

МІКРОСКОПІЧНІ ПАРАМЕТРИ Й МАКРОСКОПІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕАЛЬНИХ ВИРОДЖЕНИХ КАРЛИКІВ

М. В. Ваврух, С. В. Смеречинський, Н. Л. Тишко

*Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра астрофізики
вул. Кирила і Мефодія, 8, Львів, 79005, Україна*

(Отримано 25 травня 2010 р.; в остаточному вигляді — 11 листопада 2010 р.)

На основі даних про радіуси й маси вироджених карликів, знайдених за спостережуваними даними місії “Hipparcos”, оцінено мікроскопічні параметри моделі Чандрасекгара (параметра релятивізму в центрі зорі x_0 та параметра хімічного складу $\mu_e = A/Z$, де A — масове число, Z — заряд ядра) для польових карликів і карликів у подвійних системах. Одержано аналітичні вирази для макроскопічних характеристик (маса, радіус, енергія) як функцій x_0, μ_e . На основі розрахованої залежності енергії від цих параметрів знайдено обмеження на область зміни x_0 , що добре узгоджується зі спостережуваним розподілом карликів за радіусами. Уточнено критичне значення x_0 , при якому порушується стійкість за рахунок ефектів загальної теорії відносності. Запропоновано узагальнену модель із неоднорідним (залежним від координати) хімічним складом, у якій $\mu_e = \mu_e(r)$.

Ключові слова: вироджені карлики, рівняння механічної рівноваги, співвідношення “енергія–радіус”, розподіл карликів за радіусами, ефекти загальної теорії відносності, модель холодних “гелій–водневих” карликів.

PACS number(s): 97.20.Rp, 04.40.Dg

I. ВСТУП

Вироджені карлики становлять найпростіший клас компактних об’єктів Всесвіту, речовина в яких перебуває в екстремальних умовах. Тому дослідження цих зір викликало зацікавлення астрономів і фізиків упродовж усього минулого століття. Згідно із загальноприйнятим поглядом вироджені карлики є останньою фазою еволюції зір малих мас, тому вони належать до найбільш розповсюджених об’єктів у різних типах галактик. Однак через малу світність оптичні спостереження карликів можливі лише в межах Галактики, де в околицях Сонця їх відкрито вже декілька тисяч. Новітні спостереження, виконані супутниковими обсерваторіями останніми десятиріччями, знову привернули увагу дослідників до вироджених карликів. У результаті спостережень, проведених у межах місії “Hipparcos” (Європейське космічне агентство, 1997) [1], отримано досить достовірні дані як про карлики в подвійних системах, так і про польові зорі цього типу, хоча різні методи визначення характеристик карликів на основі спостережень дають дещо відмінні результати. Розбіжності у визначенні радіусів зазвичай є невеликими, а у визначенні маси — суттєвими (див. [2]).

На основі простої моделі теорію холодних карликів побудував у 40-х роках минулого століття С. Чандрасекгар, використавши ідею Р. Фаулера про механізм їхньої стійкості, зумовлений виродженням електронної підсистеми (див. [3–5]). Модель Чандрасекгара — вироджений неоднорідний ідеальний релятивістський електронний газ при абсолютному нулі температури на фоні статично розподілених ядер, які не вироджені і розглядаються як класичне неперервне

середовище. Хімічний склад карлика вважається однорідним (незалежним від координат). Теорія Чандрасекгара — двопараметрична, у ній фігурують два мікроскопічні параметри: параметр релятивізму $x_0 = (3\pi^2 n_0)^{1/3} \hbar / m_0 c$ (де n_0 — концентрація електронів у центрі зорі, m_0 — маса спокою електрона) і параметр $\mu_e = A/Z$, залежний від хімічного складу (A — кількість нуклонів, Z — кількість протонів у ядрі). Рівняння рівноваги між гравітаційним стиском і тиском електронного газу визначає розподіл густини вздовж радіуса, що дає змогу визначити макроскопічні характеристики карлика як функції параметрів x_0, μ_e . Виключаючи ці параметри, з теорії Чандрасекгара можна було б одержати співвідношення між трійками характеристик, наприклад, між повною енергією E , масою M та радіусом R . Але з обробки спостережуваних даних звичайно отримують лише значення мас та радіусів, а енергія невідома. Оскільки μ_e близьке до 2.0, то, як правило, при фіксованому μ_e виключають параметр x_0 , установлюючи залежність “маса–радіус”, яка служить тестом для теорії. У формальній ультрарелятивістській границі моделі ($x_0 \gg 1$) з теорії Чандрасекгара впливає обмеження [2, 6–8] на масу карлика: $M \leq M_{\text{ch}}$, де $M_{\text{ch}} \approx 5.76 M_{\odot} \mu_e^{-2}$. Насправді спостереження свідчать про те, що карликів дуже малих радіусів (із масами, близькими до M_{ch}) немає, а середньостатистична маса близька до $0.6 M_{\odot}$. Отже, у межах похибок спостереження підтверджують співвідношення “маса–радіус” в обмеженій області зміни мас і радіусів карликів.

Узагальненню теорії Чандрасекгара присвячено праці Хамади й Солпітера [9], Шацмана [10], Каплана [11], Шварцшильда [12], Зельдовича й Новикова [13], Шапіро й Тьюкольські [14]. У цих працях створе-

но якісну теорію охолодження карликів, проаналізовано роль міжчастинкових взаємодій, хімічного складу, процесів нейтронізації та ефектів загальної теорії відносності. У зв'язку з новітніми спостережуваними даними постає завдання уточнити модель реальних карликів, оцінити стан речовини у них, урахувати електричні взаємодії, вплив магнітних полів, осьове обертання, змінний хімічний склад (залежний від координати), а також інтерпретації спостережуваних розподілів карликів за радіусами (масами) та інші.

Деякі з цих питань розглянуті в нашій роботі як у межах стандартної моделі Чандрасекгара, так і узагальненої моделі зі змінним хімічним складом. Ми використали дані про маси й радіуси карликів, одержані зі спостережень місії "Hipparcos". Це карлики спектрального класу DA (атмосфери яких збагачені воднем), за винятком зорі Procyon B (спектральний клас DQZ). На основі даних про маси й радіуси ми оцінили параметри x_0 і μ_e для згаданих карликів. У результаті розрахунку залежності "енергія зорі-радіус" ми обґрунтували спостережуваний розподіл карликів за радіусами. Розподіл карликів за радіусами (20 зір, спостережуваних місією "Hipparcos", та 110 зір класу DA, радіуси яких узяті з роботи [15]) зіставлено з розрахованою залежністю "енергія-радіус". Установлено межі зміни параметрів стандартної моделі Чандрасекгара для "холодних" спостережуваних карликів. Уточнено значення параметра x_0 , при якому виникає нестійкість, зумовлена ефектами загальної теорії відносності. Запропоновано узагальнену модель, що відповідає "воднево-гелієвим" карликам (клас DA), у якій параметр μ_e залежить від координати. На основі радіусів і мас, одержаних зі спостережуваних даних, знайдено параметри моделі, обчислено парціальні маси водню й гелію для цих зір.

У розглянутих моделях не враховано електричних взаємодій між частинками, осьового обертання зорі, наявності магнітного поля, неповного виродження електронної підсистеми та інших факторів, які несуттєві з погляду розрахунку внутрішньої будови "холодних" вироджених карликів і можуть бути враховані в межах теорії збурень. Це підтверджується оцінками інших авторів (див. праці [16–20] і посилання в них), які розглядали вплив деяких із цих чинників на співвідношення "маса-радіус".

II. МОДИФІКОВАНЕ РІВНЯННЯ МЕХАНІЧНОЇ РІВНОВАГИ ХОЛОДНОГО КАРЛИКА

Ми розглядаємо модель холодного карлика без урахування кулонівських взаємодій, але зі змінним за радіусом хімічним складом. Така модель може описувати не тільки хімічно однорідні, але й так звані "водневі" вироджені карлики, яким у стандартній моделі Чандрасекгара відповідає $\mu_e < 2.0$ і які в периферійних шарах містять водень. Вважаючи $\mu_e(r)$ локаль-

ним параметром, запишемо його у вигляді

$$\mu_e(r) = \mu_e t(r/R), \quad (1)$$

де $t(r/R) \equiv t(r/R|\alpha, s)$ — безрозмірна функція свого аргументу (α, s — числові параметри), r — відстань від центра зорі, $\mu_e \equiv \mu_e(0)$, $t(0) = 1$; $0 < t(1) < 1$. У практичних розрахунках ми використали дві моделі для функції $t(r/R)$.

Теорія Чандрасекгара ґрунтується на рівнянні механічної рівноваги зорі без обертання

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r), \quad (2)$$

$$g(r) = G \frac{M(r)}{r^2}, \quad M(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r').$$

Тут використано такі позначення: $M(r)$ — маса внутрішньої частини зорі радіуса r , G — гравітаційна стала, $P(r)$ — локальний тиск на сфері радіуса r , $\rho(r)$ — густина маси. За умови електронейтральності

$$\rho(r) = n(r)\{\mu_e(r)m_u + m_0\} \approx m_u n(r)\mu_e(r), \quad (3)$$

де m_0 — електронна маса, m_u — атомна одиниця маси, $n(r)$ — локальна концентрація електронів, $\mu_e(r)$ — введена вище функція, що має зміст локальної безрозмірної ефективної електронної молекулярної маси (доля маси ядра, що припадає на один електрон, утворений при йонізації відповідного атома, в одиницях m_u).

Тиск ідеальної релятивістської підсистеми електронів зі спектром

$$E_k = [(m_0 c^2)^2 + \hbar^2 k^2 c^2]^{1/2} - m_0 c^2 \quad (4)$$

у локальному наближенні при $T = 0K$ дорівнює

$$P(r) = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3\hbar^3} F(x(r)), \quad (5)$$

$$F(x) = 8 \int_0^x \frac{dz z^4}{\sqrt{1+z^2}} = x(2x^2 - 3)(1+x^2)^{1/2} + 3 \ln[x + (1+x^2)^{1/2}],$$

де

$$x(r) = p_F(r)/m_0 c = \frac{\hbar}{m_0 c} (3\pi^2 n(r))^{1/3} = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{\alpha}{r_s(r)} \quad (6)$$

— локальне значення параметра релятивізму в точці r , α — стала тонкої структури, $p_F(r)$ — локальний імпульс Фермі, $r_s(r)$ — локальне значення параметра Вігнера-Бракнера ($r_s(r) = (\frac{4\pi}{3} n(r))^{-1/3} a_0^{-1}$, a_0 — радіус Бора). Параметр $r_s(r)$ пов'язаний із так званим параметром неідеальності

$$\gamma(r) = e^2[r_0(r)\varepsilon_F(r)]^{-1} \Rightarrow \begin{cases} 0,905\dots r_s(r) & \text{при } x(r) \ll 1; \\ \frac{2}{3}\alpha & \text{при } x(r) \gg 1, \end{cases} \quad (7)$$

де $\varepsilon_F(r)$ — локальна енергія Фермі, $r_0(r)$ — масштаб локальної середньої відстані між електронами. Як видно з формул (6),(7), абсолютно ідеального електронного газу немає, а за межею релятивістського виродження (коли $x(r) > 1$) параметр неідеальності має порядок 10^{-2} . Це слабко неідеальна система, яка наближено відповідає моделі Чандрасекгара.

Підставляючи вираз (5) у рівняння (2) і враховуючи означення (6), зведемо рівняння рівноваги до нелінійного рівняння для $x(r)$ або до рівняння для локального хімічного потенціалу

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{t(r/R)} \frac{d\mu}{dr} \right) = -\frac{32\pi^2}{3} \frac{G(m_u\mu_e)^2}{(hc)^3} \times \{\mu^2(r) + 2\mu(r) m_0c^2\}^{3/2} t(r/R), \quad (8)$$

де

$$\mu(r) = m_0c^2 \left\{ [1 + x^2(r)]^{1/2} - 1 \right\} \quad (9)$$

за означенням є локальною енергією Фермі в точці r . Це рівняння відрізняється від рівняння рівноваги в оригінальних роботах Чандрасекгара [5]. У стандартній моделі Чандрасекгара ($t(r/R) = 1$) рівняння (8) нагадує рівняння Лена–Емдена (див. [5,14]) і має таку ж природну асимптотику на поверхні зорі:

$$\mu(r) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow R. \quad (10)$$

Перейдімо до безрозмірних змінних у рівнянні (8), використовуючи підстановку

$$r = \xi\lambda, \quad \mu(r) = \varepsilon_0(x_0) m_0c^2 y(\xi), \quad (11)$$

де $\varepsilon_0(x_0) \equiv (1 + x_0^2)^{1/2} - 1$; $x_0 = x(0)$. Очевидно, що $R = \lambda\xi_1$, де ξ_1 — безрозмірний радіус зорі ($y(\xi_1) = 0$), тому

$$t(r/R) \equiv t(\xi/\xi_1). \quad (12)$$

Вибираючи масштаб λ з умови

$$\frac{32\pi^2 G}{3(hc)^3} [m_0m_u c^2 \mu_e \lambda \varepsilon_0(x_0)]^2 = 1, \quad (13)$$

зведемо рівняння (8) до безрозмірної форми:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^2}{t(\xi/\xi_1)} \frac{dy}{d\xi} \right) = - \left\{ y^2 + \frac{2y}{\varepsilon_0(x_0)} \right\}^{3/2} t(\xi/\xi_1). \quad (14)$$

Рівнянню (14) відповідають граничні умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ та умова $y(\xi) \geq 0$, тому що хімічний потенціал ідеальної фермі-системи не може бути від'ємним ($y(\xi) = 0$ при $\xi \geq \xi_1$). У стандартній моделі Чандрасекгара (при $t(\xi/\xi_1) = 1$) одержане рівняння є однопараметричним, у ньому фігурує лише x_0 — параметр релятивізму в центрі зорі. У випадку моделі з неоднорідним хімічним складом рівняння (14) залежить ще й від числових параметрів a, s . Нелінійність рівняння (14) зумовлена як нелінійністю правої частини стосовно $y(\xi)$, так і залежністю функції $t(\xi/\xi_1)$ від невідомого $\xi_1 \equiv \xi_1(x_0|a, s)$ — значення змінної, при якому $y(\xi)$ перетворюється в нуль.

При заданих параметрах ($x_0, \mu_e|a, s$) радіус, маса зорі й кількість електронів визначаються такими виразами:

$$R(x_0, \mu_e|a, s) = R_0 \frac{\xi_1(x_0|a, s)}{\mu_e \varepsilon_0(x_0)};$$

$$M(x_0, \mu_e|a, s) = \frac{M_0}{\mu_e^2} \mathcal{M}(x_0|a, s); \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x_0|a, s) &= \varepsilon_0^{-3}(x_0) \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 t(\xi/\xi_1) x^3(\xi) \\ &= t^{-1}(1) \left\{ \xi^2 \left| \frac{dy}{d\xi} \right| \right\} \quad \text{при } \xi = \xi_1(x_0|a, s); \end{aligned}$$

$$N_e(x_0, \mu_e|a, s) = \frac{M_0}{m_u \mu_e^3 \varepsilon_0^3(x_0)} \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 x^3(\xi);$$

$$x(\xi) = \varepsilon_0(x_0) \left\{ y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0(x_0)} y(\xi) \right\}^{1/2}.$$

Масштабні множники R_0, M_0 виражаються такими комбінаціями універсальних фізичних сталих:

$$R_0 = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{h^3}{cG} \right)^{1/2} \frac{1}{m_0 m_u}; \quad (16)$$

$$M_0 = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{hc}{Gm_u^2} \right)^{3/2} m_u.$$

Вони мають “правильний” порядок величини: $R_0 \approx 1.12 \cdot 10^{-2} R_\odot$, а $\mu_e^{-2} M_0 \approx 0.75 M_\odot$, що відповідає середньостатистичним значенням характеристик карликів. Кінетична енергія електронної підсистеми дорівнює

$$\frac{E_0}{\mu_e^3 \varepsilon_0^3(x_0)} \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 \left\{ x^3(\xi) [(1 + x^2(\xi))^{1/2} - 1] - \frac{1}{8} F(x(\xi)) \right\}, \quad (17)$$

а енергія гравітаційної взаємодії ядерної підсистеми рівна

$$\frac{E_0}{\mu_e^3 \varepsilon_0(x_0)} \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^3 \frac{dy}{d\xi} \left\{ y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0(x_0)} y(\xi) \right\}^{3/2} = -\frac{3}{8} \frac{E_0}{\mu_e^3 \varepsilon_0^3(x_0)} \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 F(x(\xi)). \quad (18)$$

Масштабом енергії є

$$E_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{m_0 c^{7/2} h^{3/2}}{G^{3/2} m_u^3} = G \frac{M_0^2}{R_0} = m_0 \frac{M_0 c^2}{m_u}. \quad (19)$$

Отже, енергія зорі дорівнює

$$\begin{aligned} E(x_0, \mu_e | a, s) &= \frac{E_0}{\mu_e^3} \mathcal{E}(x_0 | a, s), \mathcal{E}(x_0 | a, s) \\ &= \varepsilon_0^{-3}(x_0) \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 \left\{ -x^3(\xi) + \frac{3}{2} x(\xi) [1 + x^2(\xi)]^{1/2} - \frac{3}{2} \ln[x(\xi) + (1 + x^2(\xi))^{1/2}] \right\} \\ &= \varepsilon_0^{-3}(x_0) \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^3 x^2(\xi) \{1 - [1 + x^2(\xi)]^{-1/2}\} \frac{dx(\xi)}{d\xi}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для релятивістських систем зі змінною кількістю частинок слід розглядати повну енергію, яка включає енергію спокою. Враховуючи формулу для кількості електронів (див. ф.(15)) і співвідношення (19), запишемо вираз для повної енергії зорі з урахуванням енергії спокою електронів

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x_0, \mu_e | a, s) &\equiv E(x_0, \mu_e | a, s) + m_0 c^2 N_e(x_0, \mu_e | a, s) = \frac{E_0}{\mu_e^3} \tilde{\mathcal{E}}(x_0 | a, s), \\ \tilde{\mathcal{E}}(x_0 | a, s) &= \frac{3}{2} \varepsilon_0^{-3}(x_0) \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 \left\{ x(\xi) [1 + x^2(\xi)]^{1/2} - \ln[x(\xi) + (1 + x^2(\xi))^{1/2}] \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

III. СТАНДАРТНА МОДЕЛЬ ЧАНДРАСЕКГАРА

Розгляньмо насамперед стандартну модель Чандрасекгара ($t(\xi/\xi_1) = 1$). Розв'язки рівняння (14) для цього випадку, одержані чисельним інтегруванням, зображені на рис. 1. Залежність безрозмірного радіуса зорі $\xi_1(x_0)$ (значення змінної, при якому $y(\xi_1) = 0$) від параметра x_0 наведено на рис. 2.

Використовуючи прямий чисельний розв'язок рівняння (14), ми розраховували залежність макроскопічних характеристик карлика в моделі Чандрасекгара від параметра x_0 (при заданому μ_e), що подано на рис. 3. Як видно з рисунка, радіус зорі є монотонно спадною функцією x_0 , маса — монотонно зростаючою функцією, а енергія — від'ємною монотонно спадною функцією в усій області зміни цього параметра. Як видно з формул (15), (20), мінімальне значення $E(x_0, \mu_e)$ досягається у границі $x_0 \rightarrow \infty$, де $E(x_0, \mu_e)$ прямує до величини $-m_0 c^2 N_e(x_0, \mu_e)$. Повна енергія зорі $\tilde{E}(x_0, \mu_e)$ є додатною немонотонною функцією параметра x_0 , а її максимум — в околі точки $x_0 \simeq 2.57 \dots$.

Рівняння механічної рівноваги є основою теорії вироджених карликів, а тому варто подати його розв'яз-

ки так, щоб виділити аналітичну залежність від параметра x_0 . Це дасть змогу виразити залежність макроскопічних характеристик зорі від цього параметра в аналітичному вигляді, що спрощує обернену задачу — знаходження мікроскопічних параметрів (x_0, μ_e) для реальних карликів за спостережуваними даними.

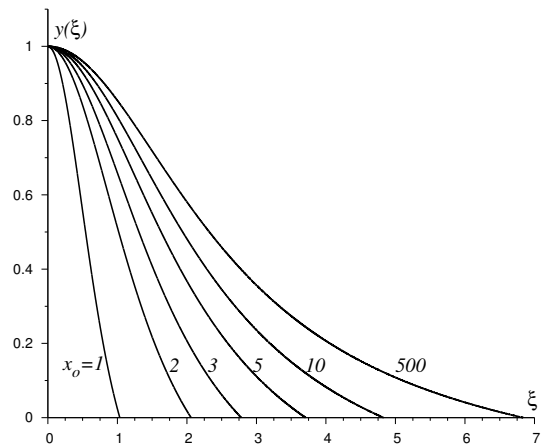


Рис. 1. Розв'язки рівняння (14) при фіксованих значеннях параметра релятивізму x_0 при $t(\xi/\xi_1) = 1$.

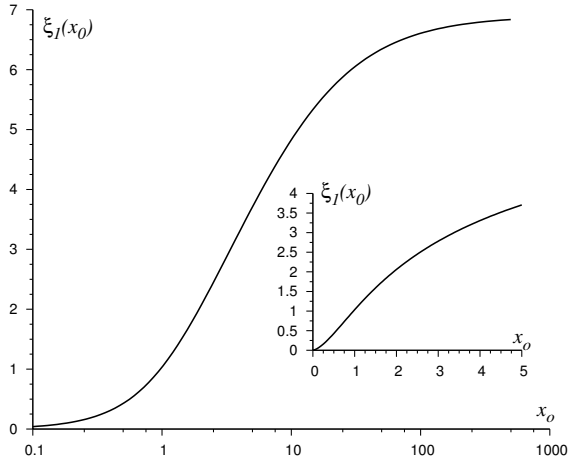


Рис. 2. Залежність безрозмірного радіуса зорі $\xi_1(x_0)$ від параметра x_0 .

Зокрема в ультрарелятивістській області, коли $2/\varepsilon_0(x_0)$ відіграє роль малого параметра, розв'язок можна записати як розклад

$$y(\xi) = \sum_{n \geq 0} y_n(\xi) \varepsilon_0^{-n}(x_0), \quad (22)$$

де $y_0(\xi)$ — розв'язок рівняння Лена–Емдена з індек-

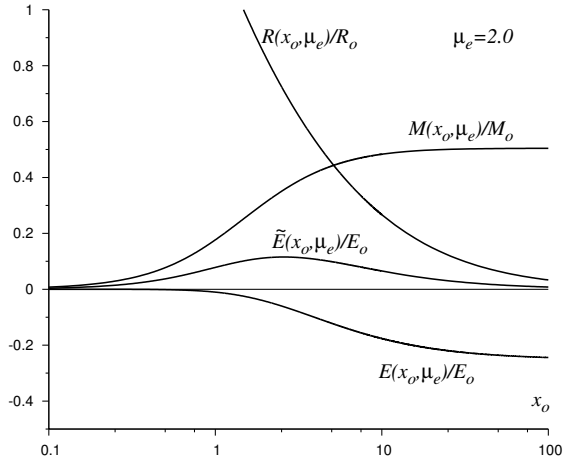


Рис. 3. Залежність макроскопічних характеристик карлика у стандартній моделі Чандрасекхара від параметра x_0 при $\mu_e = 2$.

сом політропи $n = 3$,

$$\hat{L}_\xi y_0(\xi) + y_0^3(\xi) = 0, \quad \hat{L}_\xi = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \cdot \frac{d}{d\xi}, \quad (23)$$

а $y_n(\xi)$ при $n \geq 1$ визначаються таким ланцюжком лінійних неоднорідних рівнянь:

$$\begin{aligned} \hat{L}_\xi y_1(\xi) + 3y_1(\xi)y_0^2(\xi) &= -3y_0^2(\xi), \\ \hat{L}_\xi y_2(\xi) + 3y_2(\xi)y_0^2(\xi) &= -\frac{3}{2}y_0(\xi) \{1 + 4y_1(\xi) + 2y_1^2(\xi)\}, \dots \\ \hat{L}_\xi y_3(\xi) + 3y_3(\xi)y_0^2(\xi) &= -\left\{ \frac{3}{2}y_1(\xi) + 3y_1^2(\xi) + y_1^3(\xi) + 6y_0(\xi)y_2(\xi) + 6y_0(\xi)y_1(\xi)y_2(\xi) - \frac{1}{2} \right\}; \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Система рівнянь (23)–(24) задовольняє такі граничні умови:

$$\begin{aligned} y_0(0) &= 1; \quad y_n(0) = 0 \quad \text{при } n \geq 1; \\ y'_n(0) &= 0 \quad \text{при } n \geq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Оскільки $y_n(\xi)$ не залежать від жодних параметрів, то сукупність цих універсальних функцій відіграє роль базису для представлення розв'язків рівняння (14) і розрахунку макроскопічних характеристик.

Знайдені чисельним інтегруванням функції $y_n(\xi)$ зображено на рис. 4. Рисунок 5 ілюструє збіжність розкладу (22). Функції $y_n(\xi)$ можна апроксимувати такими многочленами:

$$y_n(\xi) = \delta_{n,0} + \sum_{m=2}^{m_0} \alpha_{nm} \xi^m. \quad (26)$$

Коефіцієнти α_{nm} для $n = 0, 1, 2$ наведено в Додатку в таблиці 1.

Розклад (22) приводить до розкладів макроскопічних характеристик карликів за степенями множника $\varepsilon_0^{-1}(x_0)$. Корінь рівняння $y(\xi) = 0$ запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \xi_1 &\equiv \xi_1(x_0) = \xi_0^{(3)} - \frac{C_1}{\varepsilon_0(x_0)} + \frac{C_2}{\varepsilon_0^2(x_0)} + \dots, \\ C_1 &= \left\{ y_1(\xi) \left[\frac{dy_0}{d\xi} \right]^{-1} \right\}_{\xi_0^{(3)}} \simeq 29.6238; \\ C_2 &= \left[\frac{dy_0}{d\xi} \right]^{-1} \left\{ -y_2(\xi) + y_1(\xi) \frac{dy_1}{d\xi} \left[\frac{dy_0}{d\xi} \right]^{-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 y_0}{d\xi^2} y_1^2(\xi) \left[\frac{dy_0}{d\xi} \right]^{-2} \right\}_{\xi_0^{(3)}} \simeq 168.4604. \end{aligned} \quad (27)$$

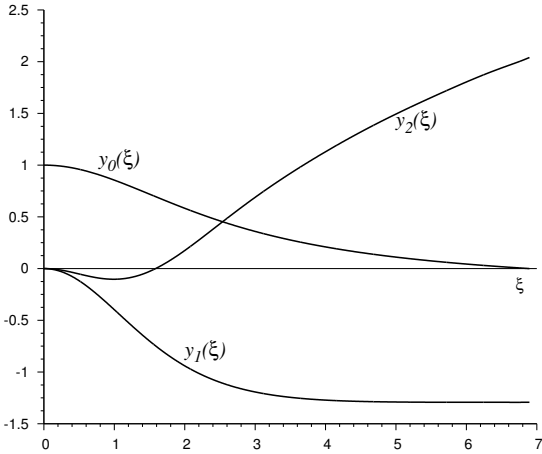


Рис. 4. Чисельні розв'язки системи рівнянь (24).

Тут $\xi_0^{(3)} = 6.89685$ — корінь рівняння $y_0(\xi) = 0$ [14]. У зв'язку з цим для радіуса зорі маємо такий розклад:

$$R(x_0, \mu_e) = \frac{R_0}{\mu_e} \left\{ \frac{\xi_0^{(3)}}{\varepsilon_0(x_0)} - \frac{C_1}{\varepsilon_0^2(x_0)} + \frac{C_2}{\varepsilon_0^3(x_0)} + \dots \right\}. \quad (28)$$

Аналогічний розклад одержуємо для безрозмірної маси зорі

$$\mathcal{M}(x_0) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\varepsilon_0^n(x_0)} b_n, \quad b_n = - \left\{ \xi^2 \frac{dy_n}{d\xi} \right\}_{\xi=\xi_1}. \quad (29)$$

Коефіцієнти b_n є функціями параметра x_0 і їх можна також записати як розклади за степенями $\varepsilon_0^{-1}(x_0)$,

що дає еквівалентне зображення:

$$\mathcal{M}(x_0) = b_0^* + b_2^* \varepsilon_0^{-2}(x_0) + b_3^* \varepsilon_0^{-3}(x_0) + b_4^* \varepsilon_0^{-4}(x_0) + b_5^* \varepsilon_0^{-4}(x_0) \ln \varepsilon_0(x_0) + \dots \quad (30)$$

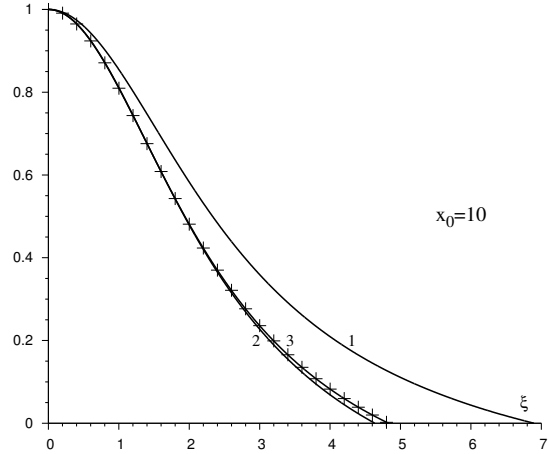


Рис. 5. Послідовність функцій $P_{n_0}(\xi) = \sum_{n=0}^{n_0} y_n(\xi) \varepsilon_0^{-n}(x_0)$ при $x_0 = 10$. Криві 1 відповідає $n_0 = 0$; 2 — $n_0 = 1$; 3 — $n_0 = 2$. Хрестиками позначено чисельний розв'язок рівняння (14), якщо $t(\xi/\xi_1) = 1$.

При цьому $b_0^* = 2.01824$, $b_2^* = -11.4669$, $b_3^* = 55.0261$, $b_4^* = -65.9691$, $b_5^* = -29.8172$.

В ультрарелятивістській області вираз (20) для енергії зорі спрощується і набирає вигляду:

$$\mathcal{E}(x_0) = \varepsilon_0^{-3}(x_0) \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 \left\{ -x^3(\xi) + \frac{3}{2} x^2(\xi) - \frac{3}{2} \ln x(\xi) - \frac{3}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) + \dots \right\}. \quad (31)$$

Використовуючи розклад (22), одержуємо зображення:

$$\mathcal{E}(x_0) = -a_0 + \frac{a_1}{\varepsilon_0(x_0)} + \frac{a_2}{\varepsilon_0^2(x_0)} - \frac{\xi_1^3}{2\varepsilon_0^3(x_0)} \ln \varepsilon_0(x_0) + \frac{a_3}{\varepsilon_0^3(x_0)} + \dots \quad (32)$$

Коефіцієнти a_n визначаємо такими безрозмірними інтегралами:

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 y_0^3(\xi) = b_0; \\ a_1 &= -3 \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 y_0^2(\xi) \{1/2 + y_1(\xi)\}; \\ a_2 &= 3 \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 y_0(\xi) \{1/2 - y_1(\xi) - y_1^2(\xi) - y_0(\xi)y_2(\xi)\}; \\ a_3 &= 3 \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 \left\{ \frac{5}{12} - \frac{1}{2} \ln y_0(\xi) + \frac{1}{2} y_1(\xi) - \frac{1}{2} y_1^2(\xi) - y_0(\xi)y_2(\xi) - \frac{1}{3} y_0^2(\xi)y_3(\xi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} y_0^2(\xi)y_3(\xi) - 2y_0(\xi)y_1(\xi)y_2(\xi) - \frac{1}{3} y_1^3(\xi) - \frac{1}{2} \ln 2 \right\}; \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Оскільки верхня межа інтегрування ξ_1 залежить від значення x_0 , то й коефіцієнти a_n є величинами, які слабо залежать від цього параметра.

Комбінуючи розклади (29) та (32), одержуємо зображення для повної енергії зорі:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}(x_0) &= \frac{a_1 + b_1}{\varepsilon_0(x_0)} + \frac{a_2 + b_2}{\varepsilon_0^2(x_0)} + \frac{a_3 + b_3}{\varepsilon_0^3(x_0)} - \frac{\xi_1^3}{2\varepsilon_0^3(x_0)} \ln \varepsilon_0(x_0) + \dots \\ &= \frac{d_1^*}{\varepsilon_0(x_0)} + \frac{d_2^*}{\varepsilon_0^2(x_0)} + \frac{d_3^*}{\varepsilon_0^3(x_0)} - \frac{[\xi_0^{(3)}]^3}{2\varepsilon_0^3(x_0)} \ln \varepsilon_0(x_0) + \dots,\end{aligned}\quad (34)$$

де $d_1^* = 6.10059$, $d_2^* = 7.91068$, $d_3^* = 176.582$. Вирази (32), (34) дуже добре описують результати прямого числового розрахунку цих характеристик при $x_0 \geq 8.0$.

Розгляньмо далі розрахунок характеристик карликів біля границі релятивістського виродження, використовуючи замість (11) підстановку

$$r = \eta k, \quad \mu(r) = m_0 c^2 \varepsilon_0(x_0) f(\eta). \quad (35)$$

Вибираючи масштаб k з умови

$$2^{1/2} \frac{64\pi^2 G}{3(hc)^3} (m_0 m_u c^2 \mu_e k)^2 \varepsilon_0^{1/2}(x_0) = 1, \quad (36)$$

зведемо рівняння (8) до такого вигляду:

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\eta^2}{t(\eta/\eta_1)} \frac{df}{d\eta} \right) = - \left\{ f(\eta) + \frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} f^2(\eta) \right\}^{3/2} \times t(\eta/\eta_1) \quad (37)$$

при граничній умові $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Із співвідношень (13) та (36) випливає, що

$$k = \lambda (\varepsilon_0(x_0)/2)^{3/4}, \quad \xi = \eta \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{3/4}, \quad (38)$$

а тому

$$\begin{aligned}f(\eta) &= y(\xi) = y \left(\eta \left[\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right]^{3/4} \right), \\ \eta_1 &= \xi_1 \left[\frac{2}{\varepsilon_0(x_0)} \right]^{3/4},\end{aligned}\quad (39)$$

де $\eta_1 \equiv \eta_1(x_0|a, s)$ — значення змінної η_1 , при якому розв'язок рівняння (37) перетворюється в нуль ($f(\eta_1) = 0$). У змінних η , $f(\eta)$ радіус і безрозмірна маса зорі визначаються співвідношеннями

$$R(x_0, \mu_e) = \frac{R_0}{2\mu_e} \left(\frac{2}{\varepsilon_0(x_0)} \right)^{1/4} \eta_1(x_0), \quad (40)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(x_0) &= \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{3/4} \int_0^{\eta_1} d\eta \\ &\times \eta^2 \left\{ f(\eta) + \frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} f^2(\eta) \right\}^{3/2} \\ &= \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{3/4} \left\{ \eta^2 \left| \frac{df}{d\eta} \right| \right\} \quad \text{при } \eta = \eta_1(x_0).\end{aligned}$$

Щоб записати вирази для енергії (в одиницях E_0/μ_e^3), слід використати формули (20), (21) та співвідношення (38), (39):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x_0) &= \frac{1}{8} \left(\frac{2}{\varepsilon_0(x_0)} \right)^{3/4} \int_0^{\eta_1} d\eta \eta^3 x^2(\eta) \\ &\times \{1 - [1 + x^2(\eta)]^{-1/2}\} \frac{dx}{d\eta}, \\ \tilde{\mathcal{E}}(x_0) &= \mathcal{E}(x_0) + \frac{1}{8} \left(\frac{2}{\varepsilon_0(x_0)} \right)^{3/4} \int_0^{\eta_1} d\eta \eta^2 x^3(\eta), \\ x(\eta) &= (2\varepsilon_0(x_0))^{1/2} \left\{ f(\eta) + \frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} f^2(\eta) \right\}^{1/2}.\end{aligned}\quad (41)$$

У рівнянні (37) величина $\frac{1}{2} \varepsilon_0(x_0)$ відіграє роль малого параметра, тому його розв'язок (при $t(\eta/\eta_1) = 1$) запишемо як ряд

$$f(\eta) = \sum_{m \geq 0} \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^m f_m(\eta). \quad (42)$$

Тут $f_0(\eta)$ є розв'язком рівняння Лена–Емдена для індексу політропи $n = 3/2$, а інші функції визначаємо лінійними неоднорідними рівняннями

$$\hat{L}_\eta f_0(\eta) + f_0^{3/2}(\eta) = 0, \quad \hat{L}_\eta = \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta} \cdot \frac{d}{d\eta}, \quad (43)$$

$$\hat{L}_\eta f_m(\eta) + \frac{3}{2} f_0^{1/2}(\eta) f_m(\eta) = \varphi_m(\eta) \quad \text{при } m \geq 1,$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_1(\eta) &= -\frac{3}{2} f_0^{5/2}(\eta); \\ \varphi_2(\eta) &= -\frac{3}{8} \left\{ f_0^{7/2}(\eta) + 10f_1(\eta) f_0^{3/2}(\eta) + f_1^2(\eta) f_0^{-1/2}(\eta) \right\}; \\ \varphi_3(\eta) &= \frac{1}{16} \left\{ f_0^{9/2}(\eta) - 21f_1(\eta) f_0^{5/2}(\eta) - 60f_2(\eta) f_0^{3/2}(\eta) \right. \\ &\quad \left. - 45f_1^2(\eta) f_0^{1/2}(\eta) - 12f_1(\eta) f_2(\eta) f_0^{-1/2}(\eta) + f_1^3(\eta) f_0^{-3/2}(\eta) \right\}; \dots \end{aligned} \quad (44)$$

Система рівнянь (43) задовольняє граничні умови

$$\begin{aligned} f_0(0) = 1, \quad f_m(0) = 0 \quad \text{при } m \geq 1; \\ f'_m(0) = 0 \quad \text{при } m \geq 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Розраховані чисельним методом розв'язки системи (43) наведено на рис. 6. За аналогією з (26) для них одержано такі апроксимаційні вирази:

$$f_m(\eta) = \delta_{m,0} + \sum_{n=2}^{m_0} c_{mn} \eta^n, \quad m \geq 0. \quad (46)$$

Коефіцієнти c_{mn} для $m = 0, 1, 2, 3$ наведено в Додатку в таблиці 2. Рисунок 7 ілюструє збіжність ряду (42): тут зображено чисельний розв'язок рівняння (37) при $t(\eta/\eta_1) = 1$ (позначений хрестиками) і послідовність функцій $\sum_{m=0}^{m_0} \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2}\right)^m f_m(\eta)$ при $m_0 = 0$ (крива 1), $m_0 = 1$ (крива 2), $m_0 = 2$ (крива 3) і $m_0 = 3$ (крива 4).

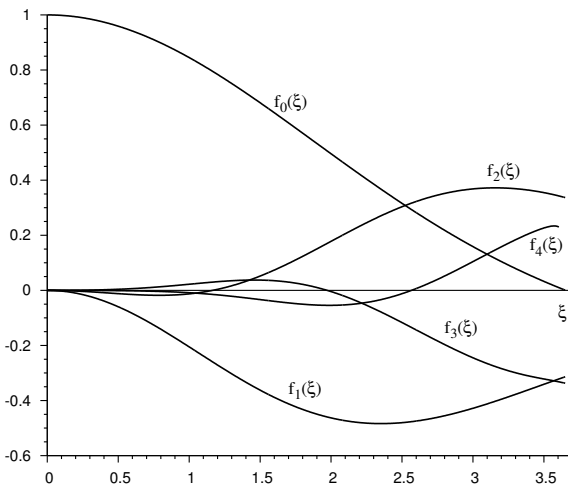


Рис. 6. Чисельні розв'язки системи рівнянь (43).

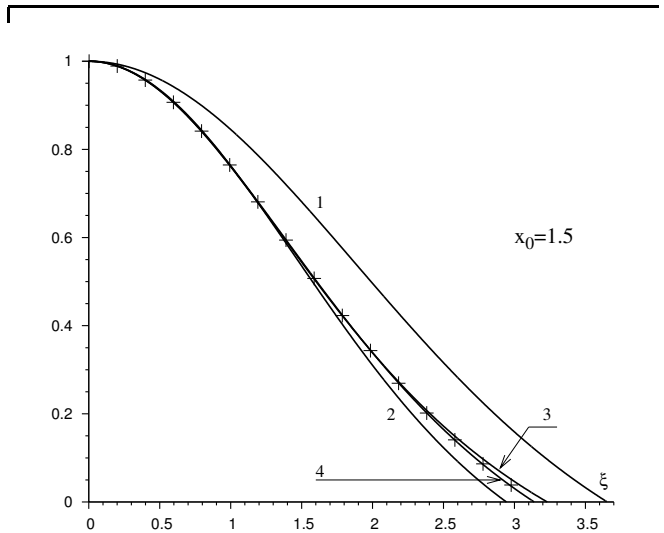


Рис. 7. Послідовність функцій $\tilde{P}_{m_0}(\eta) = \sum_{m=0}^{m_0} f_m(\eta) \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2}\right)^m$ при $x_0 = 1.5$. Кривій 1 відповідає $m_0 = 0$; 2 – $m_0 = 1$; 3 – $m_0 = 2$; 4 – $m_0 = 3$. Хрестиками позначено чисельний розв'язок рівняння (37) при $t(\eta/\eta_1) = 1$.

Підставляючи ряд (42) у формули (40), (41), знаходимо явну залежність макроскопічних характеристик від параметра x_0 . Корінь рівняння $f(\eta) = 0$ записуємо у вигляді такого розкладу:

$$\begin{aligned} \eta_1(x_0) &= \eta_0^{(3/2)} - \tilde{C}_1 \frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} + \tilde{C}_2 \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2}\right)^2 \\ &\quad - \tilde{C}_3 \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2}\right)^3 + \dots, \end{aligned} \quad (47)$$

де $\eta_0^{(3/2)} \simeq 3.65375\dots$ – корінь рівняння $f_0(\eta) = 0$ [14],

$$\tilde{C}_1 = 1.47702, \quad \tilde{C}_2 = 0.64614, \quad \tilde{C}_3 = 0.14749, \dots \quad (48)$$

Згідно з формулою (40)

$$R(x_0, \mu_\varepsilon) = \frac{R_0}{2\mu_\varepsilon} \left\{ \eta_0^{(3/2)} \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2}\right)^{-1/4} - \tilde{C}_1 \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2}\right)^{3/4} + \tilde{C}_2 \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2}\right)^{7/4} - \tilde{C}_3 \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2}\right)^{11/4} + \dots \right\}; \quad (49)$$

$$\mathcal{M}(x_0) = \sum_{n \geq 0} \tilde{b}_n \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2}\right)^{n+3/4},$$

де

$$\tilde{b}_n = - \left\{ \eta^2 \frac{df_n}{d\eta} \right\} \quad \text{при } \eta = \eta_1(x_0). \quad (50)$$

Розраховуючи енергію зорі ми використали розклад функції $\{1 + x^2(\eta)\}^{-1/2}$ за степенями $x(\eta)$ і ряд (42), що приводить до такого зображення:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x_0) &= - \sum_{n \geq 0} \tilde{a}_n \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{n+7/4}, \\ \tilde{a}_0 &= \frac{6}{5} \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta^2 f_0^{5/2}(\eta), \\ \tilde{a}_1 &= \frac{3}{7} \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta^2 f_0^{3/2}(\eta) \{f_0^2(\eta) + 7f_1(\eta)\}, \\ \tilde{a}_2 &= \frac{1}{12} \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta^2 f_0^{1/2}(\eta) \{36f_0(\eta)f_2(\eta) + 27f_1^2(\eta) - f_0^4(\eta) + f_0^2(\eta)f_1(\eta)\}; \dots \\ \tilde{a}_3 &= \frac{3}{8} \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta^2 f_0^{-1/2}(\eta) \left\{ \frac{1}{11} f_0^6(\eta) - f_0^4(\eta)f_1(\eta) + 4f_0^3(\eta)f_2(\eta) + 5f_0^2(\eta)f_1^2(\eta) + f_1^3(\eta) + 12f_0(\eta)f_1(\eta)f_2(\eta) + 8f_0^2(\eta)f_3(\eta) \right\}; \end{aligned} \quad (51)$$

і т. д. Комбінуючи розклади (49) і (51), одержуємо такий розклад для повної енергії зорі:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}(x_0) &= \tilde{b}_0 \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{3/4} + (\tilde{b}_1 - \tilde{a}_0) \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{7/4} \\ &+ (\tilde{b}_2 - \tilde{a}_1) \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{11/4} + (\tilde{b}_3 - \tilde{a}_2) \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{15/4} \\ &+ (\tilde{b}_4 - \tilde{a}_3) \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{19/4} + \dots \end{aligned} \quad (52)$$

Коефіцієнти \tilde{b}_n та \tilde{a}_n є функціями від $\varepsilon(x_0)$. Апроксимуючи вирази для цих коефіцієнтів, можна записати безрозмірні масу та повну енергію у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x_0) &= \sum_{n \geq 0} g_n^* \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{n+3/4}, \\ \tilde{\mathcal{E}}(x_0) &= \sum_{n \geq 0} p_n^* \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{n+3/4}, \end{aligned} \quad (53)$$

де $g_0^* = 2.70197$, $g_1^* = -2.22638$, $g_2^* = 1.60626$, $g_3^* = -0.765084$, $g_4^* = 0.165908$; $p_0^* = 2.70197$, $p_1^* = -3.88396$, $p_2^* = 3.73504$, $p_3^* = -2.21182$, $p_4^* = 0.577918$. Як показує порівняння розкладу (51) з результатами прямого числового розрахунку (див. рис. 8), такі розклади мають добру збіжність в області $0 < x_0 \leq 3.0$.

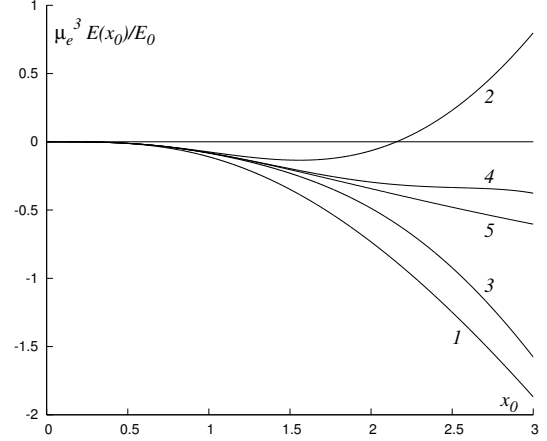


Рис. 8. Послідовність функцій $-\sum_{n \geq 0} \tilde{a}_n (\varepsilon_0(x_0)/2)^{n+7/4}$: кривий 1 відповідає $n_0 = 0$; 2 — $n_0 = 1$; 3 — $n_0 = 2$; 4 — $n_0 = 3$. Крива 5 — безрозмірна енергія зорі $\mathcal{E}(x_0)$, розрахована за формулою (20), як функція параметра x_0 .

IV. МІКРОСКОПІЧНІ ПАРАМЕТРИ Й МАКРОСКОПІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕАЛЬНИХ КАРЛИКІВ У МОДЕЛІ ЧАНДРАСЕКГАРА

Використовуючи відомі значення мас і радіусів карликів, обчислені на основі спостережуваних даних місії “Pirracos” у працях [2, 6–8], оцінимо за формулами (15) у межах моделі Чандрасекгара мікроскопічні параметри μ_e та x_0 . Виключаючи із перших двох співвідношень (15) параметр μ_e , одержуємо рівняння для знаходження x_0 :

$$\mathcal{M}(x_0) \frac{\varepsilon_0^2(x_0)}{\xi_1^2(x_0)} = \frac{M}{M_0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2. \quad (54)$$

При відомому корені цього рівняння параметр μ_e визначаємо виразом

$$\mu_e = \frac{R_0 \xi_1(x_0)}{R \varepsilon_0(x_0)}. \quad (55)$$

Розраховані параметри x_0 , μ_e для групи польових карликів та карликів у подвійних системах подано в таблиці 1. Деяка неоднозначність результатів зумовлена неоднозначністю даних про маси й радіуси, обчислених за різними методиками. Як видно з таблиці, μ_e мало відхиляється від значення $\mu_e = 2.0$. Параметр x_0 для більшості карликів задовольняє нерівність $0.8 \leq x_0 \leq 1.6$ і тільки для зорі Sirius B $x_0 \approx 2.5$. Це означає, що речовина в центрі карликів перебуває в околі точки релятивістського виродження, а тому всі їхні характеристики приймають значення, далекі від тих, що були б у границі Чандрасекгара ($x_0 \gg 1$). Напевно для більшості карликів застосовне наближення малих і проміжних значень x_0 (формули (35)–(53)). Знайдена область зміни параметра x_0 узгоджується із залежністю повної енергії зорі (що включає енергію спокою) $\tilde{\mathcal{E}}(x_0)$ від цього параметра (див. рис.

9): конфігурації, що відповідають області максимуму $\tilde{\mathcal{E}}(x_0)$, енергетично невігідні, тому вони малоімовірні. Основна область існування карликів розташована зліва від точки $x_0^* \equiv 2.57 \dots$. Звичайно, конфігурації, яким відповідає $x_0 > x_0^*$, також імовірні, але обмаль спостережуваних даних про такі карлики з дуже малими радіусами не дає змогу зробити достовірні висновки. На рис. 10 наведено розраховану залежність повної енергії карлика $\tilde{\mathcal{E}}$ від його радіуса, а також спостережуваний розподіл великої групи карликів за радіусами (дані про радіуси взято з праці [15]). Порівняння цих характеристик свідчить про те, що основна область існування карликів енергетично зумовлена.

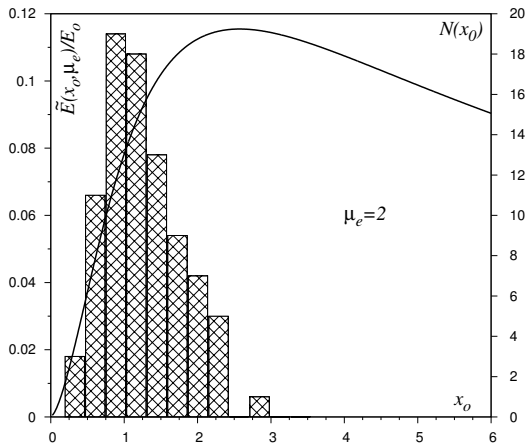


Рис. 9. Розподіл карликів за параметром x_0 та залежність повної енергії зорі (що включає енергію спокою електронів) від параметра x_0 при $\mu_e = 2$. Дані про радіуси карликів узяті з праці [15].

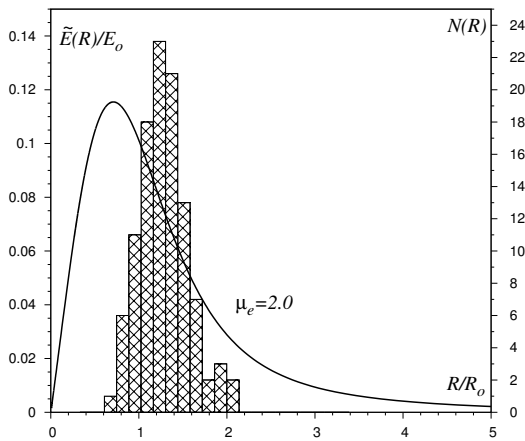


Рис. 10. Розподіл карликів за радіусами (згідно з роботою [15]) та залежність повної енергії зорі від радіуса при $\mu_e = 2$.

Для карликів невеликих мас співвідношення між їхніми характеристиками можна записати в аналітичній формі, скориставшись формулами (49)–(53). Вироз для $R(x_0, \mu_e)$ розглядатимемо як рівняння для $\varepsilon_0(x_0)$. Корінь цього рівняння можна представити апроксимантою Паде:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0(x_0) \cong \{1 - \alpha(k - k_0) + \beta(k - k_0)^2\} \times \{1 + \gamma(k - k_0)^4 + \beta(k - k_0)^6\}^{-1}, \quad (56)$$

де

$$k \equiv k(R) = 2\mu_e R \{R_0 \eta_0^{(3/2)}\}^{-1}, \quad (57)$$

$$k_0 \equiv 1 - [\eta_0^{(3/2)}]^{-1} (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3) \approx 0.73223 \dots,$$

$$\alpha = 2.84969, \quad \beta = 4.37911, \quad \gamma = 20.9286.$$

Як видно з формули (56), $\frac{1}{2} \varepsilon_0(x_0)$ прямує до одиниці при $k \rightarrow k_0 + \delta (\delta \rightarrow +0)$, а малим значенням $\frac{1}{2} \varepsilon_0(x_0)$ відповідають великі значення $k (k \geq k_0)$, коли $\frac{1}{2} \varepsilon_0(x_0)$ має асимптотику k^{-4} . Реальним карликам відповідає $\varepsilon_0(x_0) < 1$. Підставляючи розв'язок (56) у формули (53) для маси зорі $M(x_0)$ чи енергії $\tilde{\mathcal{E}}(x_0)$, одержуємо аналітичну форму залежностей “маса–радіус”, “енергія–радіус”.

Залежність повної енергії зорі $\tilde{\mathcal{E}}(x_0)$ від параметра релятивізму у центрі зорі дає обмеження на найбільш імовірне мінімальне значення радіуса (максимальну масу) вироджених карликів: $R_{\min} \equiv R(x_0^*, \mu_e) \approx 0.8 \dots 10^{-2} \frac{2}{\mu_e} R_\odot$, $M_{\max} \equiv M(x_0^*, \mu_e) \approx 1.06 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_\odot$. Максимальне значення радіуса карлика можна оцінити з умови переходу релятивістського виродження у центрі зорі в нерелятивістське. Ця умова означає, що в розкладі

$$\varepsilon_0(x_0) = \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{8} x_0^4 + \dots \quad (58)$$

другий член є малим порівняно з першим. При виборі

$$x_0^{\min} = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) \approx 0.618034 \dots \quad (59)$$

(золотий переріз відрізка [0,1]) знаходимо, що

$$\frac{1}{8} [x_0^{\min}]^4 \left\{ \frac{1}{2} [x_0^{\min}]^2 \right\}^{-1} = \frac{1}{4} (1 - x_0^{\min}) \cong 0.09549 \dots \quad (60)$$

Значенню x_0^{\min} відповідають такі значення радіуса й маси:

$$R_{\max} \approx 1.62 \dots \frac{2}{\mu_e} R_0 \approx 1.81 \dots 10^{-2} \frac{2}{\mu_e} R_\odot, \quad (61)$$

$$M_{\min} \approx 0.102 \dots \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_0 \approx 0.31 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_\odot.$$

Ці значення добре узгоджуються з даними, знайденими зі спостережень “Hipparcos” ([2, 6–8]):

$$R_{\max} \leq 1.6 \dots 10^{-2} R_\odot, \quad M_{\min} \geq 0.4 \dots M_\odot.$$

Ми розглянули оцінки характеристик для реальних спостережувальних карликів. Визначення області існування карликів дуже малих радіусів із масами, більшими за масу Сонця, пов'язане з питанням стійкості й вимагає врахування ефектів нейтронізації та загальної теорії відносності (ЗТВ) [13].

№	Зоря	R/R_0	M/M_0	x_0	μ_e
1	Procyon B	0.8593	0.20924	1.5695	2.2458
2	Procyon B	0.8593	0.20578	1.5561	2.2574
3	Sirius B	0.75189	0.34642	2.3806	1.9879
4	Sirius B	0.66238	0.35682	2.7977	2.0337
5	40 Eri B	1.2173	0.17356	1.0157	2.0345
6	40 Eri B	1.1099	0.14896	1.0311	2.2128
7	40 Eri B	1.1368	0.1836	1.1133	2.0699
8	CD-38 10980	1.1144	0.25635	1.3362	1.9027
9	CD-38 10980	1.1144	0.22864	1.2626	1.9658
10	CD-38 10980	1.1144	0.24596	1.309	1.9254
11	W485A	1.3427	0.20439	1.0004	1.8603
12	L268-92	1.3337	0.2425	1.0915	1.7839
13	L481-60	1.0741	0.1836	1.1758	2.124
14	G154-B5B	1.1636	0.15935	1.018	2.1257
15	G154-B5B	1.1636	0.14896	0.98635	2.1633
16	G154-B5B	1.1636	0.10739	0.84837	2.3498
17	G181-B5B	0.98461	0.17321	1.2442	2.2438
18	G181-B5B	0.98461	0.16282	1.207	2.2828
19	G181-B5B	0.98461	0.096999	0.94378	2.6198
20	G156-64	0.98461	0.20439	1.3504	2.1404
21	G156-64	0.98461	0.29792	1.6371	1.9115
22	G156-64	0.98461	0.41224	1.9456	1.7219
23	GD279	1.1547	0.1836	1.0967	2.0549
24	GD279	1.1547	0.15243	1.0043	2.1585
25	Feige 22	1.2236	0.16628	0.99076	2.0523
26	Feige 22	1.2236	0.14203	0.92081	2.1368
27	EG 21	1.0294	0.21825	1.3348	2.0612
28	EG 21	1.0294	0.20093	1.2812	2.1105
29	EG 50	0.93091	0.22864	1.5129	2.1186
30	EG 50	0.93091	0.17321	1.315	2.2989
31	GD140	0.76084	0.31178	2.2148	2.0561
32	GD140	0.76084	0.27368	2.0612	2.1504
33	G238-44	1.0741	0.19053	1.1972	2.1024
34	G238-44	1.0741	0.1455	1.0518	2.2614
35	G226-29	0.93091	0.2425	1.5594	2.0811
36	G226-29	0.93091	0.25982	1.6161	2.0374
37	WD2007-303	1.1457	0.17668	1.0848	2.0837
38	WD2007-303	1.1457	0.15243	1.0116	2.1665
39	Wolf-1346	1.2012	0.17668	1.0372	2.0379
40	Wolf-1346	1.2012	0.15243	0.96784	2.1177
41	G93-48	1.2621	0.21132	1.0774	1.8989
42	G93-48	1.2621	0.25982	1.19	1.7954
43	L711-10	1.1815	0.194	1.1016	2.0034
44	L711-10	1.1815	0.18707	1.0826	2.023
45	Stein 2051B	0.99357	0.16628	1.2088	2.2604

Таблиця 1. Параметри моделі Чандрасекхара x_0 та μ_e для реальних карликів.

V. ВПЛИВ ЕФЕКТІВ ЗТВ НА СТІЙКІСТЬ ВИРОДЖЕНИХ КАРЛИКІВ

Як відомо, стійкість вироджених карликів визначається впливом ефектів ЗТВ і процесів нейтронізації. Вироджені електронні конфігурації є стійкими в обмеженій області густин у центрі зорі ($\rho_0 < \rho_c$), чому відповідає обмеження на масу зорі ($M < M_c$).

Вплив на граничну масу карлика нерелятивістськи вироджених електронів поверхневих шарів зорі вперше оцінено в роботі [21]. На основі рівняння механічної рівноваги Оппенгеймера-Волкова в праці [11] у межах теорії збурень ураховано вплив ефектів загальної теорії відносності на зменшення граничної маси виродженого карлика. На цій основі знайдено критичну густину у центрі карлика $\rho_c = 2.5 \cdot 10^{10}$ г/см³. Урахування ефектів ЗТВ у межах варіаційного методу дає значення $\rho_c = 2.646 \cdot 10^{10}$ г/см³ [13]. Як і в роботі [11], так і в [13] ефекти ЗТВ враховуються за теорією збурень, а незбурена задача відповідає ультрарелятивістській границі ($x_0 \rightarrow \infty$). Виконані розрахунки характеристик моделі Чандрасекгара як функцій параметра релятивізму дають змогу уточнити значення критичної густини в центрі гіпотетичних карликів малих радіусів і великих мас й отримати найзагальніші обмеження на значення параметрів моделі Чандрасекгара. Як і в [13], використаємо варіаційний принцип, а внесок ефектів ЗТВ будемо враховувати за теорією збурень.

Згідно з формулами (17), (18), суму кінетичної енергії електронної підсистеми (із урахуванням енергії спокою) і гравітаційної енергії ядерної підсистеми запишемо (в одиницях E_0/μ_e^3) так:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}(x_0) &= J_1(x_0) + J_2(x_0), \\ J_1(x_0) &= \varepsilon_0^{-3} \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 x^3(\xi) [1 + x^2(\xi)]^{1/2}, \quad (62) \\ J_2(x_0) &= -\frac{1}{2} \varepsilon_0^{-3}(x_0) \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 F(x(\xi)) \\ &= \frac{1}{6} \varepsilon_0^{-3}(x_0) \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^3 \frac{dF}{d\xi} \\ &= \frac{4}{3} \varepsilon_0^{-2}(x_0) \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^3 x^3(\xi) \frac{dy(\xi)}{d\xi}. \end{aligned}$$

Урахуємо, що безрозмірна маса внутрішньої частини зорі, яка займає сферу радіуса ξ , дорівнює

$$\mathcal{M}(\xi) = \varepsilon_0^{-3}(x_0) \int_0^{\xi} d\xi' (\xi')^2 x^3(\xi') = -\xi^2 \frac{dy(\xi)}{d\xi}, \quad (63)$$

а $d\mathcal{M}(\xi)/d\xi = \varepsilon_0^{-3} \xi^2 x^3(\xi)$, що дає змогу переписати інтеграли J_1, J_2 у такому вигляді:

$$J_1(x_0) = \int_0^{\xi_1} d\mathcal{M} \{1 + x^2(\xi)\}^{1/2} = \mathcal{M}(x_0) \{1 + x^2(\xi_*^{(1)}(x_0))\}^{1/2}; \quad (64)$$

$$J_2(x_0) = -\frac{4}{3} \varepsilon_0(x_0) \int_0^{\xi_1} d\mathcal{M} \mathcal{M} \frac{1}{\xi} = -\frac{2}{3} \varepsilon_0(x_0) \mathcal{M}^2(x_0) \frac{1}{\xi_*^{(2)}(x_0)}.$$

Ми скористалися тут теоремою про середнє значення, замінюючи ξ на деяке $\xi_*^{(1)}(x_0)$ у першому інтегралі і на $\xi_*^{(2)}(x_0)$ — у другому. Величини $\xi_*^{(i)}(x_0)$ вибирали поблизу екстремуму підінтегральних функцій у формулах (62), причому накладали умову, щоб чисельно розраховані інтеграли у формі (62) збігалися з виразами (64), якщо $\mathcal{M}(x_0)$ визначається інтегралом (63) при $\xi = \xi_1(x_0)$. Функції $\xi_*^{(i)}(x_0)$ апроксимовані розкладами за степенями x_0 :

$$\xi_*^{(1)}(x_0) = 2.3018 - \frac{2.4613}{x_0} - \frac{6.3656}{x_0^2} + \frac{23.385}{x_0^3}, \quad (65)$$

$$\xi_*^{(2)}(x_0) = 1.9928 - \frac{2.0953}{x_0} - \frac{5.0023}{x_0^2} + \frac{17.122}{x_0^3}.$$

Згідно з формулами (64)

$$\tilde{\mathcal{E}}(x_0) = \mathcal{M} \varepsilon_0(x_0) f_1(x_0) - \mathcal{M}^2 \varepsilon_0(x_0) f_2(x_0), \quad (66)$$

де $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(x_0)$. Залежність $f_i(x_0)$ від параметра релятивізму показано на рис. 11.

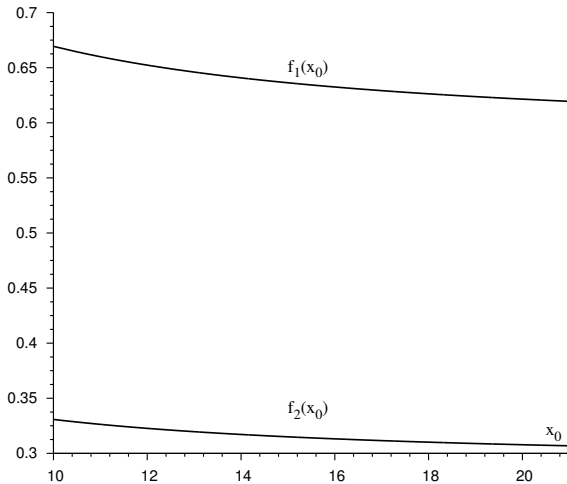


Рис. 11. Залежність функцій $f_1(x_0), f_2(x_0)$ від параметра релятивізму (див. ф. (66)).

Як поправку до енергії за рахунок ефектів ЗТВ використовуємо результати роботи [13], згідно з якими в абсолютних одиницях

$$\Delta E_{\text{ЗТВ}} = \sum_{i=1}^5 I_i, \quad (67)$$

$$I_1 = -\frac{G}{c^2} \int_0^M u \frac{m}{r} dm, \quad I_2 = -\frac{1}{2} \frac{G^2}{c^2} \int_0^M \left(\frac{m}{r}\right)^2 dm,$$

$$I_3 = -\frac{G}{c^2} \int_0^M \frac{dm}{r} \int_0^m u dm, \quad I_4 = \frac{G^2}{c^2} \int_0^M \frac{dm}{r} \int_0^m \frac{m}{r} dm,$$

$$I_5 = -\frac{G^2}{c^2} \int_0^M \frac{mdm}{r^4} \int_0^r mr dr.$$

Тут u — кінетична енергія електронної підсистеми на одиницю маси речовини зорі, m — маса внутрішньої частини зорі радіуса r . Політропне наближення дало змогу авторам [13] звести суму цих інтегралів до двох перших. Щоб підвищити точність розрахунку, ми не використовуємо політропного наближення, а розраховуємо інтеграли $I_1 - I_5$, так само, як і J_1, J_2 . У безрозмірному вигляді (в одиницях E_0/μ_e^3) поправку ЗТВ можна записати так:

$$\Delta \tilde{\mathcal{E}}(x_0) = -\frac{m_0}{m_u \mu_e} \varepsilon_0^2(x_0) \{ \mathcal{M}^2 [\varphi_1(x_0) + \varphi_3(x_0)] + \mathcal{M}^3 [\varphi_2(x_0) - \varphi_4(x_0) + \varphi_5(x_0)] \}. \quad (68)$$

Залежність функцій $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_5(x_0)$ від параметра релятивізму ілюструє рисунок 12. Згідно з варіаційним принципом, критичне значення параметра x_0 , при якому порушується стійкість зорі, визначаємо системою рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_0} [\tilde{\mathcal{E}}(x_0) + \Delta \tilde{\mathcal{E}}(x_0)] &= 0, \\ \frac{d^2}{dx_0^2} [\tilde{\mathcal{E}}(x_0) + \Delta \tilde{\mathcal{E}}(x_0)] &= 0 \end{aligned} \quad (69)$$

при умові $\frac{d}{dx_0} \mathcal{M} = 0$. Автори праці [13] знехтували членами типу x_0^{-n} при $n \geq 2$ у повній енергії зорі й використали політропне наближення для поправок ЗТВ. Як відзначено вище, вони одержали критичне значення густини в центрі зорі $\rho_c \approx 2.646 \cdot \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^2 \cdot 10^{10}$ г/см³, чому відповідає критичне значення параметра релятивізму $x_0^c \approx 23.83$. Чисельний розв'язок системи (69) дає точніше значення, а саме $x_0^c \approx 13.28 \dots$. При $\mu_e = 2.0$ це відповідає критичній густині в центрі зорі $\rho_c \approx 3.3 \cdot 10^9$ г/см³, що на порядок нижче за поріг нейтронізації для ¹²C ($3.9 \approx 10^{10}$ г/см³) і в п'ятдесят разів нижче за поріг нейтронізації для

${}^4\text{He}$ ($1.37 \cdot 10^{11}$ г/см³). Одержане значення нижче також за поріг нейтронізації кисню та неону і дуже близьке до порога нейтронізації магнію ($3.16 \cdot 10^9$ г/см³). Однак ρ_c більше за пороги нейтронізації ${}^{28}\text{Si}$ ($1.97 \cdot 10^9$), ${}^{32}\text{S}$ ($1.47 \cdot 10^8$), ${}^{56}\text{Fe}$ ($1.14 \cdot 10^9$). Отже, область існування гелієвих, вуглецевих, кисневих і неонових карликів визначається ефектами ЗТВ. Очевидно, що для магнієвого карлика однаково важливі як ефекти ЗТВ, так і нейтронізація, а для залізного карлика ефекти ЗТВ не визначальні.

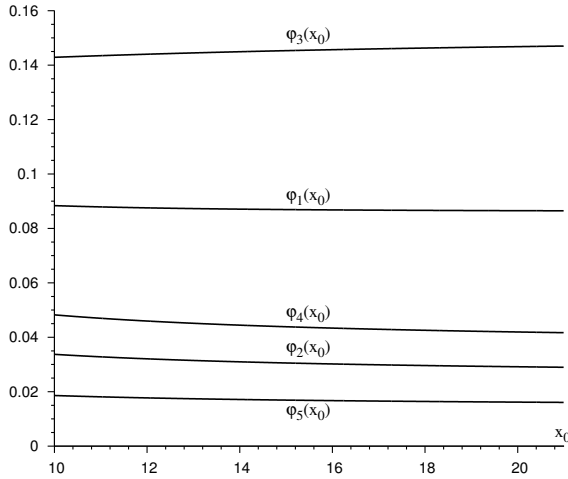


Рис. 12. Залежність функцій $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_5(x_0)$ від параметра релятивізму (ф. (68)).

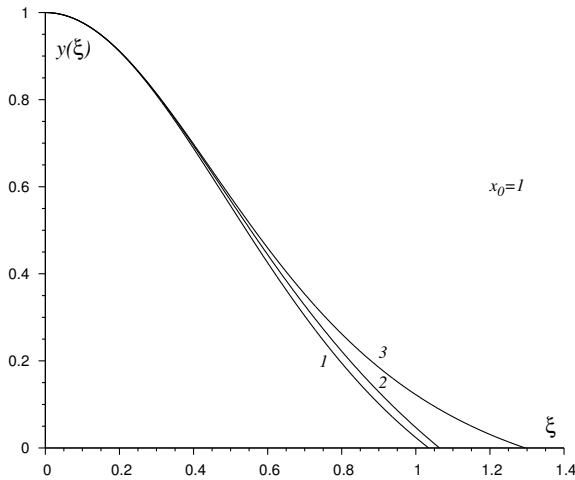


Рис. 13. Чисельні розв'язки рівняння (14) при $x_0 = 1; \alpha = 0.5; s = 2$: кривій 1 відповідає $t(\xi/\xi_1) = 1; 2 - t_1(\xi/\xi_1); 3 - t_2(\xi/\xi_1)$ (ф. (70)).

VI. МОДЕЛІ З НЕОДНОРІДНИМ ХІМІЧНИМ СКЛАДОМ

Як видно з таблиці 1, багатьом реальним карликам відповідає $\mu_e < 2.0$ у стандартній моделі Чанд-

расегара. Це означає, що хімічний склад таких вироджених карликів є неоднорідним уздовж радіуса, а модель з $\mu_e = \mu_e(r)$ адекватніше описує реальні вироджені карлики, ніж стандартна модель із $\mu_e = \text{const}$. Ми виконали розрахунки для воднево-гелієвих моделей карликів, використовуючи два варіанти моделювання залежності хімічного складу від координати при $\mu_e(0) = 2$, а саме:

$$t_1(r/R|\alpha, s) = \{1 + \alpha \cdot (r/R)^s\}^{-1}, \quad (70)$$

$$t_2(r/R|\alpha, s) = 1 - \alpha \cdot \arctg(r/R)^s.$$

Рисунок 13 ілюструє характер розв'язків рівняння рівноваги (37), знайдених за допомогою чисельного інтегрування при заданих α, s та x_0 . Використовуючи співвідношення (40), ми визначили параметри x_0 та α (при $s = 2$) для групи карликів, яким у стандартній моделі відповідає $\mu_e < 2$, за відомими їхніми радіусами й масами (таблиця 2). Щоб знайти розподіл гелію й водню вздовж радіуса, скористаємося співвідношенням між $\mu_e(r)$ і локальними масовими частками гелію та водню $Y(r) = \rho_{\text{He}}(r)/\rho(r)$, $X(r) = \rho_{\text{H}}(r)/\rho(r)$ (де $\rho(r)$ — загальна густина, а $\rho_{\text{He}}(r), \rho_{\text{H}}(r)$ — парціальні густини):

$$\mu_e^{-1}(r) = X(r) + \frac{1}{2} Y(r), \quad X(r) + Y(r) = 1. \quad (71)$$

Характер розв'язків цієї системи рівнянь

$$Y(r) = 2 - t^{-1}(r/R), \quad X(r) = t^{-1}(r/R) - 1 \quad (72)$$

для карлика W485A ілюструє рисунок 14.

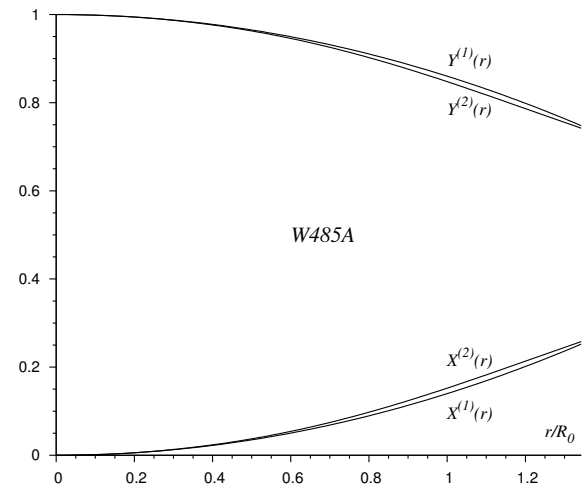


Рис. 14. Радіальний розподіл гелію $Y(r)$ та водню $X(r)$ у карлику W485A для двох варіантів моделювання залежності хімічного складу згідно з ф. (70).

У такій моделі парціальні маси гелію та водню в карлику визначаються співвідношеннями

$$M_{\text{He}} = \frac{M_0}{\mu_e^2} \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{3/4} \int_0^{\eta_1} d\eta \eta^2 \left\{ f(\eta) + \frac{\varepsilon_0}{2} f^2(\eta) \right\}^{3/2} \{2t(\eta/\eta_1) - 1\},$$

$$M_{\text{H}} = \frac{M_0}{\mu_e^2} \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{2} \right)^{3/4} \int_0^{\eta_1} d\eta \eta^2 \left\{ f(\eta) + \frac{\varepsilon_0}{2} f^2(\eta) \right\}^{3/2} \{1 - t(\eta/\eta_1)\}. \quad (73)$$

№	Зоря	R/R_0	M/M_0	$x_0^{(1)}$	$\alpha^{(1)}$	$x_0^{(2)}$	$\alpha^{(2)}$
3	Sirius B	0.75189	0.34642	2.4013	0.026115	2.4026	0.024653
8	CD-38 10980	1.1144	0.25635	1.4092	0.18389	1.4108	0.1847
9	CD-38 10980	1.1144	0.22864	1.2839	0.062407	1.285	0.059267
10	CD-38 10980	1.1144	0.24596	1.3612	0.13898	1.3629	0.13676
11	W485A	1.3427	0.20439	1.0711	0.25212	1.0713	0.26103
12	L268-92	1.3337	0.2425	1.2336	0.40989	1.2277	0.45521
21	G156-64	0.98461	0.29792	1.7288	0.17599	1.7309	0.17637
22	G156-64	0.98461	0.41224	2.5919	0.69843	2.4894	0.83118
41	G93-48	1.2621	0.21132	1.1316	0.18255	1.1327	0.18303
42	G93-48	1.2621	0.25982	1.3421	0.39424	1.3364	0.43447

Таблиця 2. Параметри моделі карликів із неоднорідним хімічним складом. Індекс (1) відповідає $t_1(r/R)$, індекс (2) — $t_2(r/R)$ (див. ф.(70)).

Значення цих величин для групи карликів у моделі $\mu_e(0) = 2, s = 2$ наведені в таблиці 3.

№	Зоря	$M_{\text{He}}^{(1)}$	$M_{\text{H}}^{(1)}$	$M_{\text{He}}^{(2)}$	$M_{\text{H}}^{(2)}$
3	Sirius B	0.34424	0.0022407	0.34435	0.0020245
8	CD-38 10980	0.24396	0.012105	0.24427	0.01237
9	CD-38 10980	0.2248	0.0038938	0.22501	0.0035757
10	CD-38 10980	0.23688	0.008979	0.23723	0.0088269
11	W485A	0.1905	0.013385	0.19046	0.014472
12	L268-92	0.21726	0.023995	0.21478	0.029066
21	G156-64	0.28459	0.013047	0.28494	0.013266
22	G156-64	0.35744	0.054796	0.34203	0.067587
41	G93-48	0.20087	0.010214	0.20114	0.010412
42	G93-48	0.23402	0.024551	0.2318	0.029396

Таблиця 3. Парціальні маси гелію та водню групи карликів для двох варіантів моделювання залежності хімічного складу.

VII. ВИСНОВКИ

Ми докладно дослідили розв'язки рівняння механічної рівноваги вироджених карликів у вигляді, максимально наближеному до форми рівняння Лена-Емдена. На основі даних про радіуси й маси групи карликів, які обчислили інші автори, за спостереженнями місії "Hipparcos", знайдено значення мікроскопічних параметрів моделі Чандрасекгара x_0, μ_e . З одержаних результатів випливає, що параметр релятивізму для більшості спостережуваних карликів є в області $0.8 \leq x_0 \leq 1.6$, а макроскопічні характеристики цих зір (маса, радіус, а особливо енергія) далекі

від тих, що відповідають границі Чандрасекгара.

Виявилось, що повна енергія зорі $\tilde{E}(x_0, \mu_e)$ (із урахуванням енергії спокою електронів) є додатною немонотонною функцією параметра x_0 , що має максимум в околі $x_0^* = 2.57 \dots$. Оскільки для спостережуваних карликів $x_0 < x_0^*$, то ця точка визначає верхню границю маси карлика й нижню границю радіуса, принаймні для карликів невеликих мас. Отже, x_0^* є справжньою фізичною границею в моделі Чандрасекгара, на протилежну формальній математичній границі $x_0 \rightarrow \infty$.

Значення параметра $x_0^{\min} \approx \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ приблизно відповідає переходу від нерелятивістського виро-

дження до релятивістського, з чого випливає, що для реальних карликів $x_0^{\min} \leq x_0 \leq x_0^*$. Цей висновок узгоджується зі спостережуваним розподілом карликів за радіусами. Відзначимо, що в літературі наведено розподіли карликів певних спектральних класів за масами як чисто феноменологічна статистична обробка спостережуваних даних без жодного обговорення фізичних причин формування відповідних розподілів (див. напр. [22, 23]).

Залежність повної енергії зорі $\tilde{E}(x_0, \mu_e)$, яку ми одержали, у принципі не виключає існування гіпотетичних карликів великих мас $(M(x_0, \mu_e) \approx 2 \cdot \frac{M_0}{\mu_e^2})$ і малих радіусів. Питання про стійкість таких зір щодо нейтронізації та ефектів ЗТВ у минулому дискутувалось у літературі (див. [13,14]). Ми показали, що коректний розклад повної енергії карлика за оберне-

ними степенями параметра x_0 при врахуванні ефектів ЗТВ за теорією збурень дає критичне значення $x_0^c \approx 13.28$. Це понижує критичну густину в центрі карлика приблизно у 8 разів порівняно з оцінками авторів роботи [13] і приводить до висновку, що для гелієвих, вуглецевих, кисневих і неонових карликів ефекти ЗТВ визначальні.

Оскільки деяким спостережуваним карликам у традиційній моделі Чандрасекгара відповідає $\mu_e < 2$, то для таких зір коректнішою є модель з неоднорідним хімічним складом, у якій цей параметр є функцією координати. Ми запропонували таку воднево-гелієву модель, розглянули два варіанти моделювання функції $\mu_e(r)$ і знайшли параметри моделі для групи карликів, маси й радіуси яких обчислені за спостереженнями "Hipparcos".

ДОДАТОК

m \ n	0	1	2
2	-0.16075	-0.46948	-0.24653
3	-0.023407	-0.13466	-0.09771
4	0.060888	0.35585	0.50236
5	-0.027412	-0.19811	-0.36974
6	0.0064964	0.058272	0.13283
7	-0.0009204	-0.010299	-0.02741
8	$7.7912 \cdot 10^{-05}$	0.0011013	0.0033207
9	$-3.6073 \cdot 10^{-06}$	$-6.5923 \cdot 10^{-05}$	-0.0002203
10	$6.9207 \cdot 10^{-08}$	$1.6998 \cdot 10^{-06}$	$6.192 \cdot 10^{-06}$

Таблиця 1. Коефіцієнти розкладу (26) α_{nm} .

n \ m	0	1	2	3
2	-0.16669	-0.25048	-0.065661	-0.0026605
3	0.00011952	0.0032012	0.021882	0.086951
4	0.012208	0.041612	0.0028451	-0.20439
5	0.00036233	0.011441	0.085664	0.32281
6	-0.00094042	-0.014431	-0.086233	-0.28698
7	$8.4162 \cdot 10^{-05}$	0.0039839	0.035672	0.13871
8	$2.681 \cdot 10^{-05}$	-0.00042853	-0.0077062	-0.037126
9	$-5.8482 \cdot 10^{-06}$	$6.8758 \cdot 10^{-06}$	0.00087356	0.0052322
10	$3.3177 \cdot 10^{-07}$	$1.2382 \cdot 10^{-06}$	$-4.1714 \cdot 10^{-05}$	-0.00030516

Таблиця 2. Коефіцієнти розкладу (46) c_{mn} .

-
- [1] *European Space Agency. The Hipparcos and Tycho Catalogues* (Noordwijk, Netherlands: ESA SP-1200, 1997).
- [2] J. L. Provencal, H. L. Shipman, E. Hog, P. Thejll, *Astrophys. J.* **494**, 759 (1998).
- [3] S. Chandrasekhar, *Astrophys. J.* **74**, 81 (1931).
- [4] S. Chandrasekhar, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **95**, 676 (1935).
- [5] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1939); пер. з англ.: С. Чандрасекар, *Введение в учение о строении звезд* (Москва, ИЛ, 1954).
- [6] H. L. Shipman, J. L. Provencal, E. Hog, P. Thejll, *Astrophys. J.* **488**, L43 (1997).
- [7] T. M. Girard *et al.*, *BAAS* **188**, 6002 (1996).
- [8] J. L. Provencal *et al.*, *Astrophys. J.* **480**, 777 (1997).
- [9] T. Hamada, E. Salpeter, *Eur. Astrophys. J.* **133**, 683 (1961).
- [10] E. Schatzman, *White Dwarfs* (Interscience, New York, 1958).
- [11] С. А. Каплан, *Наук. зап. Львів. держ. ун-ту ім. Івана Франка* **15**, сер. фіз. мат., вип. 4, 109 (1949).
- [12] M. Schwarzschild, *Structure and Evolution of the Stars* (Princeton Univ. Press., Princeton, New Jersey, 1958).
- [13] Я. Б. Зельдович, Н. Д. Новиков, *Теория тяготения и эволюция звезд* (Москва, Наука, 1971).
- [14] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars* (Cornell University, Ithaca, New York, 1983); пер. з англ.: С. Шапиро, С. Тьюколски, *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды* (Москва, Мир, 1985).
- [15] H. L. Shipman, *Astrophys. J.* **228**, 240 (1979).
- [16] L. G. Althaus, A. H. Corsico, J. Isern, E. Garcia-Berro, preprint: arXiv:1007.2659v1 [astro-ph.SR] (2010).
- [17] M. A. Barstow, K. Werner, *Astrophys. Space Sci.* **303**, 16 (2006).
- [18] S. N. Fabrika, G. G. Valyavin, T. E. Burlakova, *Astron. Lett.* **27**, 737 (2003).
- [19] In-Saeng Suh, G. J. Mathews, *Astrophys. J.* **530**, 949 (2000).
- [20] U. Heber, R. Napiwotzki, I. N. Reid, *Astron. Astrophys.* **323**, 819 (1997).
- [21] E. Schatzman, *Ann. d'Astroph.* **9**, 199 (1946).
- [22] M.-M. Limoges, P. Bergeron, preprint: arXiv:1003.4313v1 [astro-ph.SR] (2010).
- [23] R. Napiwotzki, P. J. Green, R. A. Saffer, *Astrophys. J.* **517**, 399 (1999).

THE MICROSCOPIC PARAMETERS AND THE MACROSCOPIC CHARACTERISTICS OF REAL DEGENERATE DWARFS

M. V. Vavruk, S. V. Smerechynskyi, N. L. Tyshko
Ivan Franko National University of Lviv, Department for Astrophysics,
8, Kyryla i Mefodija St., Lviv, UA-79005, Ukraine,
vavruk@physics.wups.lviv.ua

On the grounds of the radii and masses of degenerated dwarfs that were determined using the data from “Hipparcos” mission and other observations assessments were made of microscopic parameters of the Chandrasekhar model (the relativistic parameter in the star centre x_0 and the parameter of chemical composition $\mu_e = A/Z$ where A is mass number and Z is nuclear charge). The analytical expressions of macroscopic characteristics (mass, radius, energy) as functions x_0 and μ_e were obtained. From the calculated dependence of energy on these parameters the limitations on the variability region of x_0 that is in a good agreement with observed radii distribution of dwarfs are found. We obtained a more accurate critical value of x_0 , by which stability is being disturbed through general relativity theory effects. Also proposed in the paper is the generalized model with nonuniform (that is dependent on coordinates) chemical composition, where $\mu_e = \mu_e(r)$.