ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 15, № 3 (2011) 3004(9 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 15, No. 3 (2011) 3004(9 p.)

СИЛЬНІ АНТИҐРАВІТАЦІЙНІ ЕФЕКТИ ДЛЯ ЧАСТКИ ЗІ СПІНОМ У ПОЛІ КЕРРА

Р. М. Пляцко, М. Т. Феник
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, Україна
(Отримано 26 жовтня 2010 р.; в остаточному вигляді — 5 травня 2011 р.)

Досліджено світові лінії та траєкторії ультрарелятивістської частки зі спіном у просторовій області поблизу $r_{\rm ph}^{(-)}$ у полі Керра, які є суттєво негеодезійними й демонструють ефекти ґравітаційного відштовхування, зумовлені взаємодією спіну з кривиною простору-часу. Вони описуються такими розв'язками рівнянь Матісона–Папапетру, на яких домінують лінійні за спіном члени порівняно з нелінійними, і тому ці розв'язки, як і фізичні висновки, що з них випливають, не залежать від вибору доповняльної умови Матісона–Пірані чи Тульчиєва–Діксона.

Ключові слова: рівняння Матісона–Папапетру, поле Керра, траєкторії ультрарелятивістської частки зі спіном, ґравітаційне відштовхування.

PACS number(s): 04.20.−q, 95.30.Sf

I. ВСТУП

Хоч рівняння для опису поведінки класичної (неквантової) частки з внутрішнім кутовим моментом у ґравітаційному полі в межах загальної теорії відносності отримав М. Матісон ще 1937 р. [1], аналіз їхніх розв'язків, щоб з'ясувати вплив взаємодії спіну (обертання) частки з ґравітаційним полем на її траєкторію, розпочали значно пізніше. Причому вже без участі М. Матісона, чия лінія життя обірвалась рано (щодо цього див. "Obituary" за підписом П. Дірака в журналі "Nature" [2]). Лише 1951 р. А. Папапетру повторно виводить рівняння Матісона [3] і разом із Е. Коріналдесі оцінює на їхній основі, зокрема, вплив обертання планет на їхній рух навколо Сонця, доходячи висновку про його надзвичайну малість [4]. Згодом аналогічний висновок отримували інші автори, розглядаючи різні траєкторії частки зі спіном у ґравітаційних полях Шварцшільда та Керра. Водночас Л. Шиф 1960 р. показав, що за певних умов, близьких до реальності, може бути зареєстрований ефект прецесії осі обертання гіроскопа, який рухається у ґравітаційному полі [5]. Від цього часу в літературі поширилось уявлення про можливість реєстрації в не так далекому майбутньому лише прецесійних спінових ефектів, тоді як вплив спіну на траєкторію частки мізерний для його виявлення. Усе ж 1972 р. Р. Волд проаналізував допустимість ефекту статичного зависання частки зі спіном над джерелом поля Керра на осі його обертання за рахунок ґравітаційної спін-спінової взаємодії і показав, що рівняння Матісона–Папапетру (надалі скорочено МП) відповідних розв'язків не мають [6]. Якби такий ефект був можливим, це свідчило б про те, що за певних умов взаємодія спіну з ґравітаційним полем може суттєво протидіяти звичайній ґравітаційній дії поля на частку, тобто тому притяганню, яке виявляється, зокрема, у рухах безспінової частки вздовж геодезійних ліній.

У зв'язку із зазначеним вище в тих декількох абзацах класичної монографії [7], присвячених рівнянням МП (точніше, в обширному списку літератури в [7] вказана лише публікація [3], а не [1]), підсумовано, що вплив спіну частки на її рух поблизу масивного тіла може бути значним лише на пізній стадії його ґравітаційного колапсу. Однак згодом виявилося, що узвичаєні висновки про мізерність впливу спіну частки на її траєкторію у ґравітаційному полі, сформульовані в [4, 7] та інших публікаціях, не поставили останню крапку у цьому питанні. З'ясувалося, що вирішальним чинником, від якого залежить ступінь відхилення траєкторії частки зі спіном від геодезійної траєкторії, є величина швидкості частки щодо джерела поля. У [8, 9] показано, що коли частка зі спіном має достатню ультрарелятивістську швидкість (тобто дуже близьку до швидкості світла), взаємодія спіну з ґравітаційним полем настільки сильно впливає на її траєкторію, що компенсує звичайне ґравітаційне притягання. Точніше, показано, що за певних умов, основною з яких є висока швидкість частки, рівняння МП допускають колові орбіти, що зависають над джерелом поля Шварцшільда. Тобто можливе динамічне зависання частки, на відміну від неможливсті статичного зависання в полі Керра, доведеної в [6]. Узагальненню результатів [8, 9] для ґравітаційного поля Керра присвячені публікації [10, 11].

Характерно, що більшість із досліджених у [8–11] випадків суттєвого впливу спіну частки на її траєкторію в полях Шварцшільда та Керра випливає з аналізу розв'язків точних рівнянь МП, а не їх лінійного за

спіном наближення, причому з використанням доповняльної умови, яку часто називають умовою Пірані, а не альтернативної умови Тульчиєва–Діксона [11]. У лінійному за спіном наближенні ці умови збігаються, однак у загальному випадку їхня відмінність суттєва, що проявляється у відмінності відповідних розв'язків рівнянь МП за обох варіантів умов. Зокрема, уже у просторі Мінковського за умови Пірані рівняння МП поряд із звичайними розв'язками, що описують прямолінійні рухи частки зі спіном, мають ще додаткові, які описують, зокрема, певні колові рухи. Ці додаткові розв'язки витлумачив К. Меллер у термінах рухів власного й невласного центрів маси тіла, що обертається [12, 13]. При цьому колові розв'язки у просторі Мінковського відповідають рухам невласних центрів маси. У цьому зв'язку зазначимо, що оскільки розглянуті в [8–11] часткові розв'язки точних рівнянь МП описують якраз колові орбіти, то залишався привід для припущення, що вони мають те саме походження, що й орбіти невласних центрів маси у просторі Мінковського, тобто описуються зайвими розв'язками. І хоч є достатньо непрямих ознак, що вказують на відмінність колових орбіт, розглянутих у [8–11], від колових рухів у просторі Мінковського, доцільно повніше й докладніше вивчити умови проявів ефектів значного впливу взаємодії спіну з ґравітаційним полем на рух частки, не обмежуючись коловим орбітами. Зокрема з'ясувати, чи ці ефекти виникають лише за врахування нелінійних за спіном членів, чи, власне кажучи, вони за певних умов випливають уже в лінійному наближенні. Тому в [14] основну увагу приділено саме аналізові тих суттєво негеодезійних розв'язків рівнянь МП у лінійному за спіном наближенні й на тих часових інтервалах, для яких вплив нелінійних членів несуттєвий. Тобто йдеться про розв'язки рівнянь МП, практично спільні за умов Пірані й Тульчиєва–Діксона для метрики Шварцшільда. Узагальненню розв'язків із [14] для поля Керра присвячено статтю [15].

Мета цієї публікації — у лінійному за спіном наближенні рівнянь МП повніше й докладніше проаналізувати суттєво негеодезійні ультрарелятивістські рухи частки зі спіном у полі Керра з наведенням явного вигляду тих виразів і співвідношень, що не знайшли відображення в [15].

II. РІВНЯННЯ МП У ЛІНІЙНОМУ ЗА СПІНОМ НАБЛИЖЕННІ ДЛЯ ДОВІЛЬНИХ РУХІВ У ПОЛІ КЕРРА В ТЕРМІНАХ БЕЗРОЗМІРНИХ ВЕЛИЧИН

Традиційно рівняння МП записують через 4-тензор спіну частки $S^{\mu\nu}$ [1, 3, 4]. Однак, як показує практика обчислень, за умови $S^{\mu\nu}u_\nu = 0$ (саме її часто називають умовою Пірані, маючи на увазі публікацію [16], хоч її використовував ще М. Матісон [1]; тут u_ν — 4-швидкість частки) зручнішого й компактнішого запису можна досягти, використовуючи 3-вектор спіну S_i, означивши

$$S_i = \frac{1}{2u_4}\sqrt{-g}\,\varepsilon_{ikl}S^{kl}, \tag{1}$$

де g — визначник метричного тензора, ε_{ikl} — символ Леві-Чівіти. Тут і надалі латинські індекси пробігають значення 1, 2, 3, грецькі — від 1 до 4 й використовується система одиниць, у якій ґравітаційна стала та швидкість світла у вакуумі чисельно дорівнюють 1. Лінійні за спіном рівняння МП мають вигляд [14, 15]:

$$m(\dot{u}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta) + \frac{u^\pi}{2\sqrt{-g}}(u_4 R^\lambda_{\pi ik} + 2u_i R^\lambda_{\pi k4})\varepsilon^{ikl}S_l = 0, \tag{2}$$

$$u_4\dot{S}_i + 2(\dot{u}_{[4}u_{i]} - u^\pi u_\rho \Gamma^\rho_{\pi[4}u_{i]})S_k u^k + 2S_n\Gamma^n_{\pi[4}u_{i]}u^\pi = 0, \tag{3}$$

де m, $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ і $R^\lambda_{\pi\rho\sigma}$ — відповідно маса, символи Крістофеля й тензор Рімана кривини простору-часу; крапка над буквою позначає звичайне диференціювання за власним часом частки s, квадратні дужки біля індексів — їх антисиметризацію. (В [11, 17] та інших працях використано дещо інше означення 3-вектора спіну, у якому відсутній множник u_4, що фіґурує в знаменнику виразу (1)).

Зазначимо, що величина S_i має трансформаційні властивості 3-вектора для координатних перетворень часткового вигляду $x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3)$, $x'^4 = x^4$. Загалом доцільність уведення і застосувань у загальній теорії відносності 3-вимірних векторів і тензорів обґрунтована в теорії хронометричних інваріантів [18–20].

Рівняння (2), (3) мають фізичний зміст за врахування умови пробності частки зі спіном [6]

$$\frac{|S_0|}{ml} \equiv \varepsilon \ll 1, \tag{4}$$

де $|S_0|$ — абсолютна величина спіну, l — характерна величина розмірності віддалі (у випадку метрики Шварцшільда чи Керра нею може бути радіальна координата). При цьому S_0 є інтеґралом руху рівнянь МП, який також фіґурує у відомому співвідношенні [6]

$$S_0^2 = \frac{1}{2}S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}. \tag{5}$$

Надалі розглядатимемо рівняння (2), (3) для метрики Керра, записаної в координатах Бойєра–Ліндквіста $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = t$. Тоді відмінними від нуля є такі компоненти метричного тензора:

$$g_{11} = -\frac{\rho^2}{\Delta}, \qquad g_{22} = -\rho^2,$$
$$g_{33} = -\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta,$$
$$g_{34} = \frac{2Mra}{\rho^2}\sin^2\theta, \qquad g_{44} = 1 - \frac{2Mr}{\rho^2},$$

де

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad 0 \le \theta \le \pi. \tag{6}$$

Як відомо, знак керрівського параметра a визначає напрям обертання джерела ґравітаційного поля щодо своєї осі, й для конкретики вважатимемо його невід'ємним.

Отримання явного вигляду рівнянь МП у полі Керра для довільних рухів, без обмежень на швидкість частки та орієнтацію її спіну, вимагає виконання значного обсягу обчислень. Це пов'язано зі складністю виразів для компонент тензора кривини й символів Крістофеля порівняно з метрикою Шварцшільда, а також з тим, що для неекваторіальних рухів підсистему (3) не можна зінтеґрувати незалежно від (2). Обсяг статті не дає змоги подати поетапний опис відповідних перетворень, тому нижче запишемо рівняння в їх остаточному вигляді в термінах безрозмірних величин y_i, де за означенням

$$\begin{aligned} &y_1 = \frac{r}{M}, \qquad y_2 = \theta, \qquad y_3 = \varphi, \qquad y_4 = \frac{t}{M}, \\ &y_5 = u^1, \qquad y_6 = Mu^2, \qquad y_7 = Mu^3, \qquad y_8 = u^4, \\ &y_9 = \frac{S_1}{mM}, \quad y_{10} = \frac{S_2}{mM^2}, \quad y_{11} = \frac{S_3}{mM^2}, \end{aligned} \tag{7}$$

а також

$$x = \frac{s}{M}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{|S_0|}{mM} \tag{8}$$

(на відміну від ε в (4), залежного від r, тут ε_0 є величиною сталою). Тоді всі 11 диференціальних рівнянь першого порядку для величин y_i матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &\dot y_1 = y_5, \qquad \dot y_2 = y_6, \qquad \dot y_3 = y_7, \qquad \dot y_4 = y_8, \\ &\dot y_5 = A_1, \qquad \dot y_6 = A_2, \qquad \dot y_7 = A_3, \qquad \dot y_8 = A_4, \\ &\dot y_9 = A_5, \qquad \dot y_{10} = A_6, \qquad \dot y_{11} = A_7 \end{aligned} \tag{9}$$

(крапка над буквою позначає звичайне диференціювання за x), де вирази для A_i є такими:

$$\begin{aligned} A_1 = {} & [y_1^2 - \alpha^2(y_1\sin^2 y_2 + \cos^2 y_2)]y_5^2 z^{-1}q^{-1} + qy_1y_6^2z^{-1} + q(y_1z^2 - \alpha^2\psi\sin^2 y_2)y_7^2z^{-3}\sin^2 y_2 \\ & - q\psi y_8^2 z^{-3} + \alpha^2 y_5y_6z^{-1}\sin 2y_2 + 2\alpha q\psi y_7y_8z^{-3}\sin^2 y_2 + \alpha y_6^2y_9\eta q z^{-3}\cos y_2 - \alpha y_5y_6y_{10}\eta z^{-3} \\ & \times \cos y_2 - \alpha y_5y_7y_{11}\eta(\chi + 2\alpha^2\sin^2 y_2)z^{-4}\cos y_2 - 3\alpha^2 y_5y_8y_{11}\eta z^{-4}\cos y_2 - 3\alpha y_1y_6y_7y_{11} \\ & \times q\xi z^{-4}\sin y_2 + 3y_1y_6y_8y_{11}q\xi z^{-4}\sin^{-1} y_2 + \alpha y_7^2y_9\eta q(\chi^2 + 2\alpha^2 q\sin^2 y_2)z^{-5}\sin^2 y_2\cos y_2 \\ & - \alpha^2 y_7y_8y_9\eta q(3\chi - 4y_1)z^{-5}\sin y_2\sin 2y_2 + \alpha y_8^2y_9\eta q(2\chi - 4y_1 + \alpha^2\sin^2 y_2)z^{-5}\cos y_2 \\ & + 3\alpha y_1y_7^2y_{10}q\xi\chi z^{-5}\sin^3 y_2 - 3y_1y_7y_8y_{10}q\xi(\chi + \alpha^2\sin^2 y_2)z^{-5}\sin y_2 + 3\alpha y_1y_8^2y_{10}q\xi z^{-5}\sin y_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 = {} & 0.5\alpha^2 y_6^2z^{-1}\sin 2y_2 - 0.5\alpha^2 y_5^2z^{-1}q^{-1}\sin 2y_2 + 0.5y_7^2(z^2\chi + 2\alpha^2 y_1(\chi + z)\sin^2 y_2)z^{-3} \\ & \times \sin 2y_2 + \alpha^2 y_1y_8^2z^{-3}\sin 2y_2 - 2y_1y_5y_6z^{-1} - 2\alpha y_1y_7y_8\chi z^{-3}\sin 2y_2 - \alpha y_5y_6y_9\eta z^{-3}\cos y_2 \\ & + \alpha y_5^2y_{10}\eta z^{-3}q^{-1}\cos y_2 + \alpha y_6y_7y_{11}\eta(2\chi + \alpha^2\sin^2 y_2)z^{-4}\cos y_2 + 3\alpha^2 y_6y_8y_{11}\eta z^{-4}\cos y_2 \\ & - 3\alpha y_1y_5y_7y_{11}\xi\chi z^{-4}q^{-1}\sin y_2 + 3\alpha^2 y_1y_5y_8y_{11}\xi z^{-4}q^{-1}\sin y_2 + 3\alpha y_1y_7^2y_9q\xi z^{-5}\chi\sin^3 y_2 \\ & - 3y_1y_7y_8y_9q\xi(\chi + \alpha^2\sin^2 y_2)z^{-5}\sin y_2 + 3\alpha y_1y_8^2y_9q\xi z^{-5}\sin y_2 - \alpha y_7^2y_{10}\eta(2\chi^2 + \alpha^2 q\sin^2 y_2) \\ & \times z^{-5}\sin^2 y_2\cos y_2 - \alpha y_8^2y_{10}\eta(q + 2\alpha^2\sin^2 y_2)z^{-5}\cos y_2 + 2\alpha^2 y_7y_8y_{10}\eta(3\chi - 2y_1)z^{-5}\sin^2 y_2\cos y_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 = {} & -2y_5y_7(y_1z(q - \alpha^2\sin^2 y_2) - \alpha^2\psi\sin^2 y_2)z^{-2}q^{-1} - 2\alpha y_5y_8\psi z^{-2}q^{-1} - 2y_6y_7(z^2 + 2\alpha^2 y_1 \\ & \times \sin^2 y_2)z^{-2}\cot y_2 + 4\alpha y_1y_6y_8z^{-2}\cot y_2 - \alpha y_5y_7y_9\eta(\chi + 2\alpha^2\sin^2 y_2)z^{-4}\cos y_2 \\ & + 3\alpha^2 y_5y_8y_9\eta z^{-4}\cos y_2 - 3\alpha y_1y_6y_7y_9q\xi z^{-4}\sin y_2 + 3y_1y_6y_8y_9q\xi z^{-4}\sin^{-1} y_2 - 3\alpha y_1y_5y_7y_{10} \end{aligned}$$

$$\times \xi\chi z^{-4}q^{-1}\sin y_2 + \alpha y_6y_7y_{10}\eta(2\chi+\alpha^2\sin^2 y_2)z^{-4}\cos y_2 + 3\alpha^2y_1y_5y_8y_{10}\xi z^{-4}q^{-1}\sin y_2$$

$$- 3\alpha^2y_6y_8y_{10}\eta z^{-4}\cos y_2 + \alpha y_5^2y_{11}\eta(q+2\alpha^2\sin^2 y_2)z^{-3}q^{-2}\cos y_2\sin^{-2}y_2 - \alpha y_6^2y_{11}\eta$$

$$\times (2q+\alpha^2\sin^2 y_2)z^{-3}q^{-1}\cos y_2\sin^{-2}y_2 + 6\alpha y_1y_5y_6y_{11}\xi z^{-3}q^{-1}\sin^{-1}y_2 - 2\alpha^3y_1^2y_7^2y_{11}\eta$$

$$\times z^{-5}q^{-1}\sin y_2\sin 2y_2 - 2\alpha^2y_1y_7y_8y_{11}\eta(q-\alpha^2\sin^2 y_2)(1+\sin^2 y_2)z^{-5}q^{-1}\cos y_2$$

$$- \alpha y_8^2y_{11}\eta(q-\alpha^2\sin^2 y_2)^2z^{-5}q^{-1}\cos y_2;$$

$$A_4 = 2\alpha y_5y_7(2y_1^2z+\psi\chi)z^{-2}q^{-1}\sin^2 y_2 - 2y_5y_8\psi\chi z^{-2}q^{-1} - 2\alpha^3y_1y_6y_7z^{-2}\sin^2 y_2\sin 2y_2$$

$$+ 2\alpha^2y_1y_6y_8z^{-2}\sin 2y_2 - 3\alpha^2y_5y_7y_9\eta\chi z^{-4}\sin^2 y_2\cos y_2 + \alpha y_5y_8y_9\eta(2\chi+\alpha^2\sin^2 y_2)z^{-4}$$

$$\times \cos y_2 - 3\alpha^2y_1y_6y_7y_9q\xi z^{-4}\sin^3 y_2 + 3\alpha y_1y_6y_8y_9q\xi z^{-4}\sin y_2 - 3y_1y_5y_7y_{10}\xi\chi^2z^{-4}q^{-1}$$

$$\times \sin y_2 + 3\alpha^2y_6y_7y_{10}\eta\chi z^{-4}\sin^2 y_2\cos y_2 + 3\alpha y_1y_5y_8y_{10}\xi\chi z^{-4}q^{-1}\sin y_2 - \alpha y_6y_8y_{10}\eta$$

$$\times (\chi+2\alpha^2\sin^2 y_2)z^{-4}\cos y_2 + 3\alpha^2y_5^2y_{11}\eta\chi q^{-2}z^{-3}\cos y_2 - 3\alpha^2y_6^2y_{11}\eta z^{-3}\cos y_2 + 3y_1y_5y_6$$

$$\times y_{11}\xi(\chi+\alpha^2\sin^2 y_2)z^{-3}q^{-1}\sin^{-1}y_2 - \alpha y_7y_8y_{11}\eta z^{-3}\cos y_2 + 2\alpha^2y_1y_{11}\eta z^{-4}q^{-1}\cos y_2;$$

$$pA_5 = \alpha y_5y_7y_9(\alpha^2-y_1^2)q^{-1}\sin^2 y_2 - \alpha^3y_1y_6y_7y_9z^{-1}\sin^2 y_2\sin 2y_2 + \alpha^2y_5y_8y_9(y_1-1)q^{-1}$$

$$\times \sin^2 y_2 - 0.5\alpha^2y_6y_8y_9(z-2y_1)z^{-1}\sin 2y_2 + \alpha y_5^2y_{11}\psi q^{-2} + 2\alpha y_1y_7^2y_{11}(y_1z(z-2y_1)$$

$$- \alpha^2\psi\sin^2 y_2)z^{-2}q^{-1}\sin y_2^2 + \alpha y_8^2y_{11}(z-2y_1)\psi z^{-2}q^{-1} + \alpha y_1y_5y_7y_{10}q^{-1}\sin 2y_2 + 0.5\alpha^2y_5$$

$$\times y_8y_{10}(z-4y_1)z^{-1}q^{-1}\sin 2y_2 - 2\alpha y_1y_5y_6y_{11}q^{-1}\cot y_2 + 2\alpha y_1^2y_6y_7y_{10}z^{-1}\sin^2 y_2 + y_1y_6y_8$$

$$\times y_{10}(z-2y_1)z^{-1} + y_7y_8y_{11}(y_1z(z-2y_1)^2 - \alpha^2\psi(z-4y_1)\sin^2 y_2)z^{-2}q^{-1} + \beta[2\alpha y_5^2y_7(q(z$$

$$- 3y_1^2) + y_1z(y_1-1))q^{-2}\sin^2 y_2 + y_5^2y_8q^{-2}(3q\psi+\alpha^2z(1-y_1)\sin^2 y_2) + 2\alpha y_1y_5y_6y_7$$

$$\times (z+2\alpha^2\sin^2 y_2)q^{-1}\sin 2y_2 + \alpha^2y_5y_6y_8(z-4y_1)q^{-1}\sin 2y_2 + 2\alpha y_1^2y_6^2y_7\sin^2 y_2$$

$$+ y_1y_6^2y_8(z-2y_1) - y_8^3(z-2y_1)\psi z^{-2} + 2\alpha y_7y_8^2\psi(z-3y_1)z^{-2}\sin^2 y_2 + 2\alpha y_1y_7^3[y_1z\chi(z-2y_1)$$

$$+ \alpha^2\sin^2 y_2(zq - 2\alpha^2y_1^2\sin^2 y_2 + 4y_1^3)]z^{-2}q^{-1}\sin^4 y_2 + 2\alpha y_1z(y_7A_1 - y_5A_3)q^{-1}\sin^2 y_2$$

$$+ z(z-2y_1)(y_5A_4 - y_8A_1)q^{-1} + y_7^2y_8(y_1z^2(z-2y_1) - \alpha^2\psi(z-6y_1)\sin^2 y_2)z^{-2}\sin^2 y_2];$$

$$pA_6 = \alpha y_5y_6y_{11}(2y_1^2-z)q^{-1} - 2\alpha^3y_1y_5y_7y_9z^{-1}\sin^3 y_2\cos y_2 + 0.5\alpha^2y_5y_8y_9(2y_1-z)z^{-1}$$

$$\times \sin 2y_2 + 2\alpha y_1^2y_5y_7y_{10}z^{-1}\sin^2 y_2 + y_1y_5y_8y_{10}(z-2y_1)z^{-1} - 2\alpha y_1y_6^2y_{11}\mathrm{cot}y_2$$

$$+\alpha y_1y_7^2y_{11}(z+2\alpha^2y_1\sin^2y_2)z^{-2}\sin2y_2+2\alpha y_1y_8^2y_{11}(2y_1-z)z^{-2}\mathrm{cot}y_2+\alpha y_6y_7y_9q$$

$$\times(z-4y_1^2)z^{-1}\sin^2y_2+y_6y_8y_9q(4y_1^2-z(y_1+1))z^{-1}+\alpha y_1y_6y_7y_{10}\sin2y_2-0.5\alpha^2y_6y_8y_{10}$$

$$\times\sin2y_2+y_7y_8y_{11}(z^3+2y_1z(\alpha^2\sin^2y_2-z)-8\alpha^2y_1^2\sin^2y_2)z^{-2}\cot y_2+\beta[0.5\alpha^2y_5^2y_8(2y_1$$

$$-z)q^{-1}\sin2y_2-2\alpha^3y_1y_5^2y_7q^{-1}\sin^3y_2\cos y_2-2\alpha y_5y_6y_7\eta\sin^2y_2+2y_5y_6y_8(4y_1^2-z(y_1+1))$$

$$+\alpha y_1y_6^2y_7(2z+3\alpha^2\sin^2y_2)\sin2y_2+\alpha^2y_6^2y_8(z-6y_1)\sin y_2\cos y_2+2\alpha y_1z(y_6A_3-y_7A_2)$$

$$\times\sin^2y_2+z(z-2y_1)(y_6A_4-y_8A_2)+\alpha^2y_1y_8^3(z-2y_1)z^{-2}\sin2y_2+2\alpha y_1y_7^3(\chi z^2$$

$$+4\alpha^2y_1z\sin^2y_2+2\alpha^4y_1\sin^4y_2)z^{-2}\sin y_2^3\cos y_2+2\alpha y_1y_7y_8^2(\alpha^2y_1\sin^2y_2-\chi(z-2y_1))z^{-2}$$

$$\times\sin2y_2+0.5y_7^2y_8(z^3q+2\alpha^2y_1(zq-6y_1\chi)\sin y_2^2)z^{-2}\sin2y_2];$$

$$pA_7=-2\alpha^3y_1y_6y_7y_{11}z^{-1}\sin^3y_2\cos y_2+\alpha y_5y_7y_{11}[(4y_1^2-z)\chi-2\alpha^2y_1^2\sin^2y_2-4y_1^3]z^{-1}q^{-1}$$

$$\times\sin^2y_2+y_5y_8y_{11}[y_1(z-2y_1)^2+\alpha^2(z-2y_1^2)\sin^2y_2]z^{-1}q^{-1}+y_6y_8y_{11}[z(z-2y_1)+2\alpha^2y_1$$

$$\times\sin^2y_2]z^{-1}\cot y_2-\alpha y_7^2y_9q(\alpha^2\psi+y_1^2(z+2y_1^2))z^{-2}\sin^4y_2+y_7y_8y_9q(zy_1(2y_1-z)+\psi(\chi$$

$$+\alpha^2\sin^2y_2))z^{-2}\sin^2y_2-\alpha y_8^2y_9q\psi z^{-2}\sin^2y_2+2\alpha^3y_1y_7^2y_{10}qz^{-2}\sin^5y_2\cos y_2-0.5y_7y_8y_{10}q$$

$$\times(z^2+4\alpha^2y_1\sin^2y_2)z^{-2}\sin2y_2)+\alpha y_1y_8^2y_{10}qz^{-2}\sin2y_2+\beta[-2\alpha y_5y_7^2(\chi\psi+2y_1^2z)z^{-1}\sin^4y_2$$

$$+4\alpha^3y_1y_6y_7^2qz^{-1}\sin^5y_2\cos y_2-2\alpha y_5y_8^2\psi z^{-1}\sin^2y_2+2\alpha y_1y_6y_8^2qz^{-1}\sin2y_2+zq(y_7A_4$$

$$-y_8A_3)\sin^2y_2-y_6y_7y_8zq\sin2y_2-2y_5y_7y_8(y_1z(z-2y_1)-\psi(\chi+\alpha^2\sin^2y_2))z^{-1}\sin^2y_2], \tag{10}$$

де використано позначення

$$z=y_1^2+\alpha^2\cos^2y_2,\qquad q=y_1(y_1-2)+\alpha^2,\qquad \psi=y_1^2-\alpha^2\cos^2y_2,$$

$$p=2\alpha y_1y_7\sin^2y_2+(z-2y_1)y_8,\qquad \eta=3y_1^2-\alpha^2\cos^2y_2,$$

$$\chi=y_1^2+\alpha^2,\qquad \xi=y_1^2-3\alpha^2\cos^2y_2,\qquad \beta=y_5y_9+y_6y_{10}+y_7y_{11}. \tag{11}$$

При цьому внаслідок (5) справджується співвідношення

$$\varepsilon_0^2=(y_5y_9+y_6y_{10}+y_7y_{11})^2+qz^{-1}y_9^2+z^{-1}y_{10}^2+q^{-1}z^{-1}(z-2y_1)y_{11}^2\sin^{-2}\theta. \tag{12}$$

Це співвідношення разом із (10)–(12) використаємо при комп'ютерному інтеґруванні рівнянь (9).

III. ЧИСЛОВЕ ІНТЕҐРУВАННЯ РІВНЯНЬ (9)

Щоб отриматі коректні фізичні висновки про ступінь і характер впливу взаємодії спіну із кривиною простору-часу на траєкторії часток зі спіном у полі Керра, слід проаналізувати ті розв'язки рівнянь (9), які, з одного боку, не є лише слабко збуреними розв'язками рівнянь геодезійних ліній, а з іншого — поведінку яких визначають саме лінійні за спіном члени, оскільки для загальнішого розгляду необхідно брати до уваги вже точні рівняння МП, що виходить за межі цієї статті. При цьому важливо, що існують точні часткові розв'язки рівнянь (9) у полі Керра, представлені в аналітичному вигляді в [15], які з точністю до малих

величин порядку ε, означеного в (4), є наближеними розв'язками точних рівнянь МП. Ці розв'язки описують колові орбіти частки у вузькій просторовій області поблизу $r = r_{\rm ph}^{(-)}$ (де використано позначення $r_{\rm ph}^{(-)}$ з [21], що означає радіальну координату колової геодезійної ізотропної орбіти за умови контробертання) зі сталою кутовою швидкістю в екваторіальній площині метрики Керра, коли спін ортогональний до цієї площини. Тоді виконуються співвідношення:

$$u^1 = 0, \quad u^2 = 0, \quad u^3 = \text{const} \neq 0, \quad u^4 = \text{const} \neq 0,$$
$$S_1 = 0, \quad S_2 = \text{const} \neq 0, \quad S_3 = 0, \quad \theta = 90^\circ, \qquad (13)$$

причому явний вираз для u^3 через $r_{\rm ph}^{(-)}$ і ε такий [15]:

$$u^3 = -\frac{2\left(M/r_{\rm ph}^{(-)}\right)^{3/4}}{\sqrt{3\varepsilon}\left(r_{\rm ph}^{(-)} - M\right)}\left(1 + O(\varepsilon)\right) \qquad (14)$$

(не обмежуючи загальності, знак "$-$" у правій частині (14) записано для випадку, коли $S_2 > 0$; якщо ж $S_2 < 0$, то вираз для u^3 також змінить знак). Як докладно показано в [15], унаслідок (4), (14) швидкість частки зі спіном на цих орбітах є ультрарелятивістською і відповідає γ — фактору Лоренца порядку $1/\sqrt{\varepsilon_0}$.

У термінах безрозмірних величин з (7) точний за ε_0 вираз для $y_7 = Mu^3$ має вигляд:

$$y_7 = -\frac{1}{\sqrt{2A}}\left[-B + \sqrt{B^2 - 4AC}\right]^{1/2}, \qquad (15)$$

де

$$A = 0.75\varepsilon_0 y_1^3 (y_1 - 1)^2 [2y_1^{3/2}(y_1 - 3) - 3\varepsilon_0],$$
$$B = -2y_1^4(y_1 - 3) + 3\varepsilon_0 y_1^{5/2}(y_1 - 3)^2 - 9\varepsilon_0^2 y_1(y_1 - 2),$$
$$C = [y_1 - 1.5\varepsilon_0 y_1^{-1/2}(y_1 - 3)]^2, \qquad (16)$$

причому тут $y_1 = r_{\rm ph}^{(-)}/M$.

Якщо частка почне рух із значеннями компонент швидкості та спіну, що відрізняються від (13)–(15), її траєкторія буде відмінною від колової. Якою саме — розглянемо нижче на типових прикладах. Для всіх графіків на рис. 1–8 мала величина ε_0 з (8) дорівнює 10^{-4}, а керрівський параметр $a = M$, тобто є максимальним, оскільки для всіх проміжних значень $0 < a < M$ відповідні графіки подібні до випадку $a = M$, змінюючись плавно й монотонно зі зміною a. Як відомо, для $a = M$ маємо $r_{\rm ph}^{(-)} = 4M$. На рис. 1–7 і 9 початкове значення танґенціальної компоненти швидкості визначається виразом (15) для $y_1 = 4$, а на рис. 8 мало відрізняється від (15).

Рис. 1–3 ілюструють залежність відповідних координат частки від її власного часу для кутів нахилу вектора спіну до екваторіальної площини метрики Керра, що дорівнюють 0°, 1°, 10°, 90°, причому початкові значення компоненти S_3 є незмінно нульовими, на відміну від компоненти S_1 (не на шкоду загальності покладаємо $S_1 > 0$), а значення компоненти S_2 початково задаються такими, щоб залишалася незмінною абсолютна величина спіну. Початкові значення координат і швидкості такі самі, як на коловій орбіті з $r = 4M$. Графіків залежності від часу компонент швидкості та спіну тут не подано, бо на обраному часовому інтервалі від $s = 0$ до $s \approx 0.5M$ (рис. 1–4) усі ці компоненти змінюються мало. Обрання саме такого інтервалу зумовлене тим, що на ньому абсолютні величини нелінійних за спіном членів у рівняннях МП значно менші від абсолютних величин лінійних членів, а за його межами ця умова, взагалі кажучи, може порушуватися. До речі, згідно з рис. 3, за час $s \approx 0.5M$ частка робить приблизно два оберти за кутом φ щодо керрівського джерела поля.

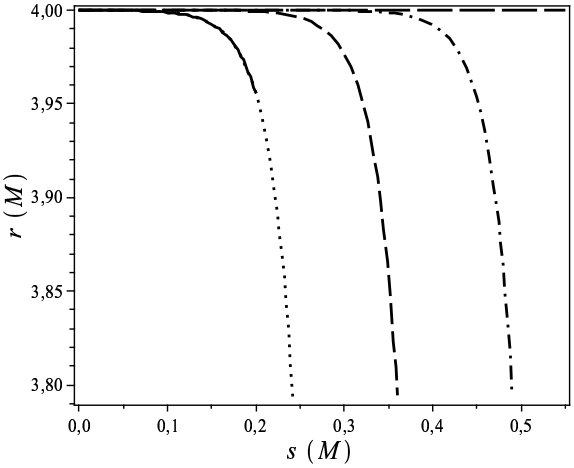

Рис. 1. Залежність радіальної координати від власного часу для кутів нахилу 0° (горизонтальна лінія $r = 4M$), 1° (штрихово-точкова лінія), 10° (штрихова лінія) і 90° (суцільна лінія) при $a = M$, $\varepsilon_0 = 10^{-4}$. Точкова крива відповідає геодезійній лінії з тими самими початковими значеннями координат і швидкості.

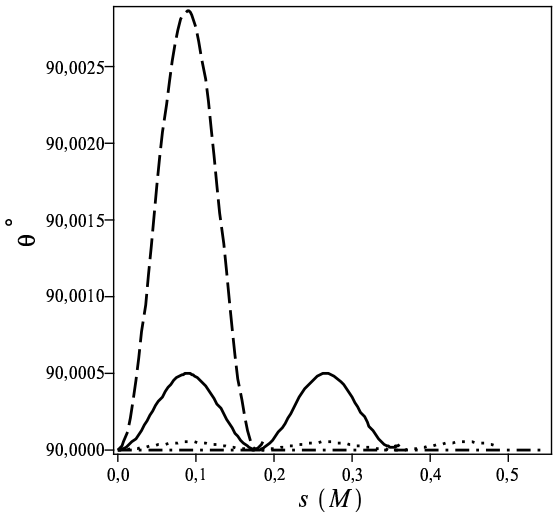

Рис. 2. Залежність кута θ від власного часу для кутів нахилу 0° (горизонтальна лінія $\theta = 90^\circ$), 1° (точкова лінія), 10° (суцільна лінія) і 90° (штрихова лінія) при $a = M$, $\varepsilon_0 = 10^{-4}$.

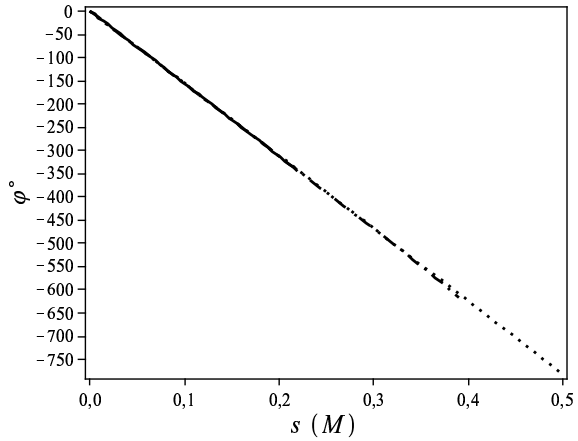

Рис. 3. Залежність кута φ від власного часу при $a = M$, $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ для різних значень кута нахилу практично збігається з відповідною прямою для геодезійної лінії (точкова лінія). Таку саму властивість має залежність t від s.

При цьому з рис. 2 і 3 випливає, що період коливань за кутом θ менший від періоду обертання частки за кутом φ, на відміну від поля Шварцшільда, де ці періоди однакові [14]. Спільним в обох випадках є те, що середнє за період значення кута θ не збігається з $\theta = 90°$, тобто лежить поза екваторіальною площиною. Як зазначено в [14], це є проявом ефекту зависання частки над джерелом поля під малим кутом $\theta - 90°$. Рис. 4 демонструє хід траєкторій частки для тих же кутів нахилу спіну, що й на рис. 1–3. Для порівняння на цих рисунках подано графіки, які характеризують розв'язки рівнянь геодезійних ліній, що відповідають тим самим початковим значенням координат і швидкості. Усі рис. 1–4 описують ситуації, коли взаємодія спіну з кривиною простору-часу протидіє звичайному (геодезійному) притяганню, гальмуючи падіння частки на поверхню горизонту джерела поля, причому ця протидія зменшується зі збільшенням початкового кута нахилу спіну, прямуючи до нуля, коли нахил прямує до 90°.

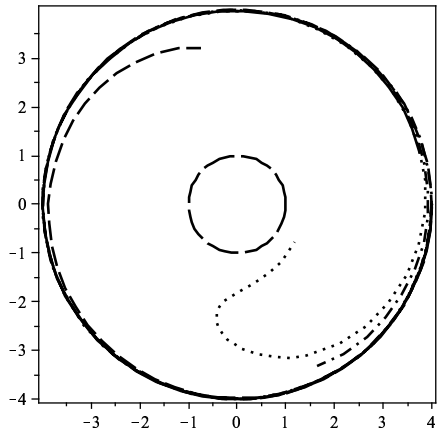

Рис. 4. Траєкторії частки зі спіном для кутів нахилу 0° (коло радіуса 4), 1° (штрихово-точкова лінія), 10° (штрихова лінія) і 90° (суцільна лінія) при $a = M$, $\varepsilon_0 = 10^{-4}$. Точкова крива відповідає геодезійній лінії з тими самими початковими значеннями координат і швидкості. Коло радіуса 1 позначає лінію горизонту.

Рис. 5–7 ілюструють ситуації, коли поряд із нахилом вектора спіну до екваторіальної площини частка має невелику початкову радіальну швидкість. Зокрема тут для кута нахилу 1° умова коректності лінійного за спіном наближення виконується на більшому часовому інтервалі, ніж на рис. 1–4 (приблизно $1.1M$ проти $0.5M$), протягом якого частка зі спіном зробить приблизно чотири оберти за кутом φ і шість θ — коливань. При цьому вона стрімко віддаляється від джерела поля, починаючи з моменту $s \approx M$, тоді як безспінова частка з тими самими початковими значеннями координат і швидкості стрімко падає на поверхню горизонту.

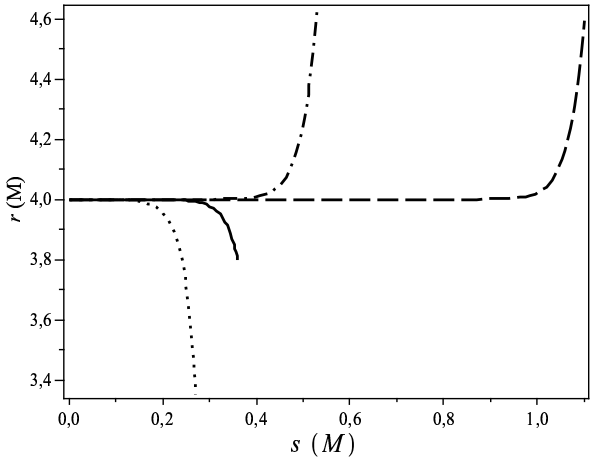

Рис. 5. Залежність радіальної координати від власного часу для кутів нахилу 0° (штрихово-точкова лінія), 1° (штрихова лінія) і 10° (суцільна лінія) при $a = M$, $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ і ненульовою радіальною швидкістю $dr/ds \approx 4.04 \times 10^{-7}$. Точкова крива відповідає геодезійній лінії з тими самими початковими значеннями координат і швидкості.

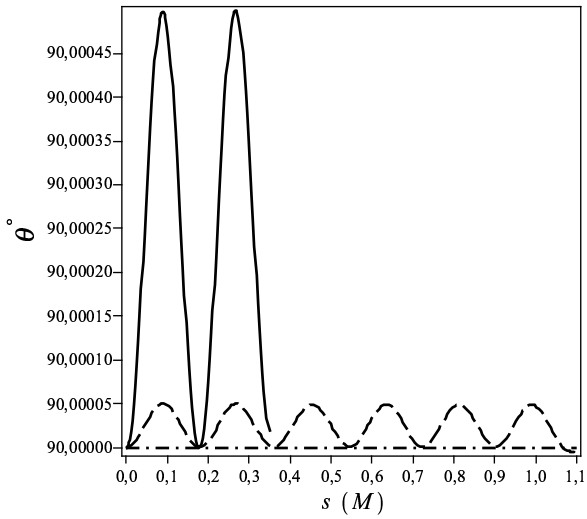

Рис. 6. Залежність кута θ від власного часу для кутів нахилу 0° (горизонтальна лінія $\theta = 90°$), 1° (штрихова лінія) і 10° (суцільна лінія) при $a = M$, $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ і $dr/ds \approx 4.04 \times 10^{-7}$. Точкова крива відповідає геодезійній лінії з тими самими початковими значеннями координат і швидкості.

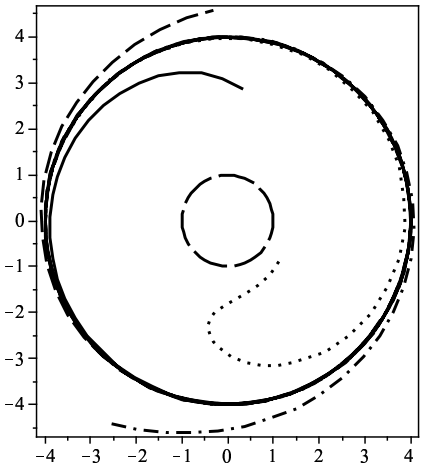

Рис. 7. Траєкторії частки зі спіном для кутів нахилу 0° (штрихово-точкова лінія), 1° (штрихова лінія) і 10° (суцільна лінія) при $a = M$, $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ і $dr/ds \approx 4.04 \times 10^{-7}$. Точкова крива відповідає геодезійній лінії з тими самими початковими значеннями координат і швидкості. Коло радіуса 1 позначає лінію горизонту.

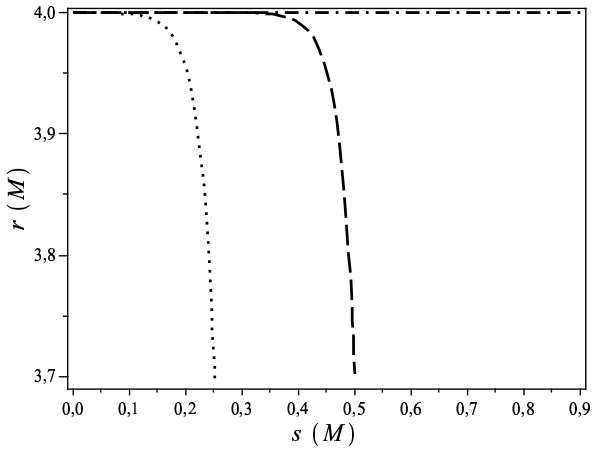

Рис. 8. Залежність радіальної координати від власного часу для кута нахилу 1°, нульової радіальної швидкості й початкової тангенціальної швидкості такої самої, як на попередніх рисунках (штрихова лінія) і для тангенціальної швидкості, домноженої на $1+7.6\times10^{-5}$ (штрихово-точкова горизонтальна лінія $r = 4M$). Точкова крива відповідає геодезійній лінії з тими самими початковими значеннями координат і швидкості.

Рис. 8 демонструє, що за рахунок незначного збільшення абсолютної величини тангенціальної компоненти швидкості частка утримується на коловій орбіті навіть за наявності нахилу спіну.

Рис. 9 ілюструє граничний перехід світової лінії частки зі спіном до відповідної геодезійної лінії, коли абсолютна величина спіну прямує до нуля за незмінних початкових значень координат і швидкості.

Зазначимо, що для перевірки точності комп'ютерних обчислень використовували відомі інтеграли руху — (5) і $u_\mu u^\mu = \text{const}$.

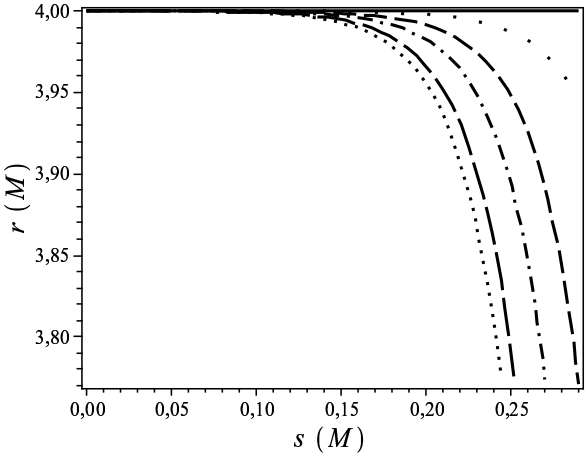

Рис. 9. Залежність радіальної координати від власного часу для кута нахилу 0°, початкових значень компонент швидкості таких самих, як на рис. 1, і різних значень ε_0. Коловій орбіті з $r = 4M$ при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ відповідає суцільна горизонтальна лінія. Чотири криві під нею зверху вниз описують випадки, коли ε_0 дорівнює відповідно 0.95×10^{-4}, 0.8×10^{-4}, 0.6×10^{-4} і 0.25×10^{-4}. Нижня точкова крива відповідає геодезійній лінії з тими самими початковими значеннями координат і швидкості.

IV. ВИСНОВКИ

Отже, для ультрарелятивістської частки зі спіном, яка починає рух у вузькій просторовій області поблизу просторової координати $r = r_{\rm ph}^{(-)}$, на обмежених часових інтервалах існують суттєво негеодезійні орбіти частки зі спіном у полі Керра, що визначаються лінійними за спіном членами рівнянь МП. Серед цих орбіт є як екваторіальні ($\theta = 90°$), так і слабко неекваторіальні (для яких кут $|\theta - 90°|$ малий), зумовлені початковим нахилом спіну до екваторіальної площини. Важливою ознакою суттєвої негеодезійності вказаних орбіт є те, що за короткий проміжок часу, близько одного періоду обертання частки за кутом φ щодо джерела ґравітаційного поля, радіальна координата частки зі спіном значно відрізняється від радіальної координати безспінової частки, яка починала рух із тими самими початковими значеннями координат і швидкості, що й частка зі спіном. При цьому різниця їхніх значень Δr стає сумірною з самим початковим значенням радіальної координати. (Для слабко негеодезійних рухів, коли вплив спіну зводиться до невеликого збурення відповідних геодезійних рухів, така різниця може набігти лише за дуже великий проміжок часу).

В усіх розглянутих випадках рухів знаки компоненти спіну S_2 і кутової швидкості u^3 є такими ($S_2 > 0$, $u^3 < 0$), що взаємодія спіну з ґравітаційним полем сильно протидіє звичайному ґравітаційному притяганню. За іншого співвідношення знаків така взаємодія спричиняє додаткове притягання порівняно з тим, що його зазнає частка без спіну. Коректний опис можливих загальних типів рухів частки зі спіном у ґравітаційному полі Керра вимагає дослідити

розв'язки точних рівнянь МП. Однак прикметно, що вже лінійне за спіном наближення дає змогу виявити важливі властивості й тенденції взаємодії ультрарелятивістської частки зі спіном із ґравітаційним полем, які слугуватимуть орієнтиром у подальших дослідженнях.

Згідно з числовими оцінками, наведеними, зокрема, в [14, 15], за певних умов високоенергетичні частки зі складу космічних променів, пролітаючи неподалік компактних астрофізичних об'єктів (чорних дір, квазарів та ін.), могли б, у принципі, зазнавати значного впливу взаємодії їх спіну з ґравітаційним полем. Однак докладний аналіз конкретних ситуацій ще попереду.

Зазначимо також, що оскільки рівняння МП є в певному сенсі класичним наближенням загальноковаріантного рівняння Дірака [22], вивчені закономірності взаємодії класичної (неквантової) спінової частки із ґравітаційним полем інспірують відповідні дослідження на квантовому рівні.

Робота частково підтримана Програмою НАН України "Космомікрофізика"

[1] M. Mathisson, Acta Phys. Pol. **6**, 163 (1937).
[2] P. Dirac, Nature **146**, 613 (1940).
[3] A. Papapetrou, Proc. R. Soc. A **209**, 248 (1951).
[4] E. Corinaldesi, A. Papapetrou, Proc. R. Soc. A **209**, 258 (1951).
[5] L. Shiff, Phys. Rev. Lett. **4**, 219 (1960).
[6] R. Wald, Phys. Rev. D **6**, 406 (1972).
[7] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).
[8] Р. М. Пляцко, препринт ИФ АН БССР, Минск, 1978.
[9] Р. М. Пляцко, дисерт. канд. физ.-мат. наук, Ин-т физики АН БССР, Минск (1979).
[10] Р. М. Пляцко, А. Л. Вынар, Докл. акад. наук СССР **263**, 1125 (1982).
[11] Р. М. Пляцко, *Прояви гравітаційної ультрарелятивістської спін-орбітальної взаємодії* (Наук. думка, Київ, 1988).
[12] C. Möller, Commun. Dublin. Inst. Adv. Stud. Ser. A **5**, 3 (1949).
[13] К. Меллер, *Теория относительности* (Атомиздат, Москва, 1975).
[14] Р. М. Пляцко, О. Б. Стефанишин, Журн. фіз. досл. **13**, 3 (2009).
[15] R. Plyatsko, O. Stefanyshyn, M. Fenyk, Phys. Rev. D **82**, 044015 (2010).
[16] F. Pirani, Acta Phys. Pol. **15**, 389 (1956).
[17] R. Plyatsko, Class. Quantum Gravit. **22**, 1545 (2005).
[18] А. Л. Зельманов, Докл. акад. наук СССР **107**, 815 (1956).
[19] Н. В. Мицкевич, *Физические поля в общей теории относительности* (Наука, Москва, 1969).
[20] О. С. Иваницкая, *Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории тяготения* (Наука и техника, Минск, 1979).
[21] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, Oxford, 1983).
[22] S. Wong, Int. J. Theor. Phys. **5**, 221 (1972); L. Kannenberg, Ann. Phys. (N. Y.) **103**, 64 (1977); J. Audretsch, J. Phys. A **14**, 411 (1981); A. Gorbatsievich, Acta Phys. Pol. B **17**, 111 (1986); A. Barut, M. Pavsic, Class. Quantum Gravit. **4**, 41 (1987); F. Cianfrani, G. Montani, Europhys. Lett. **84**, 30008 (2008); Int. J. Mod. Phys. A **23**, 1274 (2008); Yu. Obukhov, A. Silenko, O. Teryaev, Phys. Rev. D **80**, 064044 (2009).

STRONG ANTIGRAVITY EFFECTS FOR THE SPINNING PARTICLE IN A KERR FIELD

R. M. Plyatsko, M. T. Fenyk
Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics, of the National Academy of Sciences of Ukraine, 3-b Naukova St., Lviv, 79060, Ukraine, plyatsko@lms.lviv.ua

The world lines and trajectories of the highly relativistic spinning particle in the space region near $r_{\rm ph}^{(-)}$ in a Kerr field are investigated. They are significantly non-geodesic lines and show the effects of the gravitational repulsion that are caused by the interaction of spin with the curvature of the space-time. These lines are described by the solutions of the Mathisson–Papapetrou equations which are determined by their linear spin approximation. Therefore, these solutions and the corresponding physical conclusions do not depend on the choice of the Mathisson–Pirani or Tulczyjew–Dixon supplementary condition.