigma/\xi\tilde{m}^2 \ll 1$ пара класичних точок повороту a і d роз-

ташована достатньо далеко від пари точок c і b [13]:

$$a, b \approx \frac{\tilde{E}_r \xi \pm \theta}{\mu^2} \left[1 - \frac{\tilde{E}_r \xi \pm \theta}{\mu^4} \left(\eta_1 \pm \frac{\tilde{m} \xi \eta_2}{\mu} \right) \sigma \right], \quad (19)$$

$$c \approx -\frac{\tilde{m} - \tilde{E}_r}{\sigma} - \frac{\xi}{\tilde{m} - \tilde{E}_r},$$

$$d \approx -\frac{\tilde{m} + \tilde{E}_r}{\sigma(1-2\lambda)} + \frac{\xi}{\tilde{m} + \tilde{E}_r}. \quad (20)$$

Тут, як і всюди далі, використано позначення:

$$\theta = \sqrt{(\tilde{E}_r k)^2 - (\tilde{m} \gamma)^2}, \quad \mu = \sqrt{\tilde{m}^2 - \tilde{E}_r^2},$$

$$\eta_2 = \lambda \tilde{m} + (1 - \lambda) \tilde{E}_r.$$

Виведення асимптотичних розкладів для інтегралів квантування (15), (16) за малим параметром $\sigma/\xi\tilde{m}^2$ проводимо в цьому випадку так само, як і у пункті А розділу IV [13], що дає для енергії рівнів попередній вираз

$$E_r = \tilde{E}_0 + \lambda V_0 + \frac{\sigma}{2\xi\tilde{m}^2} \left[\left(\frac{\xi^2 \tilde{m}^2}{\mu_0^2} - k^2 \right) \eta_{10} + \left(\frac{2\xi^2 \tilde{m} \tilde{E}_0}{\mu_0^2} - k \right) \eta_{20} \right] + O\left(\left(\frac{\sigma}{\xi\tilde{m}^2} \right)^2 \right), \quad (21)$$

де

$$\tilde{E}_0 = \tilde{m} \left[1 + \frac{\xi^2}{(n'_r + \gamma)^2} \right]^{-1/2}, \quad n'_r = n_r + (1 + \text{sgn } k)/2, \quad (22)$$

¹Тут під штарківською енергією розумітимемо повну енергію ферміона в зовнішньому скалярно-векторному полі (13) з $1/2 < \lambda \leq 1$.

а величини μ_0 , η_{10} і η_{20} отримуємо з μ , η_1 і η_2 заміною \tilde{E}_r на \tilde{E}_0 .

Раніше (див., наприклад, [13–15]) було проаналізовано вплив слабких радіально-постійних скалярного й електричного полів на систему кулонівських рівнів. Аналіз проводили як на основі квазікласичних формул (21), так і числовим розв'язанням трансцендентного рівняння (18). Зокрема, розрахунки показали, що зміна знака величини σ на протилежний ($\sigma \rightarrow -\sigma$) приводить лише до незначних змін енергетичного спектра, якщо $|\sigma| \ll 0.2 \text{ GeV}^2$.

Б. Нехай тепер $\tilde{m} < \tilde{E}_r$ і $m < \tilde{E}_r < U_{\max}$ (див. рис. 1, де $U_{\max} = U(r_{\max}, E_r)$, а $r_{\max} \approx \eta_1[(2\lambda - 1)\sigma]^{-1}$). Роль малого параметра тут відіграє відношення $\sigma\gamma/\tilde{E}_r^2$. У цьому випадку квазістаціонарні стани в складеному полі (13) існують тільки при додатних значеннях параметра σ .

При сформульованих вище умовах з (14) ми одержуємо

$$a \approx \frac{\tilde{E}_r + \tilde{m}}{\sigma(2\lambda - 1)} + \frac{\xi}{\tilde{E}_r + \tilde{m}},$$

$$b \approx \frac{\tilde{E}_r - \tilde{m}}{\sigma} + \frac{\xi}{\tilde{E}_r - \tilde{m}}, \quad c, d \approx \frac{-\tilde{E}_r \xi \pm \theta}{\tilde{E}_r^2 - \tilde{m}^2}, \quad (23)$$

причому точки повороту c і b віддалені досить далеко одна від одної, так що $a, b \gg c, |d|$. Це дає змогу обчислювати інтеграли квантування, що входять у (12), в аналітичному вигляді.

Далі обмежимося тим, що дамо лише рецепт обчислення інтегралів квантування $J_{1,2}$. Як і в пункті Б розділу IV [13], область інтегрування в (15) і (16) розбиваємо на дві частини $c \leq r \leq \tilde{r}$ і $\tilde{r} \leq r \leq b$, вводячи точку поділу \tilde{r} , яка задовольняє умову $c \ll \tilde{r} \ll b$. У першій області $c \leq r \leq \tilde{r}$ інтеграли (15), (16) обчислюємо, користуючись розкладом квазіімпульсу $p(r)$ у ряд за зростаючими степенями $r/a \ll 1$ та $r/b \ll 1$. У другій області $\tilde{r} \leq r \leq b$ розклад $p(r)$ проводимо за малими величинами $c/r \ll 1$ і $|d|/r \ll 1$.

При підсумовуванні асимптотичних розкладів для інтегралів на відрізках $c \leq r \leq \tilde{r}$ і $\tilde{r} \leq r \leq b$ величина \tilde{r} випадає з остаточного результату, і ми одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_1 \sqrt{\tilde{E}_r^2 - \tilde{m}^2}}{2\sigma(2\lambda - 1)} - \tilde{\eta} \left(\frac{\eta_2^2}{2\sigma(2\lambda - 1)} + \lambda \xi \right) - \gamma \arccos \left(\frac{-\tilde{E}_r \xi}{\theta} \right) \\ & - \frac{\tilde{E}_r \xi}{\sqrt{\tilde{E}_r^2 - \tilde{m}^2}} \ln \left(\frac{\sigma \eta_2 \theta}{4e(\tilde{E}_r^2 - \tilde{m}^2)} \right) - \frac{\text{sgn } k}{2} \arccos \left(\frac{-\tilde{m} \xi}{\theta} \right) = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi. \end{aligned} \quad (24)$$

Якщо розкласти ліву частину (24) за $\tilde{m}/\tilde{E}_r \ll 1$ з точністю до членів, пропорційних третьому степеню, то для енергії рівнів E_r одержуємо трансцендентне рівняння, розв'язуючи яке відносно E_r методом послідовних ітерацій, одержуємо (з точністю до $O(\sigma\gamma/\tilde{E}_r^2)$) шуканий вираз для енергії:

$$E_r = \zeta^{-1} \left\{ B + \left(B^2 + \zeta \left[2\sigma(1 - 2\lambda) \left(\xi \ln \frac{\sigma |k| (1 - \lambda)}{4\tilde{E}^{(0)2}} + 3\xi + \lambda \xi \tilde{A} + \pi N \right) + \lambda \tilde{m}^2 (1 - \lambda \tilde{A}) \right] \right)^{1/2} \right\} + \lambda V_0, \quad (25)$$

де введені такі позначення:

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{(0)} &= E^{(0)} - \lambda V_0, \quad \tilde{A} = (2\lambda - 1)^{-1/2} \ln \left[\left(1 + \lambda + \sqrt{2\lambda - 1} \right) (1 - \lambda)^{-1} \right], \\ \zeta &= (1 - \lambda)^2 A - \lambda - 2\sigma \xi (1 - 2\lambda) / (\tilde{E}^{(0)})^2, \\ B &= (1 - \lambda)(1 - \lambda \tilde{A}) \tilde{m} - 4\sigma \xi (1 - 2\lambda) / \tilde{E}^{(0)}, \\ N &= n_r + \frac{1}{2} + \frac{\text{sgn } k}{4} + \frac{1}{\pi} \left(\gamma \arccos \left(-\frac{\xi}{|k|} \right) - \xi \right), \\ \tilde{\eta} &= (2\lambda - 1)^{-1/2} \ln \left[\left(\eta_1 + \sqrt{(2\lambda - 1)(\tilde{E}_r^2 - \tilde{m}^2)} \right) \eta_2^{-1} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

а $\tilde{E}^{(0)} = E^{(0)} - \lambda V_0$, $E^{(0)}$ — нульове наближення для енергії, від вибору якого величина $E_{n_r, k}$ залежить дуже слабо, і в більшості випадків можна покласти $E^{(0)} \approx E_r(\xi = 0)$.

Вирази (24), (25) відрізняються від відповідних

формул у чисто дискретному спектрі (див. [13]) лише замінами $\eta \rightarrow \tilde{\eta}$ і $A \rightarrow \tilde{A}$. Таким чином, підстановка $\eta \rightarrow \tilde{\eta}$, $A \rightarrow \tilde{A}$ перетворює рівняння для $E_{n_r, k}^{\text{ВКБ(ас)}}$, справедливі у чисто дискретному спектрі, в рівняння для дійсної частини E_r енергії (24), (25) підбар'єр-

них резонансів. Точність обчислення E_r за допомогою формул (24), (25) така (див. розд. IV [13]), що для практичних потреб зазвичай немає змісту уточнювати головне наближення.

III. АСИМПТОТИЧНІ КОЕФІЦІЄНТИ ХВИЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

Характерними величинами, пов'язаними з хвильовою функцією, є асимптотичні коефіцієнти в нулі $C_{F,G}$ і на нескінченності $A_{F,G}$. Ми вкажемо прості аналітичні наближення для цих коефіцієнтів, які добре описують результати числових розрахунків.

Передучім розглянемо правила побудови асимптотичних розкладів розв'язків рівняння Дірака в нулі ($r \rightarrow 0$) поряд з більш стандартними розкладами розв'язків, коли $r \rightarrow \infty$. Для розглянутих потенціалів (18) маємо

$$F, G = C_{F,G} r^\gamma + \dots, \quad r \rightarrow 0, \\ C_F/C_G = (k - \gamma)/\xi, \quad (27)$$

причому для хвильових функцій дискретного спектра ($0 \leq \lambda < 1/2$) виконується умова нормування $\int_0^\infty (F^2 + G^2) dr = 1$. Значення $C_{F,G}^2$ визначають імовірність виявити частинки на малих відстанях одна від одної і становляють значний фізичний інтерес, особливо у випадку систем, у яких є взаємодії двох різних типів (наприклад, кулонівська і далекодійна $v(r)$).

У класично забороненій області $0 \leq r < r_0$ хвильова функція осцилюючого типу (2) замінюється розв'язком, експоненційно згасаючим углиб цієї області (див. рис. 1). Зшиваючи ВКБ-розв'язки рівняння Дірака по різні боки від точки повороту r_0 , одержуємо для радіальних функцій $F(r)$ і $G(r)$ квазікласичні вирази в підбар'єрній області $r < r_0$:

$$F(r) = (-1)^{n_r} \frac{C_1^\pm}{2} \left[\frac{E - V + m + S}{q(r)} \right]^{1/2} \exp \left[- \int_r^{r_0} \left(q - \frac{k w}{q r} \right) dr \right], \quad (28)$$

$$G(r) = \text{sgn } k (-1)^{n_r} \frac{C_1^\pm}{2} \left[\frac{E - V - m - S}{q(r)} \right]^{1/2} \exp \left[- \int_r^{r_0} \left(q - \frac{k \tilde{w}}{q r} \right) dr \right]. \quad (29)$$

Усі інтеграли в (28) і (29) виражаються через комбінацію еліптичних інтегралів досить складного вигляду. Але у випадках $\tilde{E}_r < \tilde{m}$ і $\tilde{E}_r > \tilde{m}$ їх можна обчислити в елементарних функціях, використовуючи для розкладів підінтегральних функцій у ряди співвідношення $\sigma/\xi \tilde{m}^2 \ll 1$ і $\sigma\gamma/\tilde{E}_r^2 \ll 1$.

Дослідимо спочатку асимптотичну поведінку квазікласичних розв'язків (28), (29) при $r \rightarrow 0$ для нижніх рівнів ($\tilde{E} < \tilde{m}$), які в основному визначаються кулонівським потенціалом ($\sigma/\xi \tilde{m}^2 \ll 1$). Зауважимо, що чим більший кулонівський параметр ξ , то менш суттєвим є потенціал $v(r)$ на малих відстанях. При фактичному обчисленні асимптотичних коефіцієнтів $C_{F,G}$ за допомогою формул (28), (29) квазікласичний імпульс $p(r)$ потрібно попередньо записати у вигляді розкладу за потенціалом $v(r)$. Використовуючи потім прийом обчислення фазових інтегралів з попереднього розділу і переходячи в (28), (29) до границі $r \rightarrow 0$, ми одержимо в нульовому наближенні шукані вирази для асимптотичних коефіцієнтів у нулі:

$$|C_F| = \sqrt{\frac{\xi}{T\gamma}} \left(\frac{e\theta_0}{2\gamma^2} \right)^\gamma \left[\frac{\theta_0 (|k| - \gamma)}{\xi(\gamma \tilde{m} + |k| \tilde{E}_0)} \right]^{\frac{\text{sgn } k}{2}} \\ \times \left(\frac{\xi \tilde{E}_0 + \gamma \mu_0}{\theta_0} \right)^{\frac{\xi \tilde{E}_0}{\mu_0}}, \quad \frac{C_F}{C_G} = \frac{k - \gamma}{\xi}. \quad (30)$$

Тут $\theta_0 = \sqrt{(\tilde{E}_0 k)^2 - (\tilde{m} \gamma)^2}$, а період коливань T дається формулою

$$T \approx \frac{2\pi \xi \tilde{m}^2}{\mu_0^3}. \quad (31)$$

Отримуючи вираз (30), використовували квазікласичну умову нормування (5). При знаходженні розв'язків рівняння Дірака (1) на малих відстанях (в області неквазікласичності $0 < r < b$) можна опустити доданок з лінійним потенціалом ($\sigma = 0$). Скориставшись асимптотикою нормованих радіальних функцій $F(r)$ і $G(r)$ релятивістської кулонівської задачі [20] при $r \rightarrow 0$ і співвідношеннями (27), знаходимо точніший (ніж (30)) вираз для C_F :

$$C_F^{\text{кул}} = \frac{(2\mu_0)^{\gamma+1/2}}{\Gamma(2\gamma+1)} \left[\frac{(\tilde{m} + \tilde{E}_0) \Gamma(2\gamma + n'_r + 1)}{\frac{4\xi \tilde{m}^2}{\mu_0} \left(\frac{\xi \tilde{m}}{\mu_0} - k \right) n'_r!} \right]^{1/2} \\ \times \left(\frac{\xi \tilde{m}}{\mu_0} - k - n'_r \right). \quad (32)$$

Тут $n'_r = n_r + (1 + \text{sgn } k)/2$. Формули (30) і (32) відрізняються в межах похибки між формулою Стірлінга

$$n! = \sqrt{2\pi} \exp \{ (n + 1/2) \ln n - n \} (1 + O(n^{-1}))$$

при $n \rightarrow \infty$ і Γ -функцією.

Для станів з $\tilde{E}_r > \tilde{m}$, коли виконується умова $\sigma\gamma/\tilde{E}_r^2 \ll 1$, кулонівський потенціал є суттєвим лише в області малих відстаней, а в основній області локалізації частинки (тобто в класично дозволеній області $b < r < a$) він виступає як мале збурення. Це дає змогу при обчисленні інтегралів, що входять у показники експонент (28), (29), виключити ($\sigma = 0$) лінійну частину потенціалу $v(r)$ із квазікласичного імпульсу $p(r)$. Тоді асимптотика одержаних таким чином радіальних функцій $F(r)$ і $G(r)$ при $r \rightarrow 0$ дає змогу відразу визначити шукані асимптотичні коефіцієнти:

$$|C_F| = \sqrt{\frac{\xi}{T\gamma}} \left(\frac{e\theta}{2\gamma^2} \right)^\gamma \left[\frac{\theta(|k| - \gamma)}{\xi(\gamma\tilde{m} + |k|\tilde{E}_r)} \right]^{\frac{\text{sgn } k}{2}} \times \exp \left[\frac{\xi\tilde{E}_r}{\sqrt{\tilde{E}_r^2 - \tilde{m}^2}} \arccos \frac{\xi\tilde{E}_r}{\theta} \right], \quad (33)$$

причому величина θ визначена (19), а енергія \tilde{E}_r дається формулою (18). Характерною особливістю цього випадку є та обставина, що в інтегралі (5), який визначає період радіальних коливань T , суттєвою є тільки та область значень змінної інтегрування r , у якій кулонівський потенціал можна розглядати як збурення. Нехтуючи ним, ми одержуємо для періоду T вираз

$$T \approx \frac{2}{\sigma(1-2\lambda)} \left[-\lambda\sqrt{\tilde{E}_r^2 - \tilde{m}^2} + (1-\lambda)\tilde{\eta}\eta_2 \right]. \quad (34)$$

Важливими фізичними параметрами зв'язаних станів є також асимптотичні коефіцієнти A_F , A_G радіальних хвильових функцій на нескінченності. Разом з коефіцієнтами C_F , C_G в нулі (27) асимптотичні коефіцієнти $A_{F,G}$ постійно вживаються у квантовій механіці [21], атомній і ядерній фізиці [22, 23], в оберненій задачі квантової теорії розсіяння [24, 25] і та ін. Для потенціалів (13) величини $A_{F,G}$ пов'язані з асимптотиками нормованих радіальних хвильових функцій співвідношеннями

$$F, G = A_{F,G} r^{\tilde{\gamma}} \exp \left(-\frac{\sqrt{1-2\lambda}\sigma}{2} r^2 - \frac{\eta_1}{\sqrt{1-2\lambda}} r \right), \quad \sigma r \rightarrow \infty, \quad (35)$$

де $\sigma > 0$, $A_F = -\sqrt{1-2\lambda} A_G$, $\tilde{\gamma} = \frac{\eta_2^2}{2(1-2\lambda)^{3/2}\sigma} - \frac{\lambda\xi}{\sqrt{1-2\lambda}}$, а параметр λ пробігає значення в області $0 \leq \lambda < 1/2$.

У підбар'єрній області $r > r_1 = a$ далеко від точки повороту $r_1 = a$ при виконанні умов $\sigma/\xi\tilde{m}^2 \ll 1$ і $\tilde{E} < \tilde{m}$ квазікласичні розв'язки (6), (7) після обчислення інтегралів набувають вигляду загасаючих експонент

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \approx \frac{1}{\sqrt{Tq_0}} \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{m} + \tilde{E}_0 + (1-2\lambda)\sigma r} \\ -\sqrt{\tilde{m} - \tilde{E}_0 + \sigma r} \end{pmatrix} \left(\frac{4\mu_0^4\theta_0^{-1}r}{\mu_0^2 + \mu_0q_0 + \eta_{10}\sigma r} \right)^{\frac{\xi\tilde{E}_0}{\mu_0}} \times \left(\frac{\xi\tilde{m} - k\mu_0}{\xi\tilde{m} + k\mu_0} \right)^{1/4} \left(\frac{\sqrt{1-2\lambda}q_0 + (1-2\lambda)\sigma r + \eta_1 + \xi\tilde{E}(1-2\lambda)\sigma/\mu^2}{\sqrt{1-2\lambda}[\mu + \xi(\lambda\mu^2 + 2\eta_1\tilde{E})/\mu^3] + \eta_1 + \xi\tilde{E}(1-2\lambda)\sigma/\mu^2} \right)^{\tilde{\gamma}} \times \left(\frac{\xi\tilde{E}_0 - \gamma\mu_0}{\xi\tilde{E}_0 + \gamma\mu_0} \right)^{\gamma/2} \exp \left[-\frac{q_0 r}{2} + \frac{\eta_1(\mu - q_0)}{2(1-2\lambda)\sigma} + \frac{\xi\tilde{E}(\mu + q_0)}{2\mu^2} \right], \quad (36)$$

причому $q_0 = \sigma\sqrt{(1-2\lambda)(r-c)(r-d)}$. Оцінки показують, що при виконанні умови $\sigma/\xi\tilde{m}^2 \ll 1$ та $\tilde{E} < \tilde{m}$ існує досить протяжна область відстаней r , набагато більша за розміри кулонівської ВП-системи ($r \gg \langle r \rangle$, див. (59) або (60) у [13]) і набагато менших за те значення $\tilde{r} \approx (\tilde{E}\xi/\eta_1\sigma)^{1/2}$, на якому кулонівська взаємодія стає порівняною за величиною з далекодією. У цій області як хвильові функції нульового наближення природно взяти незбурені радіальні функції F і G релятивістської кулонівської задачі, а потенціал $v(r)$ можна розглядати як мале збурення. Нехтуючи ним, ми одержуємо для F і G такі квазікласичні вирази:

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{m} + \tilde{E}_0} \\ -\sqrt{\tilde{m} - \tilde{E}_0} \end{pmatrix} A_{\text{кул}}^{\text{ВКБ}} r^{\frac{\xi\tilde{E}_0}{\mu_0}} e^{-\mu_0 r} = \frac{1}{\sqrt{T\mu_0}} \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{m} + \tilde{E}_0} \\ -\sqrt{\tilde{m} - \tilde{E}_0} \end{pmatrix} \left(\frac{\xi\tilde{m} - k\mu_0}{\xi\tilde{m} + k\mu_0} \right)^{1/4} \left(\frac{\xi\tilde{E}_0 - \gamma\mu_0}{\xi\tilde{E}_0 + \gamma\mu_0} \right)^{\gamma/2} \left(\frac{2\mu_0^2 r}{\theta_0} \right)^{\frac{\xi\tilde{E}_0}{\mu_0}} e^{-\mu_0 r}. \quad (37)$$

Порівняння (37) з асимптотичним (при $r \rightarrow \infty$) представленням розв'язків рівняння Дірака в кулонівському полі [20]

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{m} + \tilde{E}_0} \\ -\sqrt{\tilde{m} - \tilde{E}_0} \end{pmatrix} A_{\text{кул}} r^{\frac{\xi \tilde{E}_0}{\mu_0}} e^{-\mu_0 r} \quad (38)$$

приводить до явного виразу для періоду радіальних коливань класичної релятивістської частинки:

$$T = \frac{1}{2\mu_0 |A_{\text{кул}}|^2} \left(\frac{\xi \tilde{m} - k\mu_0}{\xi \tilde{m} + k\mu_0} \right)^{1/2} \left(\frac{2e\mu_0^2}{\theta_0} \right)^{\frac{2\xi \tilde{E}_0}{\mu_0}} \times \left(\frac{\xi \tilde{E}_0 - \gamma\mu_0}{\xi \tilde{E}_0 + \gamma\mu_0} \right)^\gamma. \quad (39)$$

Тут $A_{\text{кул}}$ — асимптотичний коефіцієнт діраківських радіальних хвильових функцій у кулонівському потенціалі:

$$|A_{\text{кул}}| = \left[\frac{(\xi \tilde{m} - k\mu_0)\mu_0}{2\xi \tilde{m}^2 \Gamma(2\gamma + n'_r + 1) n'_r!} \right]^{1/2} (2\mu_0)^{\frac{\xi \tilde{E}_0}{\mu_0}}. \quad (40)$$

Порівняння (37) і (38) показує, що експоненціальні та степеневі множники в них одні й ті ж, проте асимптотичні коефіцієнти $A_{\text{кул}}^{\text{БКВ}}$ і $A_{\text{кул}}$ відрізняються в межах похибки між формулою Стірлінга і Γ -функцією.

Формула (37) одержана при нехтуванні лінійною частиною потенціалу $v(r)$. Вище це наближення аргументували тим, що у квазікласичних умовах ($\sigma/\xi \tilde{m}^2 \ll 1$) є область відстаней $\langle r \rangle \ll r \ll \tilde{r}$, у якій спотворенням хвильової функції за рахунок дії лінійної частини потенціалу $v(r)$ ще можна нехтувати і діє закон спадання радіальних функцій (37), характерний для релятивістської кулонівської задачі. Зміна закону спадання (37) функцій $F(r)$ і $G(r)$ на (35) при $r \gg \tilde{r}$ відбувається завдяки врахуванню в ЕП $U(r, E)$ квадратичних за σr членів, які зі збільшенням r ростуть швидше за інші, відіграючи, таким чином, роль збурення, що руйнує асимптотичний режим (37). У результаті такого врахування, що використовує квазікласичне наближення (36) для нормованих радіальних функцій F і G при великих r , одержуємо такий вираз для асимптотичного коефіцієнта на нескінченності:

$$A_F = 2\mu_0 A_{\text{кул}} (1 - 2\lambda)^{\tilde{\gamma} + 1/4} \sigma^{\tilde{\gamma}} \left(\frac{\mu_0^2}{\sigma} \right)^{\frac{\xi \tilde{E}_0}{\mu_0}} \left(\frac{\sqrt{1 - 2\lambda}\mu_0 + \eta_{10}}{2} \right)^{-\frac{\xi \tilde{E}_0}{\mu_0} - \tilde{\gamma}} \times \exp \left[-\frac{(\sqrt{1 - 2\lambda}\mu_0 - \eta_{10})^2}{4(1 - 2\lambda)^{3/2}\sigma} \right]. \quad (41)$$

Перейдімо тепер до іншого граничного випадку $\sigma\gamma/\tilde{E}^2 \ll 1$, коли відцентровий потенціал $\gamma^2/2mr^2$ не відіграє істотної ролі на великих відстанях і може бути виключений із квазікласичного імпульсу $p(r) = iq(r)$. Розкладаючи потім величину $q(r) = |p(r)|$ за кулонівським потенціалом і обчислюючи інтеграли в показниках експонент в (6), (7) з урахуванням умови $\sigma\gamma/\tilde{E}^2 \ll 1$, приходимо в асимптотичній області $r \rightarrow \infty$ до формул типу (35) для F і G , у яких

$$A_F = \frac{(1 - 2\lambda)^{1/4}}{\sqrt{T}} \left(\frac{2(1 - 2\lambda)\sigma}{\eta_2} \right)^{\tilde{\gamma}} \exp \left[-\frac{2\eta_1^2 - \eta_2^2}{4(1 - 2\lambda)^{3/2}\sigma} + \frac{\xi \tilde{m} \eta_2}{2\sqrt{1 - 2\lambda}(\tilde{E}^2 - \tilde{m}^2)} + \frac{\xi \tilde{E}}{\sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{m}^2}} \arccos \left(-\frac{\eta_1}{\eta_2} \right) \right], \quad (42)$$

а період T визначається попереднім виразом (34).

IV. ШИРИНА КВАЗИСТАЦІОНАРНИХ СТАНІВ

У наведеному вище розгляді ігнорувалася квазістаціонарний характер штарківського спектра. Тут варто нагадати, що при $1/2 < \lambda \leq 1$ і будь-якому значенні $\sigma \neq 0$ $U(r, E_r)$ має вигляд потенціалу з бар'єром, унаслідок чого, замість дискретних рівнів, виникають квазістаціонарні стани з комплексною енергією $E = E_r - i\Gamma/2$. Це результат притягальної дії члена $-V^2/2$, який на великих відстанях при $1/2 < \lambda \leq 1$ сильно придушує внесок усіх інших доданків у (15) і перетворює фінітну область руху ферміона в інфінітну. Таким чином можна стверджувати, що вплив (домінуючого на великих відстанях) далекодійного векторного поля $V_{1,r}(r)$, строго кажучи, проявляється не

тільки в зміні енергетичного спектра системи, але й приводить до відмінної від нуля ймовірності її розпаду шляхом просочування ферміона через потенціальний бар'єр в ЕП $U(r, E_r)$.

Ймовірність тунельного переходу частинки зі зв'язаного стану (з енергією E_r) у стан неперервного спектра визначається уявною частиною комплексної енергії квазістаціонарних станів [14, 15]:

$$\Gamma = -2 \text{Im}[G^*(r)F(r)]_{r \rightarrow \infty}.$$

Обчислюючи за допомогою квазікласичних формул (8)–(10) потік частинок, що відлітають на нескінченність, знаходимо для ширини рівня Γ такий вираз:

$$\Gamma = \frac{1}{T} \exp[-2\Omega], \quad (43)$$

де

$$T = 2 \int_c^b \frac{E_r - V}{p} dr, \quad \Omega = \int_b^a \left(q - \frac{kw}{qr} \right) dr. \quad (44)$$

Одержана квазікласична формула (43) є релятивістським узагальненням добре відомої формули Гамова для ширини квазістаціонарного рівня. Нетривіальним моментом такого узагальнення є зміна виразу для періоду коливань T і поява перед експонентою у виразі (43) додаткового множника, який залежить від знака квантового числа k і зобов'язаний своєю появою спін-орбітальному зв'язку в суміші скалярного $S(r)$ і векторного $V(r)$ потенціалів.

Отже, у квазікласичному наближенні задача зводиться до обчислення двох характерних фазових інтегралів T і Ω .

Скориставшись знову позначеннями розд. IV [13], запишемо величину q , що входить у (44), у зручній для наших цілей формі

$$q = |\sigma| \sqrt{2\lambda - 1} \frac{\sqrt{(a-r)(r-b)(r-c)(r-d)}}{r},$$

де параметр λ пробігає значення від $1/2$ до 1 . Інтеграли в правих частинах формул (44) зводяться при належному (аналогічному (15), (16)) перетворенні підінтегральних функцій до повних еліптичних інтегралів. Ми не будемо вдаватися в деталі зазначених обчислень T і Ω , а наведемо тільки фінальний результат:

$$T = \frac{4}{|\sigma| \sqrt{(a-c)(b-d)(2\lambda-1)}} \left[d\tilde{E}_r + \xi - \lambda\sigma \left(d^2 - \frac{(c-d)^2}{2(1-\bar{\nu})} \right) F(\bar{\chi}) + \frac{\lambda\sigma\bar{\nu}(c-d)^2}{2\Re} E(\bar{\chi}) + (c-d) \left(\tilde{E} - \lambda\sigma \left(2d + \frac{(c-d)\bar{N}}{\Re} \right) \right) \Pi(\bar{\nu}, \bar{\chi}) \right], \quad (45)$$

$$\Omega = \frac{2\sqrt{2\lambda-1}}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \left[-\frac{|\sigma|(b-c)^2}{\Re} \left[N_1 F(\chi) + N_2 E(\chi) + N_3 \Pi(\nu, \chi) + N_4 \Pi\left(\frac{c}{b}\nu, \chi\right) \right] + \frac{k}{2(2\lambda-1)|\sigma|} \left[(b-c)(N_5 \Pi(\nu_+, \chi) + N_6 \Pi(\nu_-, \chi)) + N_7 F(\chi) \right] \right]. \quad (46)$$

Наявні в (45), (46) величини ν , ν_{\pm} , χ , \Re , \bar{N} , N_j ($j = 1, 2, \dots, 7$) і $\bar{\nu}$, $\bar{\nu}_{\pm}$, $\bar{\chi}$, $\bar{\Re}$, \bar{N} , \bar{N}_j визначені в (Д.1)-(Д.6) та (18).

Знайдені формули (45), (46) справедливі при великих значеннях модулів фазових інтегралів T , Ω і разом з (43) вирішують питання про обчислення ширин Γ штарківських підбар'єрних резонансів при $U_{min} < \bar{E}_r < U_{max}$. Однак ці формули доволі громіздкі і для конкретних розрахунків не досить зручні. Щоб одержати аналітичний вираз для ширини квазістаціонарного рівня Γ , викладки для $\tilde{E}_r < \tilde{m}$ і $\tilde{E}_r > \tilde{m}$ варто проводити окремо.

А. Почнімо з простішого в обчислювальному відношенні випадку квазістаціонарних рівнів з $\tilde{E}_r > \tilde{m}$ ($\bar{E}_r < U_{max}$), коли при виконанні умов $\sigma\gamma \ll \tilde{E}_r^2$, $\sigma > 0$ класичні точки повороту b і a розташовані досить далеко від пари точок d і c . Асимптотичний розклад для бар'єрного інтеграла Ω можна будувати за допомогою процедури, дуже близької до тієї, що була застосована в пункті А розд. II до інтегралів квантування J_1 і J_2 для чисто дискретного спектра. Не вдаючись у деталі обчислень, наведемо лише кінцеву формулу для ширини квазістаціонарного рівня:

$$\Gamma \approx \frac{1}{T} \exp \left[-2\Omega(\tilde{E}_r, \lambda) \right], \quad (47)$$

$$\Omega(\tilde{E}_r, \lambda) = \frac{\pi}{2\sqrt{2\lambda-1}} \times \left(\frac{\eta_2^2}{\sigma(2\lambda-1)} + 2\xi\lambda + \frac{2\tilde{E}_r\xi\sqrt{2\lambda-1}}{\sqrt{\tilde{E}_r^2 - \tilde{m}^2}} \right), \quad (48)$$

де величина η_2 визначена вище в (19). Відповідні розклади для енергії \tilde{E}_r та періоду T подано попередніми формулами (24)–(25) та (34). Аналітичні вирази (47), (34) дають змогу за відомими залежностями $E_r(\sigma)$, одержаними за допомогою формул (24)–(25) або ж числовим розв'язанням трансцендентного рівняння (18), розраховувати ширини підбар'єрних резонансів у “перехідній” області значень напруженості σ радіально-постійного (скалярного і векторного) далекодійного поля.

Як видно з рис. 2, функція $\Omega(E_r, \lambda)$ монотонно спадає зі зростанням параметра λ , тому зменшення відносної ваги $(1-\lambda)$ лоренц-скаляра $S_{1,r}(r)$ у далекодійній частині $v(r)$ взаємодії (13) різко збільшує ймовірність йонізації квазістаціонарного рівня.

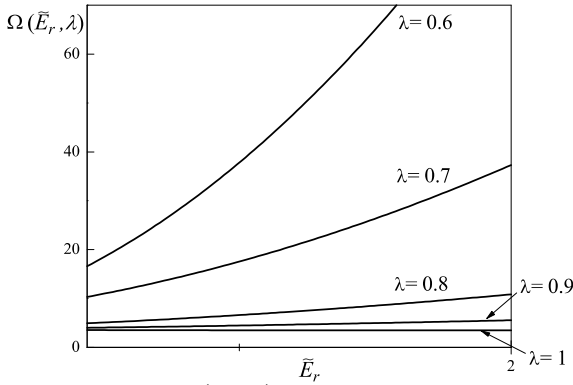


Рис. 2. Функція $\Omega(E_r, \lambda)$, що визначає експоненційний множник у ймовірності йонізації (47), залежно від енергії рівня E_r , $0.44 \text{ GeV} < E_r < 2 \text{ GeV}$.

Коли енергія рівня наближається до вершини бар'єра ($\bar{E}_r \rightarrow U_{\max}$), квазікласична формула (47) для ширини рівня перестає працювати. З огляду на ефективний потенціал це відповідає зближенню точок повороту b і a , внаслідок чого зникає експоненційна малість ширини рівня Γ . У цьому випадку ЕП $U(r, E_r)$ у підбар'єрній області $b < r < a$ переходить у параболічний і виникає задача, аналогічна обчисленню

проникності параболічного бар'єра у квантовій механіці. Перелік формул, необхідних для розгляду цього випадку, наведено, наприклад, у роботах [26, 27].

Б. При $\tilde{E}_r < \tilde{m}$, $U_{\min} < \bar{E}_r$ асимптотичні розклади T і Ω за додатними степенями малого безрозмірного параметра $\sigma/\xi\tilde{m}^2$ будуються тими ж прийомами, що й у пункті Б розд. II. Заради стислості викладу обмежимося одержанням асимптотичного наближення для інтеграла Ω , що визначає бар'єрний фактор. Припускаючи, що потенціальний бар'єр в ЕП $U(r, E_r)$ є досить широким, розіб'ємо область інтегрування $b \leq r \leq a$ на дві частини точкою r^* такою, що $b \ll r^* \ll a$ (це можливо через те, що $a \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow 0$). У першій області, $b \leq r \leq r^*$, далекодійний потенціал $v(r)$ можна розглядати як мале збурення, а в другій — $r^* \leq r \leq a$, навпаки, кулонівське поле значно слабше за далекодійне, і його можна розглядати як мале збурення. Розкладаючи величину $q(r)$ у кожній області за малим параметром — збуренням, одержимо в (44) ряд табличних інтегралів, сума яких дає з точністю до члена $O(\sigma/\xi\tilde{m}^2)$ значення бар'єрного інтеграла Ω . Опускаючи деталі, зміст яких зрозумілий, наведемо асимптотику уявної частини енергії квазістаціонарного стану в режимі слабкого зв'язку:

$$\Gamma \approx \frac{1}{T} \left(\frac{4\mu_0^4 e}{|\sigma|\eta_{20}\theta_0} \right)^{\frac{2\tilde{E}_0\xi}{\mu_0}} \left(\frac{\tilde{m}\xi - \mu_0 k}{\tilde{m}\xi + \mu_0 k} \right)^{1/2} \left(\frac{\tilde{E}_0\xi - \mu_0\gamma}{\tilde{E}_0\xi + \mu_0\gamma} \right)^\gamma \times \exp \left\{ -\frac{\mu\eta_1}{\sigma(2\lambda-1)} - \frac{1}{|\sigma|\sqrt{2\lambda-1}} \left(\frac{\eta_2^2}{2\lambda-1} + 2\lambda\xi\sigma \right) \arccos \left(-\frac{\eta_1}{\eta_2} \operatorname{sgn} \sigma \right) \right\}. \quad (49)$$

Цей результат справедливий як при додатних, так і при від'ємних значеннях параметра σ , і знову можна користуватися формулою (31) або (39) для періоду коливальності класичної релятивістської частинки з енергією E_r у потенціальній ямі $c < r < b$. Якщо скористатися для періоду точнішим виразом (39), отриманим зшиванням ВКБ-розв'язку (37) з асимптотикою релятивістської кулонівської хвильової функції при $r \rightarrow \infty$, то ширину квазістаціонарних рівнів (49) можна записати у вигляді

$$\Gamma = 2\mu_0 |A_{\text{кул}}|^2 \left(\frac{2\mu_0^2}{|\sigma|\eta_{20}} \right)^{\frac{2\xi\tilde{E}_0}{\mu_0}} \exp \left\{ -\frac{\Phi(\tilde{E}_0, \lambda)}{|\sigma|} - \frac{2\lambda\mu_0\rho}{2\lambda-1} - \frac{2\operatorname{sgn} \sigma}{\sqrt{2\lambda-1}} \left[\frac{(1-\lambda)\eta_{20}\rho}{2\lambda-1} + \lambda\xi \right] \arccos \left(-\frac{\eta_{10}}{\eta_{20}} \operatorname{sgn} \sigma \right) \right\}, \quad (50)$$

де $A_{\text{кул}}$ — асимптотичний коефіцієнт (40) нормованої хвильової функції в кулонівському потенціалі, а позначення \tilde{E}_0 , μ_0 , η_{10} та η_{20} були введені в (21), (22). Функції $\Phi(\tilde{E}_0, \lambda)$ та $\rho(\tilde{E}_0, \lambda)$, що фігурують у показнику експоненти (50), подано формулами

$$\Phi(\tilde{E}_0, \lambda) = (2\lambda-1)^{-1} \left\{ \frac{\eta_{20}^2}{\sqrt{2\lambda-1}} \arccos \left(-\frac{\eta_{10}}{\eta_{20}} \operatorname{sgn} \sigma \right) + \eta_{10}\mu_0 \operatorname{sgn} \sigma \right\}, \quad (51)$$

$$\rho(\tilde{E}_0, \lambda) = \frac{1}{2\xi\tilde{m}^2} \left[\left(\frac{\xi^2\tilde{m}^2}{\mu_0^2} - k^2 \right) \eta_{10} + \left(\frac{2\xi^2\tilde{m}\tilde{E}_0}{\mu_0^2} - k \right) \eta_{20} \right].$$

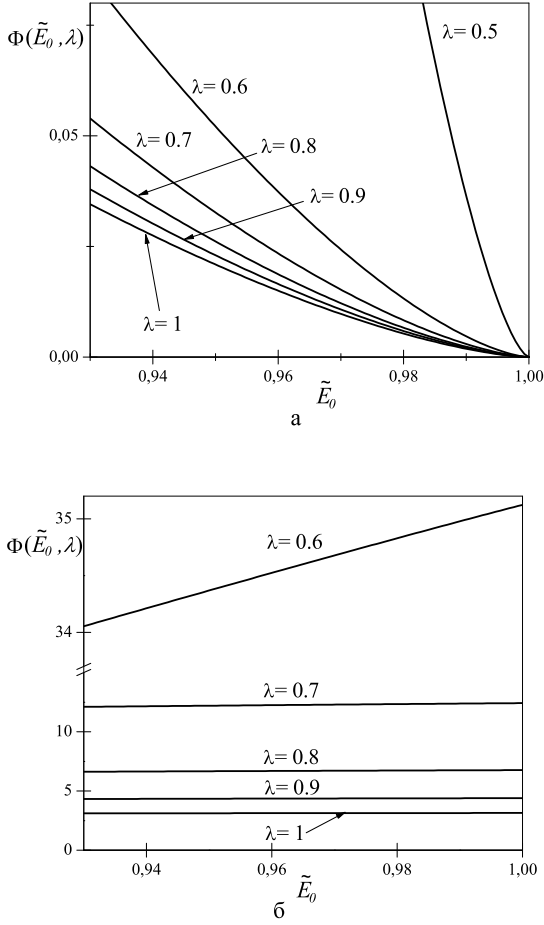


Рис. 3. Функція $\Phi(\tilde{E}_0, \lambda)$, що визначає експоненційний множник у ймовірності йонізації (50), залежно від енергії рівня E_0 (в GeV); а) випадок $\sigma < 0$, б) випадок $\sigma > 0$

Порівняння з результатами числового рахунку за допомогою “точних” квазикласичних формул (43), (45) та (46) показує, що похибка (50), (51) не перевищує 2% при $|\sigma| \sim 10^{-6} - 10^{-4}$ GeV². Тому формулою (50) зручно користуватися для швидких оцінок Γ . На рис. 3 зображено графіки залежності функції $\Phi(\tilde{E}_0, \lambda)$ від енергії рівня \tilde{E}_0 для декількох значень параметра змішування λ . Як видно з рис. 3а ($\sigma < 0$), значення $\Phi(\tilde{E}_0, \lambda)$ збільшується при заглибленні рівня \tilde{E}_0 і зменшується зі зростанням коефіцієнта змішування λ ($1/2 < \lambda \leq 1$). Останній факт легко пояснити: зі збільшенням відносної ваги λ (від $1/2$ до 1) лоренц-вектора $V_{l.r.}(r)$ у далекодійній частині $U(r, E_0)$ на великих відстанях притягання зростає, а ефективна ширина бар’єра скорочується. Це приводить до того, що при $|\sigma| \sim 10^{-6} - 10^{-4}$ GeV² збільшення параметра λ ($1/2 < \lambda \leq 1$) приводить до збільшення ймовірності йонізації Γ , а зменшення \tilde{E}_0 , тобто заглиблення зв’язаного рівня, навпаки, зменшує її (при фіксованих значеннях λ і σ). У випадку додатних значень σ функція $\Phi(\tilde{E}_0, \lambda)$ монотонно спадає зі зростанням параметра λ (рис. 3б), тому зменшення відносної ваги

$(1 - \lambda)$ лоренц-скаляра $S_{l.r.}(r)$ у далекодійній частині $v(r)$ взаємодії (13) різко збільшує ймовірність йонізації квазістаціонарного рівня (при одному й тому ж значенні σ).

Формула (50) є асимптотично точною в границі $\sigma \rightarrow 0$. При малих $\sigma \neq 0$ в (50) суттєву роль відіграє лише експоненційний фактор, що вкрай різко залежить від напруженості далекодійного поля і змінюється на багато порядків. Однак область застосовності формули (50) є досить вузькою: $|\sigma| \lesssim 10^{-4}$ GeV².

Як видно з (50), ширина квазістаціонарного рівня пропорційна квадратові асимптотичного коефіцієнта $A_{кул}$. Це не дивно, оскільки при $\sigma/\xi\tilde{m}^2 \ll 1$ і $\tilde{E}_r < \tilde{m}$ йонізація йде з “хвоста” кулонівської хвильової функції, а бар’єр є широким.

У тому випадку, коли, окрім кулонівського, є тільки радіально-постійне електричне поле ($\lambda = 1$), з формули (50) при $V_0 = 0$, $\sigma < 0$ та $\xi = Z\alpha$ (Z – заряд ядра, $\alpha \approx 1/137$ – стала тонкої структури) одержуємо ($\hbar = m = c = 1$):

$$\Gamma = 2\mu_0 |A_{кул}|^2 \left(\frac{2\mu_0^2}{|\sigma|} \right)^{\frac{2E_0 Z \alpha}{\mu_0}} \times \exp \left[-\frac{\Phi(E_0)}{|\sigma|} + 2Z\alpha \arccos E_0 - 2\rho \sqrt{1 - E_0^2} \right], \quad (52)$$

де E_0 – енергія зв’язаного стану за відсутності ($\sigma = 0$) зовнішнього поля, а

$$\rho = \frac{1}{2Z\alpha} \left[E_0 \left(\frac{3Z^2\alpha^2}{1 - E_0^2} - k^2 \right) - k \right].$$

Функція $\Phi(E_0)$ у показнику експоненти дана виразом

$$\Phi(E_0) = \arccos E_0 - E_0 \sqrt{1 - E_0^2} \quad (53)$$

і має очевидну властивість $\Phi(-E_0) = \pi - \Phi(E_0)$.

Розглянемо деякі граничні випадки для отриманого виразу (52):

1. Почнімо з йонізації s -рівня, зв’язаного короткодійними ($Z = 0$) силами, під дією радіально-постійного електричного поля $\sigma < 0$. У цьому випадку з (52) з експоненційною точністю одержуємо вираз

$$\Gamma \propto \exp \left[-\frac{\Phi(E_0)}{|\sigma|} \right], \quad (54)$$

який з експоненційною точністю збігається з результатом робіт [10] для штарківської йонізації s -рівня, зв’язаного короткодійним або δ -потенціалом (що є хорошим наближенням для йонізації однозарядних від’ємних йонів, таких, як H^- , Na^- і т. д.).

2. За наявності кулонівського поля доречно розглянути різні граничні випадки для величин, що фігурують у формулі (52):

$$\arccos E_0 = \begin{cases} (1 - E_0^2)^{1/2} + \frac{1}{6} (1 - E_0^2)^{3/2} + \dots, & E_0 \rightarrow 1, \\ \frac{\pi}{2} - E_0 - \frac{1}{6} E_0^3 + \dots, & E_0 \rightarrow 0, \\ \pi - (1 - E_0^2)^{1/2} - \frac{1}{6} (1 - E_0^2)^{3/2} + \dots, & E_0 \rightarrow -1, \end{cases} \quad (55)$$

$$\Phi(E_0) = \begin{cases} \frac{2^{5/2}}{3} (1 - E_0)^{3/2} \left[1 - \frac{3}{20} (1 - E_0) + \dots \right], & E_0 \rightarrow 1, \\ \frac{\pi}{2} - 2E_0 + \frac{1}{3} E_0^3 + \dots, & E_0 \rightarrow 0, \\ \pi - \frac{2^{5/2}}{3} (1 + E_0)^{3/2} + \dots, & E_0 \rightarrow -1. \end{cases} \quad (56)$$

У нерелятивістській границі ($E_0 \rightarrow 1$, $\alpha \rightarrow 0$) формула (52) переходить у відомий вираз [28] для ширини підбар'єрних резонансів у сферичній моделі ефекту Штарка для атома водню:

$$\Gamma = 2\mu_{\text{нер}} |A_{\text{нер}}|^2 \left(\frac{2\mu_{\text{нер}}^2}{|\sigma|} \right)^{2n} \exp \left(-\frac{2\mu_{\text{нер}}^3}{3|\sigma|} \right), \quad (57)$$

де тепер $\mu_{\text{нер}} = Z/n$, n — головне квантове число, $A_{\text{нер}}$ — асимптотичний (на нескінченності) коефіцієнт кулонівської хвильової функції вільного ($\sigma = 0$) нерелятивістського ВП-атома.

Поправка порядку α у показнику експоненти (52) трохи збільшує ймовірність йонізації порівняно з відповідною нерелятивістською формулою (57). Множник $\Phi(E_0)$ в експоненті (52) монотонно зростає при заглибленні рівня (так, він дорівнює $\pi/2$ і π при $E_0 = 0$ та $E_0 = -1$), що приводить до різкого спаду ймовірності йонізації.

При $E_0 \rightarrow -1$, тобто для рівня, що опустився до межі нижнього континууму, головний (експоненційний) фактор в (52) стає рівним $\exp(-\pi/|\sigma|)$ і збігається з відповідним множником в (отриманій у межах квантової теорії поля) формулі Швінгера [29] для ймовірності народження електрон-позитронних пар із вакууму в постійному електричному полі.

ВИСНОВКИ

Отриманими вище формулами описано спектр квазістаціонарних рівнів для прийнятої гібридної версії СМЕШ. Така модель якісно передає характерні риси

квазістаціонарних станів у суміші скалярного й векторного потенціалів бар'єрного типу (13): 1) дуже сильну (при малих σ) залежність Γ від енергії зв'язку тунелюючого ферміона та коефіцієнта змішування λ ; 2) неаналітичну залежність зсуву та ширини рівня від “сили” σ скалярної і векторної далекодійних взаємодій.

Насамкінець відзначимо, що розглянута вище версія СМЕШ могла здатися досить штучною, такою, що не стосується реальності. Щодо цього підкреслимо, що рівняння Дірака з потенціалами (13) при $1/2 < \lambda \leq 1$ може слугувати еталонним рівнянням для релятивістської теорії квазістаціонарних станів зі скалярно-векторним варіантом взаємодій. Як відомо, на сьогодні є всі підстави вважати, що такі взаємодії існують між складовими об'єктами (кварками та глюонами) в КХД. У ядерних реакціях тунельного типу також може проявитися повною мірою специфіка скалярно-векторного варіанту взаємодій, яку варто враховувати при обчисленні ймовірності проникнення тунелюючих фрагментів крізь потенціальні бар'єри.

Приклади сильного впливу скалярного поля на спектри резонансних станів сильно взаємодіючих частинок дає нам недавній аналіз (див., наприклад, огляд групи ПЯФ [30]) експериментальних даних колаборації Crystal Barrel з протон-антипротонної анігіляції в польоті з народженням мезонів у кінцевому стані в області нижче 2400 МеВ. Зокрема, в роботі [30] зроблено припущення, що існування легкого σ -мезона може бути зумовлено сингулярною поведінкою кварк-антикваркової взаємодії при малих переданих імпульсах, пропорційної $1/q^4$. Це відповідає в координатному просторі лінійному зростанню потенціалу $v(r)$ на великих відстанях.

ДОДАТОК

Запроваджені в розділі II величини мають такий вигляд:

$$\nu = \frac{a-b}{a-c}, \quad \nu_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm}-c}{\lambda_{\pm}-b} \nu, \quad \chi = \sqrt{\nu \frac{(c-d)}{(b-d)}}, \quad \Re = (1-\nu)(\chi^2 - \nu), \quad (\text{Д.1})$$

$$N_1 = \frac{\chi^2(b-c)}{4} - \frac{3\aleph(b-c)}{8(1-\nu)} - \frac{(\chi^2 - \nu)}{2}(f+3c) + \frac{\Re}{(b-c)^2}(c^3 + c^2f + cg + h + l/c), \quad (\text{Д.2})$$

$$N_2 = -\frac{\nu}{2} \left[f + 3c + \frac{3(b-c)\aleph}{4\Re} \right], \quad (\text{Д.3})$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{3(b-c)\aleph^2}{4\Re} + \frac{2\Re}{(b-c)}(3c^2 + 2cf + g) + (b-c)((1+\chi^2)\nu - 3\chi^2) + \aleph(f+3c) \right], \quad (\text{Д.4})$$

$$N_4 = -\frac{\Re}{(b-c)} \frac{l}{bc}, \quad N_5 = [(b-\lambda_+)(\lambda_+ - c)]^{-1}, \quad N_6 = [(b-\lambda_-)(\lambda_- - c)]^{-1}, \quad (\text{Д.5})$$

$$N_7 = \frac{2}{(\lambda_+ - c)(\lambda_- - c)} \left(c + \frac{\tilde{E} + \tilde{m}}{2(1-2\lambda)\sigma} \right), \quad \aleph = \chi^2(3-2\nu) + \nu(\nu-2). \quad (\text{Д.6})$$

-
- [1] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* (Наука, Москва, 1971).
- [2] В. С. Попов, Усп. физ. наук **174**, 921 (2004).
- [3] Б. И. Горячев, Н. В. Линькова, Яд. физ. **62**, 1942 (1999).
- [4] В. С. Попов, Яд. физ. **64**, 421 (2001).
- [5] Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, Усп. физ. наук **105**, 403 (1971).
- [6] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях* (Энергоатомиздат, Москва, 1988).
- [7] W. Greiner, B. Muller, J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1985).
- [8] О. Г. Ситенко, В. К. Тартаковский, *Теория ядра* (Либідь, Київ, 2000).
- [9] I. Tamm, Nature **133**, 981 (1934).
- [10] В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, В. С. Попов, Журн. эксп. теор. физ. **114**, 798 (1998); В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, Письма журн. эксп. теор. физ. **79**, 320 (2004).
- [11] М. С. Маринов, В. С. Попов, Яд. физ. **15**, 1271 (1972).
- [12] J. Reinhardt, W. Greiner, Rep. Prog. **40**, 219 (1977).
- [13] В. Ю. Лазур, А. К. Рейтгий, В. В. Рубиш, Теор. мат. физ. **155**, 371 (2008).
- [14] V. V. Rubish, V. Yu. Lazur, O. K. Reity, S. Chalupka, M. Salak, Czech. J. Phys. **54**, 897 (2004); В. Ю. Лазур, А. К. Рейтгий, В. В. Рубиш, Теор. мат. физ. **143**, 83 (2005).
- [15] В. Ю. Лазур, В. В. Рубиш, О. К. Рейтгий, Журн. физ. докл. **9**, 1 (2005).
- [16] A. Zwaan, Arch. Neerl. Sci. **12**, 33 (1929).
- [17] V. D. Mur, V. S. Popov, Yu. A. Simonov, V. P. Yurov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **105**, 3 (1994).
- [18] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. ВЗТ. (пер. с англ.)* (Наука, Москва, 1967).
- [19] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды* (Наука, Москва, 1981).
- [20] А. И. Ахизер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1981).
- [21] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)* (Наука, Москва, 1974).
- [22] Б. М. Смирнов, М. И. Чибисов, Журн. эксп. теор. физ. **49**, 841 (1965).
- [23] T. Yamabe, A. Tachiban, H.J. Silverstone, Phys. Rev. A **16**, 877 (1977).
- [24] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles* (McGraw-Hill, New York, 1982).
- [25] Т. Ю. Ву, Т. Омюра, *Квантовая теория рассеяния* (Наука, Москва, 1969).
- [26] В. Д. Мур, В. С. Попов, Яд. физ. **28**, 837 (1978).
- [27] В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский, В. Л. Елецкий, В. Д. Мур, Журн. эксп. теор. физ. **76**, 431 (1979).
- [28] В. Д. Мур, В. С. Попов, Журн. эксп. теор. физ. **104**, 2293 (1993).
- [29] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [30] V. V. Anisovich, V. A. Nikonov, J. Nyiri, Yad. Phys. **64**, 877 (2001); hep-ph/0008163 (2000).

**THE RELATIVISTIC QUASICLASSICAL THEORY OF TUNNELING IONIZATION
IN AN EXTERNAL SCALAR AND VECTOR FIELDS**

V. Yu. Lazur, V. V. Rubish, O. K. Reity
*Uzhgorod National University, Department of Theoretical Physics,
54, Voloshyna Str., Uzhgorod, UA-88000, Ukraine*

The Bohr–Sommerfeld quantization rule and the Gamow formula for the width of quasistationary level are generalized with taking into account the relativistic effects, spin and Lorentz structure of the interaction potentials. The relativistic quasiclassical theory of ionization of the Coulomb system ($V_{\text{Coul}} = -\xi/r$) by radial-constant long-range scalar ($S_{\text{l.r.}} = (1 - \lambda)(\sigma r + V_0)$) and vector ($V_{\text{l.r.}} = \lambda(\sigma r + V_0)$) fields is constructed. In limiting cases the approximated analytical expressions for the position E_r and width Γ of sub-barrier resonances are obtained. A strong dependence of the width Γ of sub-barrier resonances both on the bound level energy and the mixing constant λ is detected. Simple analytical formulae for asymptotic coefficients of the Dirac radial wave functions at zero and infinity also are obtained.