JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 15, No. 3 (2011) 3601(10 p.)

# ДО ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ В МОДЕЛІ MINORITY GAME

В. С. Янішевський
*Кафедра економічної кібернетики та інноватики,*
*Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,*
*вул. Лесі Українки, 46, Дрогобич, 82100, Україна*

(Отримано 19 жовтня 2010 р.; в остаточному вигляді — 9 травня 2011 р.)

Оптимізаційну задачу в моделі minority game досліджено варіаційним методом, який ґрунтується на нерівності для логарифма великої статистичної суми. У запропонованому підході не використовуємо розкладу за параметром $\beta/P$, що наявне в оригінальних роботах. У наближенні симетричних реплік отримано основні співвідношення для мінімуму досліджуваної величини й систему рівнянь для варіаційних параметрів. Показано, що отримані результати збігаються з результатами оригінальних праць.

**Ключові слова**: варіаційний метод, метод реплік, оптимізація.

PACS number(s): 64.60.Cn, 75.10.Nr, 02.60.Pn

## ВСТУП

Методи статистичної фізики виявилися досить ефективними в різноманітних галузях досліджень [1–3]. Серед них — застосування теорії невпорядкованих систем до прикладних оптимізаційних задач [3–6], які містять велику кількість змінних і параметрів. У цьому випадку класичні методи оптимізації через надзвичайну трудомісткість є незастосовними. З'ясувалося, що в багатьох оптимізаційних задачах можна побудувати аналог вільної енергії і звести їх так до основної задачі статистичної фізики.

Розрахувати вільну енергію здебільшого можна лише наближено. Одним із широко використовуваних наближених методів є варіаційний, що ґрунтується на нерівності для вільної енергії [6–10]. У цій роботі варіаційний метод застосовано до оптимізаційної задачі в моделі minority game [11–17]. В основі minority game лежить "мікроскопічний" підхід до опису явищ на фінансовому ринку. Зокрема, ринок моделюється ігровою взаємодією $N$ аґентів. У кожен момент часу $t$ $i$-ий аґент ($i = 1, \ldots, N$) діє $a_i(t) = 1$ (купівля) або $a_i(t) = -1$ (продаж). Виграш $i$-го аґента $u_i(t)$, враховуючи дії всіх аґентів, задаємо формулою:

$$u_i(t) = -a_i(t)\, A(t), \text{ де } A(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t). \qquad (1)$$

Очевидно, у кожен момент часу аґентів можна розділити на дві групи за обраною дією (продаж чи купівля). Тип взаємодії (1) відображає правило меншості — виграє той, хто перебуває в меншості. Виграшну дію аґента можна записати так: $a_i(t) = -\mathrm{sign}(A(t))$, а його виграш становитиме $|A(t)|$. Відповідно дія аґента, що перебуває в більшості, становить $a_i(t) = \mathrm{sign}(A(t))$, його програш рівний $-|A(t)|$. Сумарний виграш усіх аґентів дорівнює $\sum_i u_i(t) = -A^2(t)$ і завжди від'ємний. Усі аґенти мають доступ до спільної інформації, яку в момент часу $t$ описують цілим числом $\mu(t) = 1, \ldots, P$. Очевидно, інформація впливає на дію аґентів ринку, тому її позначають $A^{\mu(t)}(t)$. У загальному існує $2^P$ стратегій аґента ринку, проте приймаємо, що кожен аґент вибирає лише $S$. Дію $i$-го аґента, якщо він дотримується стратегії $s$ і використовує інформацію $\mu(t)$ позначимо $a^{\mu}_{s,i}$. У стаціонарному випадку часову змінну $t$ далі будемо опускати. У моделі число $P$ розглядаємо досить великим, того ж самого порядку, що й $N$, а величина $\alpha = P/N$ скінченна при $N \gg 1$. Змінну $\mu$ розглядаємо випадковою з розподілом $\rho^{\mu}$, незалежно для кожного часового кроку (далі вважаємо $\rho^{\mu} = 1/P$). У моделі задаємо також, що для кожного часового кроку дії аґентів $a^{\mu}_{s,i}$ є незалежними випадковими величинами з імовірностями:

$$P(a^{\mu}_{s,i} = +1) = P(a^{\mu}_{s,i} = -1) = \tfrac{1}{2}\,, \qquad (2)$$

$$i = 1, \ldots, N,\ s = 1, \ldots, S,\ \mu = 1, \ldots, P. \qquad (3)$$

Далі для аналізу гри вводимо змішані стратегії $\pi_{s,i}$, що визначають імовірності, з якими $i$-й аґент застосовує цю стратегію (виконується умова $\sum_s \pi_{s,i} = 1$). Множина змінних $\pi_{s,i}$ визначає фазовий простір моделі [14]. У фазовому просторі обчислюють середні значення величин

$$\langle A^{\mu} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S} \pi_{s,i}\, a^{\mu}_{s,i}\,. \qquad (4)$$

Для аналізу колективних властивостей ринку вводимо величину [14, 15, 18]

$$H = \sum_{\mu=1}^{P} \rho^{\mu} \left( \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S} \pi_{s,i}\, a^{\mu}_{s,i} \right)^2, \qquad (5)$$

що визначає флуктуації (4) і має властивості гамільтоніана системи. Система може перебувати в симетричному стані, де $H = 0$, і асиметричному стані з $H > 0$. Відповідно в симетричному стані $\langle A^{\mu} \rangle = 0$ і, згідно зі сказаним вище, середній виграш дорівнює нулеві. За наявності асиметрії $\langle A^{\mu} \rangle \neq 0$ і тим самим існує виграшна стратегія. У цитованих працях установлено, що, залежно від параметра $\alpha$, в моделі відбувається фазовий перехід з порушенням симетрії для певного $\alpha_c \simeq 0.3374$: для $\alpha \leqslant \alpha_c$ величина $H = 0$ і $H > 0$ для $\alpha > \alpha_c$.

Однак у методі розв'язку [11,12,14,15] використано розклад за параметром $\sim \beta/P$ (див. (10)), який вважається малим для $P \gg 1$. Такий підхід мотивується тим, що спершу виконується границя $P \gg 1$ для заданого $\beta$ (див. також [19]). Проте, як було зауважено в [20], така арґументація не є вичерпною, оскільки зазначений порядок границь безпосередньо не випливає з формули (8), а тому можлива зміна порядку границь. Однак, якщо виконувати спочатку граничний перехід $\beta \to \infty$ (після $n \to 0$), а потім — $P \gg 1$, то розклад (10) уже не матиме обґрунтування і виникає питання про залежність результатів від порядку виконання зазначених границь. Тому розгляд методів досліджень, де не використовується розклад за параметром $\beta/P$, на нашу думку, є актуальним. Із цією метою в нашій праці застосовано варіаційний підхід, у якому, за аналогією з нерівністю для вільної енерґії [6], використано нерівність для лоґарифма великої статсуми.

## I. МІНІМІЗАЦІЯ В МЕТОДІ СТАТСУМИ

Оптимізаційна задача полягає у вивченні мінімуму гамільтоніана $H$ (5) на множині змінних $\{\pi_{s,i}\}$. Оскільки зазначений мінімум залежатиме від усіх можливих дій аґентів $\{a^{\mu}_{s,i}\}$, то для отримання змістовних величин слід усереднити за змінними $\{a^{\mu}_{s,i}\}$. Далі використаємо прийом, який застосовують при дослідженні основного стану фізичних систем [6] — мінімум визначається як основний стан системи при нулі "температури". Отже, побудуємо статистичну суму системи:

$$Z(\beta) = \mathrm{Sp}_{\pi} \exp(-\beta H(\pi)),$$

де $\beta$ — обернена "температура", $\mathrm{Sp}_{\pi}$ позначає суму за всіма можливими станами системи (інтеґрування за змінними $\pi_{s,i} \in [0,1]$ із урахуванням умови $\sum_s \pi_{s,i} = 1$), позначення $H(\pi)$ — вказує на залежність від імовірностей змішаних стратегій. У результаті мінімум гамільтоніана (5) визначаємо так:

$$F = \min_{\pi} H(\pi) = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \ln Z(\beta). \tag{6}$$

Усереднення величини $\ln Z(\beta)$ за змінними $a^{\mu}_{s,i}$ з імовірностями (2), яке позначимо $\langle \ldots \rangle_a$, виконаємо в методі реплік:

$$\langle \ln Z(\beta) \rangle_a = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \ln \langle Z(\beta)^n \rangle_a \,, \tag{7}$$

де $n$ – позначає кількість реплік. Відповідно, для шуканого мінімуму (6) отримаємо співвідношення:

$$F = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \ln Z_N \,, \tag{8}$$

де позначено $Z_N = \langle Z(\beta)^n \rangle_a$.

Як відомо, у методі реплік [4, 21] обчислення в (7) виконують для цілих $n$, після чого аналітично продовжують $n$ на множину дійсних чисел і виконують граничний перехід $n \to 0$. Для кожної репліки вводимо свою множину динамічних змінних $\pi^a_{s,i}$. У результаті статсуму системи $n$ реплік після усереднення за $a^{\mu}_{s,i}$ запишемо у вигляді [11, 12, 14, 15]:

$$Z_N = \int DzD\pi \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{a,\mu} z_a^{\mu 2}\Big) \times \prod_{\mu,i,s} \cos\Big[\sqrt{\frac{2\beta}{P}}\Big(\sum_a z^{\mu}_a \pi^a_{s,i}\Big)\Big], \tag{9}$$

де введено позначення:

$$Dz = \prod_{a,\mu} \frac{dz^{\mu}_a}{\sqrt{2\pi}} \,, \; D\pi = \prod_{a,i,s} d\pi^a_{s,i} \,.$$

Тут індекс $a = 1, \ldots, n$ нумерує репліки, зміст решти індексів був визначений раніше. При отриманні (9) використано також інтеґральне перетворення

$$e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} e^{ixz} dz$$

для лінеаризації в показнику експоненти квадратичних доданків (змінні $z^a_{\mu}$) гамільтоніана (5).

Оскільки виконати розрахунок у (9) в загальному випадку неможливо, тому в ориґінальних працях використано наближення, про що йшлося вище:

$$\cos\Big[\sqrt{\frac{2\beta}{P}}\Big(\sum_a z^{\mu}_a \pi^a_{s,i}\Big)\Big] \approx \exp\Big[-\frac{\beta}{P}\Big(\sum_a z^{\mu}_a \pi^a_{s,i}\Big)^2\Big]. \tag{10}$$

Із урахуванням наближення (10) статистична сума (9) набере вигляду:

$$Z_N = \langle Z(\beta)^n \rangle_a = \int DzD\pi \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{a,\mu} z_a^{\mu 2}\Big) \times \exp\Big(-\frac{\beta}{P}\sum_{i,\mu,s}\Big(\sum_a z^{\mu}_a \pi^a_{s,i}\Big)^2\Big). \tag{11}$$

Власне для статсуми (11) були отримані основні результати в моделі. Зазначимо, що в праці [22] ці результати були одержані також за допомогою варіаційного методу, в якому теж використано наближення (10). У наступному розділі розглянуто варіаційний метод, де не застосовано апроксимації (10).

## II. ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД

Для простоти розгляньмо лише два стани $S = 2$ (див. [14, 15]). У цьому випадку в (9) досить просто перейти до незалежних змінних, ураховуючи співвідношення $\sum_s \pi^a_{s,i} = 1$ за допомогою функції Дірака $\delta(\sum_s \pi^a_{s,i} - 1)$ ($i = 1, \ldots, N$, $a = 1, \ldots, n$). Інтеґрування за змінними $\pi^a_{2,i}$ виконуємо точно з одночасною підстановкою $\pi^a_{2,i} = 1 - \pi^a_{1,i}$. Підстановивши

$\pi^a_{1,i} = \frac{1}{2}(1-\pi^a_i)$, після нескладних перетворень отримаємо для статсуми $n$- реплік представлення:

$$Z_N = \int d\gamma\, \psi(z)^N, \tag{12}$$

де введено позначення

$$\psi(z) = \int_{-1}^{1} \prod_a \frac{d\pi}{2} \prod_\mu \cos\Big(\frac{1}{2}\sum_a \xi^\mu_a(1+\pi_a)\Big) \times \cos\Big(\frac{1}{2}\sum_a \xi^\mu_a(1-\pi_a)\Big),$$
$$\xi^\mu_a = \sqrt{\frac{2\beta}{P}} z^\mu_a, \quad d\gamma = \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{a,\mu} {z^\mu_a}^2\Big)\prod_{a,\mu}\frac{dz^\mu_a}{\sqrt{2\pi}}. \tag{13}$$

Застосувати варіаційний метод безпосередньо для статсуми (12) доволі проблематично, оскільки $\psi(z)^N$ неможливо представити в експонентній формі:

$$\psi(z)^N = \exp(N\tilde{\psi}(z))$$

з неперервною функцією $\tilde{\psi}(z)$. Через те розгляньмо твірну функцію:

$$\Xi(\theta) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}\theta^N Z_N. \tag{14}$$

Очевидно, твірна функція (14) є аналогом статсуми для великого канонічного ансамблю в статистичній фізиці [6,7]. Зауважимо, що співвідношення (14) є рядом Тейлора за степенями $\theta$ для твірної функції $\Xi(\theta)$. Тому величину $Z_N$ визначимо за допомогою контурного інтеґрала [7]:

$$Z_N = \frac{N!}{2\pi i}\oint \frac{\Xi(\theta)}{\theta^{N+1}} d\theta, \tag{15}$$

де контур інтеґрування є замкнутою лінією в комплексній площині $\theta$, що охоплює точку $\theta = 0$. Далі введемо величину $\Omega = -\ln(\Xi(\theta))$, яка має зміст потенціалу [6,7]. Це дає змогу визначити шуканий мінімум (8) через потенціал $\Omega$. Відповідний зв'язок у границі $n \approx 0$ наведено в додатку А (формула (А.3)).

Отже, для статсуми (12) отримаємо:

$$\Xi(\theta) = \int d\gamma\, \exp(-\mathcal{H}), \tag{16}$$

де введено позначення величини

$$\mathcal{H} = -\theta\psi(z), \tag{17}$$

яка має зміст гамільтоніана.

Для великої статсуми аналог нерівності для вільної енерґії [6] (див. також [9]) матиме вигляд:

$$\Omega(\theta) \leqslant \Omega_0(\theta) + \langle \mathcal{H} - \mathcal{H}_0\rangle_0, \tag{18}$$

де $\mathcal{H}_0$ — пробний гамільтоніан, величина $\Omega_0(\theta) = -\ln(\Xi(\theta))$ має зміст потенціалу системи з пробними гамільтоніаном, і усереднення у (18) визначається формулою:

$$\langle \ldots \rangle_0 = \frac{1}{\Xi_0(\theta)}\int d\gamma \exp(-\mathcal{H}_0)(\ldots),$$
$$\Xi_0(\theta) = \int d\gamma \exp(-\mathcal{H}_0).$$

Отже, з наведеного вище випливає такий порядок обчислень. На основі нерівності (18) обчислимо величину $\Omega^{(1)}(\theta)$ і вираз для $F$ (формула (А.3)), які залежать від варіаційних параметрів. Варіаційні параметри визначаються з рівнянь екстремуму $F$. Зазначимо, що подібний спосіб застосування варіаційного методу використано в роботі [9] для аналізу емпіричних даних у деяких моделях машинного навчання.

## III. ПРОБНИЙ ГАМІЛЬТОНІАН

Пробний гамільтоніан $\mathcal{H}_0$, як і вихідний $\mathcal{H}$ (17), повинен бути заданий на множині змінних $\{z^\mu_a\}$. Для визначення пробного гамільтоніана скористаємося способом, який застосовано в праці [22]. Зокрема, використовуючи апроксимацію типу (10), запишемо $\psi(z)$ (13) так:

$$\cos\Big(\frac{1}{2}\sum_a \xi^\mu_a(1+\pi_a)\Big)\cos\Big(\frac{1}{2}\sum_a \xi^\mu_a(1-\pi_a)\Big)$$
$$\approx \exp\Big(-\frac{\beta}{2P}\Big[\Big(\sum_a z^\mu_a\Big)^2 + \Big(\sum_a z^\mu_a\pi_a\Big)^2\Big]\Big).$$

У другому доданку в експоненті виконаймо заміну:

$$\Big(\sum_a z^\mu_a \pi_a\Big)^2 = \sum_{a,b} z^\mu_a z^\mu_b \pi_a\pi_b \to \sum_{ab} z^\mu_a z^\mu_b Q_{ab}.$$

У результаті отримаємо вираз для пробного гамільтоніана:

$$\mathcal{H}_0 = -\theta\psi_0(z),$$
$$\psi_0(z) = \exp\Big(-\frac{\beta}{2P}\sum_\mu\Big[\Big(\sum_a z^\mu_a\Big)^2 + \sum_{ab} z^\mu_a z^\mu_b Q_{ab}\Big]\Big). \tag{19}$$

Тут елементи введеної матриці $\hat{Q}$ є варіаційними параметрами задачі.

На основі пробного гамільтоніана (19) розрахуймо величини, що входять у нерівність (18). Зокрема, одержимо:

$$\Xi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!}\Big(\int Dz e^{-\frac{1}{2}\langle z|\hat{M}(k)|z\rangle}\Big)^P, \tag{20}$$

де позначено:

$$\langle z|\hat{M}(k)|z\rangle = \sum_{ab} z_a M_{ab}(k) z_b,$$
$$\hat{M}(k) = \hat{I} + \frac{k\beta}{P}\hat{E} + \frac{k\beta}{P}\hat{Q}, \tag{21}$$
$$Dz = \prod_a \frac{dz_a}{\sqrt{2\pi}}.$$

Після інтеґрування в (20) за змінними $\{z_a\}$ маємо:

$$\Xi_0(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \left( \frac{1}{\sqrt{\det \hat{M}(k)}} \right)^P. \tag{22}$$

Середнє від пробного гамільтоніана визначимо за допомогою співвідношення:

$$\langle \mathcal{H}_0 \rangle_0 = \theta \frac{\partial \Omega_0(\theta)}{\partial \theta}. \tag{23}$$

Відповідно для середнього $\langle \mathcal{H} \rangle_0$ отримаємо:

$$\langle \mathcal{H} \rangle_0 = -\frac{\theta}{\Xi_0(\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \int D\pi \times \left( \int Dz\, e^{-\frac{1}{2}\langle z|\hat{M}(k)|z\rangle} \psi_1(z) \right)^P, \tag{24}$$

де позначено

$$\psi_1(z) = \cos\Big( \sqrt{\frac{\beta}{2P}} \sum_a z_a(1+\pi_a) \Big) \times \cos\Big( \sqrt{\frac{\beta}{2P}} \sum_a z_a(1-\pi_a) \Big).$$

Після інтеґрування за змінними $z_a$ зазначене середнє набере вигляду:

$$\langle \mathcal{H} \rangle_0 = -\frac{\theta}{\Xi_0(\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \int D\pi \left( \frac{\tilde{\psi}_1(k)}{\sqrt{\det \hat{M}(k)}} \right)^P, \tag{25}$$

де

$$\tilde{\psi}_1(k) = \frac{1}{2} \Big[ e^{-\frac{\beta}{P}\langle 1|\hat{M}^{-1}(k)|1\rangle} + e^{-\frac{\beta}{P}\langle \pi|\hat{M}^{-1}(k)|\pi\rangle} \Big]. \tag{26}$$

Тут $\hat{M}^{-1}(k)$ позначає обернену до $\hat{M}(k)$ матрицю; $|1\rangle$ — $n$-вимірний вектор, координати якого рівні 1; $|\pi\rangle = |\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\rangle$.

Отже, підставляючи формули (22), (23) і (25) у нерівність (18), отримаємо оцінку для $\Omega(\theta)$. Подальші обчислення виконаємо, задаючи певний вигляд матриці $\hat{Q}$.

## IV. НАБЛИЖЕННЯ СИМЕТРИЧНИХ РЕПЛІК

Варіаційну матрицю (19) задамо у формі наближення симетричних реплік [11,12,22]:

$$\hat{Q} = (Q-q)\hat{I} + q\hat{E}, \tag{27}$$

де $\hat{I}$ — одинична матриця $n$-го порядку, $\hat{E}$ — матриця $n$-го порядку, всі елементи якої дорівнюють 1. У наближенні симетричних реплік наявні два варіаційні параметри $Q, q$. Використовуючи матрицю (27), обчислимо величини, що містяться в нерівності (18). Зазначимо, що згідно з порядком границь, указаним у формулі (8), спочатку робимо граничний перехід $n \to 0$, а відтак $\beta \to \infty$. Границі $N, P \gg 1$ виконуються після зазначених границь.

Згідно зі співвідношенням (A.3), визначимо лінійні за $n$ внески в потенціал $\Omega$. Визначена в (21) матриця $\hat{M}(k)$ з урахуванням (27) набуде вигляду:

$$\hat{M}(k) = \left[ 1 + \frac{k\beta}{P}(Q-q) \right] \hat{I} + \frac{k\beta}{P}(1+q)\hat{E}. \tag{28}$$

Для матриці (28) [14,15,22] з точністю до лінійних за $n$ внесків знаходимо:

$$\det \hat{M}(k) \approx 1 + n\Big( \ln\big[1 + \frac{k\beta}{P}(Q-q)\big] + \frac{\frac{k\beta}{P}(1+q)}{1+\frac{k\beta}{P}(Q-q)} \Big). \tag{29}$$

Визначимо також лінійні внески за $n$ для величин $\Omega_0$, $\langle \mathcal{H}_0 \rangle_0$ і $\langle \mathcal{H} \rangle_0$. Враховуючи (29) і (22), отримаємо:

$$\Omega_0(\theta) \approx -\theta + n\Omega_0^{(1)}(\theta), \quad \Omega_0^{(1)}(\theta) = \frac{1}{2} P e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \Big( \ln\big[1 + \frac{k\beta}{P}(Q-q)\big] + \frac{\frac{k\beta}{P}(1+q)}{1+\frac{k\beta}{P}(Q-q)} \Big). \tag{30}$$

Із формул (23) і (30) маємо:

$$\langle \mathcal{H}_0 \rangle_0 \approx -\theta + n\langle \mathcal{H}_0 \rangle_0^{(1)}, \quad \langle \mathcal{H}_0 \rangle_0^{(1)} = \theta \frac{\partial \Omega_0^{(1)}(\theta)}{\partial \theta}. \tag{31}$$

Дещо складніше обчислити внесок величини $\langle \mathcal{H} \rangle_0$ для $n \approx 0$. Як випливає зі співвідношення додатку Б (формула (Б.2)), для обчислення зазначеного внеску достатньо розглянути величину:

$$\mathcal{B}(k) = \int D\pi\, \tilde{\psi}_1(k)^P. \tag{32}$$

Обернена матриця $M^{-1}(k)$, що міститься у (26), дорівнює [14,15,22]:

$$\hat{M}^{(-1)}(k) = m_1(k)\hat{I} + m_2(k)\hat{E}, \tag{33}$$

$$m_1(k) = \frac{1}{1+\frac{k\beta}{P}(Q-q)}, \; m_2(k) = -\frac{\frac{k\beta}{P}(1+q)}{[1+\frac{k\beta}{P}(Q-q)]^2}.$$

Тут елементи матриці наведені для $n \approx 0$. Відповідно для величин у формулі (26) отримаємо:

$$\langle 1|\hat{M}^{-1}(k)|1\rangle \approx n\, m_1(k),$$
$$\langle \pi|\hat{M}^{-1}(k)|\pi\rangle = m_1(k)\sum_a \pi_a^2 + m_2(k)\Big(\sum_a \pi_a\Big)^2. \quad (34)$$

Щоб проінтеґрувати за змінними $\{\pi_a\}$ у виразі (32), запишемо його так:

$$\mathcal{B}(k) \approx \frac{1}{2^P}\sum_{s=0}^{P} C_P^s \psi_1(s,k)\int D\pi\, \psi_2(s,k),$$
$$\psi_1(s,k) = e^{-\beta(P-s)/P\cdot n\, m_1(k)},$$
$$\psi_2(s,k) = e^{-\beta\, s/P\left[m_1(k)\sum_a \pi_a^2 + m_2(k)\left(\sum_a \pi_a\right)^2\right]}, \quad (35)$$

де $C_P^s$ — біноміальні коефіцієнти. Відтак лінеаризуємо доданок $\sim \left(\sum_a \pi_a\right)^2$, що міститься в експоненті (35), за допомогою інтеґрального перетворення:

$$e^{\frac{1}{2}x^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\rho^2 + \rho\, x}.$$

Після нескладних перетворень для $n \approx 0$ одержимо:

$$\mathcal{B}(k) \approx 1 + n\,\mathcal{B}^{(1)}(k),$$
$$\mathcal{B}^{(1)}(k) = -\frac{1}{2}\beta m_1(k) + \frac{1}{2^P}\sum_{s=0}^{P} C_P^s \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\ln\Phi(\rho,s), \quad (36)$$
$$\Phi(\rho,s) = \int_{-1}^{1}\frac{d\pi}{2}\exp\left(-\frac{\beta s}{P}m_1(k)\pi^2 + \sqrt{2\frac{\beta s}{P}|m_2(k)|}\,\rho\,\pi\right).$$

Підсумовуючи наведені викладки, для $\langle\mathcal{H}\rangle_0$ (25) отримаємо:

$$\langle\mathcal{H}\rangle_0 \approx -\theta + n\langle\mathcal{H}\rangle_0^{(1)},$$
$$\langle\mathcal{H}\rangle_0^{(1)} = -\theta e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}\mathcal{B}^{(1)}(k). \quad (37)$$

## V. ЗНАХОДЖЕННЯ ГРАНИЦІ $\beta \to \infty$

Згідно з формулою (A.3), визначмо послідовно внески від виразів (30), (31) і (37) для $\beta \to \infty$. Уведімо позначення:

$$F_0(\beta) = \frac{1}{\beta}\frac{N!}{2\pi i}\oint\frac{e^{\theta}\Omega_0^{(1)}(\theta)}{\theta^{N+1}}\, d\theta. \quad (38)$$

Оскільки вираз $\Omega_0^{(1)}(\theta)$ (формула (30)) представлений степеневим рядом за $\theta$, то контурний інтеґрал у (38) обчислюємо елементарно. В результаті маємо:

$$F_0(\beta) = \frac{\alpha N}{2\beta}\ln\big(1+\chi\big) + \frac{1}{2}\frac{N(1+q)}{1+\chi}. \quad (39)$$

Тут уведено позначення величини $\chi = \frac{\beta}{\alpha}(Q-q)$, що має зміст сприйнятливості [11,12]. Нагадаємо, що параметр $\alpha$ визначається співвідношенням $P = \alpha N$. У границі $\beta \to \infty$ отримаємо:

$$F_0 = \lim_{\beta\to\infty} F_0(\beta) = \frac{N}{2}\frac{1+q}{1+\chi}\,. \quad (40)$$

При одержанні (40) було враховано, що в границі $\beta \to \infty$ величина $\chi$ задається скінченною [11,12,14,16].

Для наступної складової маємо:

$$F_1(\beta) = -\frac{1}{\beta}\frac{N!}{2\pi i}\oint\frac{e^{\theta}\theta\partial\Omega_0^{(1)}(\theta)/\partial\theta}{\theta^{N+1}}\, d\theta\,. \quad (41)$$

Виконуючи нескладні перетворення, знайдемо:

$$F_1(\beta) = \frac{1}{2}\frac{N(N-1)(1+q)}{1+\chi(1-\frac{1}{N})} - \frac{1}{2}\frac{N^2(1+q)}{1+\chi}$$
$$- \frac{\alpha N^2}{2\beta}\ln\big(1+\chi\big) + \frac{\alpha N^2}{2\beta}\ln\left[1+\chi\left(1-\frac{1}{N}\right)\right]$$
$$\simeq -\frac{N}{2}\frac{1+q}{(1+\chi)^2} - \frac{N}{2}\frac{(Q-q)}{(1+\chi)}. \quad (42)$$

У границі $\beta \to \infty$ $(Q = q)$ отримаємо:

$$F_1 = \lim_{\beta\to\infty} F_1(\beta) = -\frac{N}{2}\frac{1+q}{(1+\chi)^2}. \quad (43)$$

Зауважимо, що в (42) враховано головні члени за $N$, при цьому величина $\chi/N$ розглядається як малий параметр. Як видно, перший доданок у (39) і другий у (42) не дають внеску у величину $F$ для $\beta \to \infty$, проте їх слід урахувати, щоб знайти систему рівнянь для екстремуму $F$ як функції $Q$, $q$.

Аналогічно позначимо:

$$F_2(\beta) = \frac{1}{\beta}\frac{N!}{2\pi i}\oint \frac{e^{\theta}\langle\mathcal{H}\rangle_0^{(1)}}{\theta^{N+1}}\,d\theta\,. \tag{44}$$

Необхідні обчислення наведені в додатку B. У результаті внесок (44) запишемо у вигляді:

$$F_2 = \lim_{\beta\to\infty} F_2(\beta) = \frac{N}{2}\frac{1}{1+\chi} + \frac{N\mathcal{K}(q)}{1+\chi}\,. \tag{45}$$

Підсумовуючи формули (40), (43) і (45), одержимо вираз для шуканого мінімуму:

$$F/N = \frac{2+q}{2(1+\chi)} - \frac{1+q}{(1+\chi)^2} + \frac{\mathcal{K}(q)}{1+\chi}\,. \tag{46}$$

## VI. СИСТЕМА РІВНЯНЬ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ

Параметри $Q, q$ визначаємо з умови екстремуму $F(\beta)$:

$$F(\beta) = F_0(\beta) + F_1(\beta) + F_2, \tag{47}$$

де складові в правій частині (47) задаємо виразами (39), (42) і (45). При цьому зручно вважати $F(\beta)$ функцією змінних $\chi, Q, q$ і використати похідну складної функції:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F(\beta)}{\partial Q} + \frac{\partial F(\beta)}{\partial \chi}\frac{\beta}{\alpha} = 0,\\
&\frac{\partial F(\beta)}{\partial q} + \frac{\partial F(\beta)}{\partial \chi}\Big(-\frac{\beta}{\alpha}\Big) = 0.
\end{aligned} \tag{48}$$

На основі рівнянь (48) маємо:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F(\beta)}{\partial Q} + \frac{\partial F(\beta)}{\partial q} = 0,\\
&\frac{\partial F(\beta)}{\partial Q}Q + \frac{\partial F(\beta)}{\partial q}q + \frac{\partial F(\beta)}{\partial \chi}\chi = 0.
\end{aligned} \tag{49}$$

Підставляючи явний вигляд $F(\beta)$ у рівняння (49), після нескладних перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\chi = -\frac{2d\mathcal{K}(q)/dq}{1+2d\mathcal{K}(q)/dq},\\
&4(1+q)\,d\mathcal{K}(q)/dq + q - 2\mathcal{K}(q) = 0\,.
\end{aligned} \tag{50}$$

При одержанні другого рівняння (50) було враховано також, що $Q = q$ для $\beta \to \infty$. Враховуючи рівняння (50), вираз для мінімуму (46) перетворимо до вигляду:

$$F/N = \frac{1+q}{4}\big(1 + 2\,d\mathcal{K}(q)/dq\big)^2. \tag{51}$$

Підставляючи вираз для $\mathcal{K}(q)$ (B.12) і виконуючи необхідні обчислення, які ми опускаємо, отримаємо для сприйнятливості:

$$\chi = \frac{\mathrm{erf}\big(\sqrt{\frac{\alpha}{2(1+q)}}\big)}{\alpha - \mathrm{erf}\big(\sqrt{\frac{\alpha}{2(1+q)}}\big)} \tag{52}$$

та мінімуму:

$$F/N = \frac{1+q}{2\,\alpha^2}\Big[\alpha - \mathrm{erf}\Big(\sqrt{\frac{\alpha}{2(1+q)}}\Big)\Big]^2, \tag{53}$$

де $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ — функція похибок. Рівняння для визначення параметра $q$, отриманого з (50), не наводимо через певну громіздкість. Зазначимо також, що одержані вирази збігаються з результатами праці [22], отриманими варіаційним методом із використанням апроксимації (10).

Наведені вирази (52) і (53) містять відомий висновок про фазовий перехід у моделі з порушенням симетрії. Для $\alpha_c \simeq 0.3374$ сприйнятливість $\chi \to \infty$ та $F = 0$. Тобто, для $\alpha \leqslant \alpha_c$ мінімум $F = 0$ і при $\alpha > \alpha_c$ – $F > 0$.

## ВИСНОВКИ

У цій статті розглянуто оптимізаційну задачу у відомій моделі minority game. Оптимізаційну задачу досліджують методами статистичної фізики, де шуканий мінімум визначається як основний стан гамільтоніана, що, відповідно, дорівнює вільній енерґії для нульової температури або оберненої величини $\beta \to \infty$. В оригінальних працях при розрахунку статсуми використовували розклад за параметром $\beta/P$, який вважався малим для $P \gg 1$. Як зазначено у вступі, таке наближення є очевидним у тому разі, якщо спочатку розглядати границю $P \gg 1$ для фіксованого значення $\beta$, проте перестає бути обґрунтованим при зміні порядку виконання границь.

Щоб знайти відповідь на це запитання, оптимізаційну задачу досліджували за допомогою варіаційного методу в межах великої статистичної суми. На відміну від праці [22], у цьому підході не використовували розкладу за параметром $\beta/P$. Також у запропонованій схемі розрахунку спочатку виконується границя $\beta \to \infty$, а відтак — $P \gg 1$. У наближенні симетричних реплік отримано залежність мінімуму від параметра $\alpha$, що збігається з результатом оріґінальних праць і відповідно з роботою [22]. Це дозволяє стверджувати, що отриманий результат не залежить від порядку виконання границь за параметрами $\beta$ та $P$ і тим самим є можливий розклад за параметром $\beta/P$.

На завершення зазначимо, що відповідним вибором варіаційної матриці $Q$ можна розглянути також випадок із порушенням реплічної симетрії.

## ДОДАТОК А. ЗВ'ЯЗОК МІНІМУМУ З ПОТЕНЦІАЛОМ $\Omega$

Зауважимо, що, виходячи зі змісту методу реплік, для $n \approx 0$ статсуму $Z_N$ (8) запишемо у вигляді:

$$Z_N \approx \bar{Z}_N^n.$$

Тоді на основі (14) отримаємо:

$$\Xi(\theta) \approx \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\theta^N}{N!}(1 + n\ln(\bar{Z}_N))$$

або

$$\Omega(\theta) \approx -\theta - ne^{-\theta} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\theta^N}{N!} \ln(\bar{Z}_N). \tag{A.1}$$

Із формули (A.1) випливає розклад для потенціалу $\Omega(\theta)$ для $n \approx 0$:

$$\begin{aligned} &\Omega(\theta) \approx \Omega^{(0)}(\theta) + n\Omega^{(1)}(\theta), \\ &\Omega^{(0)}(\theta) = -\theta, \;\; \Omega^{(1)}(\theta) = -e^{-\theta} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\theta^N}{N!} \ln(\bar{Z}_N). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Із формули (A.2) знаходимо:

$$\ln(\bar{Z}_N) = -\frac{N!}{2\pi i} \oint \frac{e^{\theta}\Omega^{(1)}(\theta)}{\theta^{N+1}} d\theta\,.$$

У результаті для шуканого мінімуму (8) одержимо співвідношення:

$$F = \lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \frac{N!}{2\pi i} \oint \frac{e^{\theta}\Omega^{(1)}(\theta)}{\theta^{N+1}} d\theta. \tag{A.3}$$

## ДОДАТОК Б. ФОРМУЛИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ВНЕСКІВ ДЛЯ $n \approx 0$

У ряді випадків виникає необхідність обчислити внески таких виразів:

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} A(k)B(k)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} A(k)} \tag{Б.1}$$

для $n \approx 0$, якщо:

$$A(k) \approx 1 + nA^{(1)}(k), \; B(k) \approx 1 + nB^{(1)}(k).$$

Елементарними перетвореннями можна показати, що наявне співвідношення:

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} A(k)B(k)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} A(k)} \approx 1 + ne^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} B^{(1)}(k). \tag{Б.2}$$

## ДОДАТОК В. ОБЧИСЛЕННЯ СКЛАДОВОЇ $F_2$

Підставляючи в (44) вираз (37), отримаємо:

$$F_2(\beta) = -\frac{1}{\beta} N \mathcal{B}^{(1)}(N-1) \approx -\frac{1}{\beta} N \mathcal{B}^{(1)}(N), \tag{B.1}$$

де, згідно з (36):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}^{(1)}(N) = -\frac{\beta}{2}\frac{1}{1+\frac{\beta}{\alpha}(Q-q)} + \frac{1}{2^P}\sum_{s=0}^{P} C_P^s \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\ln\Phi(\rho,s),\\
&\Phi(\rho,s) = \int_{-1}^{1}\exp\left(-\beta\varphi(\pi)\right)d\pi,\\
&\varphi(\pi) = \frac{s}{P}\frac{\pi^2}{1+\frac{\beta}{\alpha}(Q-q)} - \frac{1}{1+\frac{\beta}{\alpha}(Q-q)}\sqrt{\frac{2s}{P}\frac{1+q}{\alpha}}\pi\rho.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Щоб знайти границю $F_2(\beta)$ для $\beta\to\infty$, розгляньмо величину $\Phi(\rho,s)$. Асимптотику відповідного інтеґрала за змінною $\pi$ визначаємо методом Лапласа. Для цього знаходимо точку мінімуму функції $\varphi(\pi)$:

$$\frac{\partial\varphi(\pi)}{\partial\pi} = 0. \tag{B.3}$$

Одержимо:

$$\pi_0 = \rho/\rho_0, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{2\,s}{N(1+q)}}. \tag{B.4}$$

У інтеґралі за $\rho$ зручно зробити заміну змінної $\rho\to\rho\,\rho_0$. У результаті $\varphi(\pi)\to\tilde{\varphi}(\pi)$:

$$\tilde{\varphi}(\pi) = \frac{s}{P}\frac{1}{\chi}(\pi^2 - 2\pi\rho). \tag{B.5}$$

Легко бачити, що мінімум функції $\tilde{\varphi}(\pi)$ досягається в точці:

$$\pi_0(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho > 1;\\ \rho, & |\rho| < 1;\\ -1, & \rho < -1. \end{cases} \tag{B.6}$$

У результаті для $\beta\to\infty$ отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\ln\Phi(\rho,s) \approx -\beta\rho_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\tilde{\varphi}(\pi)\\
&= -\beta\frac{2s}{P}\Big(1/2 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_0^2}}{\rho_0} - \rho_0\int_0^1 (1+\rho^2)e^{-\frac{1}{2}(\rho\rho_0)^2}d\rho\Big).
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Наступним кроком підставимо (B.7) у (B.2) і визначимо асимптотику відповідних сум для $P\gg 1$. Зокрема,

$$\frac{1}{2^P}\sum_{s=1}^{P} C_P^s s = \frac{P}{2}.$$

Наступні суми мають вигляд:

$$\frac{1}{2^P}\sum_{s=1}^{P} C_P^s\, s^{\nu} e^{-sB/N}, \quad \nu = 1/2,\, 3/2, \tag{B.8}$$

де величина $B$ обмежена. У формулі (B.8) зручно перейти до цілого степеня змінної $s$, використовуючи інтеґральне представлення 1:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = 1\,.$$

Виконуючи також заміну змінної $t \to \sqrt{s}\, t$, для сум (B.8) отримаємо:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{2^P} \sum_{s=1}^{P} C_P^s\, s^l e^{-s(t^2+B/N)} dt, \quad l = 1,\, 2. \tag{B.9}$$

Використовуючи диференціювання за параметром, вираз (B.9) запишемо так:

$$\begin{aligned}
&(-N)^l \frac{d^l}{dB^l} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{2^P} \sum_{s=1}^{P} C_P^s e^{-s(t^2+B/N)} dt = (-N)^l \frac{d^l}{dB^l} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{2^P} \Big[ \Big( 1 + e^{(-t^2-B/N)} \Big)^P - 1 \Big] dt \\
&= (-N)^l \frac{d^l}{dB^l} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{Pt^2}{2^{P-1}} \Big[ \Big( 1 + e^{(-t^2-B/N)} \Big)^{P-1} e^{(-t^2-B/N)} \Big] dt \\
&\approx (-N)^l \frac{d^l}{dB^l} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty 2Pt^2 e^{P \ln(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t^2})} \exp\Big( -\alpha \frac{e^{-t^2}}{1+e^{-t^2}} B \Big) \frac{e^{-t^2}}{1+e^{-t^2}} dt.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

При отриманні (B.10) використано наближену рівність $(1 + a/P)^P \approx \exp(a)$, де $P \gg 1$ і $a$ обмежена величина. Інтеґрал в (B.10) для $P \gg 1$ обчислюємо методом Лапласа, оскільки функція

$$\ln\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t^2} \right)$$

досягає максимуму при $t = 0$. У результаті для сум (B.8) маємо головний внесок для $P \gg 1$:

$$\frac{1}{2^P} \sum_{s=0}^{P} C_P^s\, s^\nu e^{-sB/N} \approx (-N)^l \frac{d^l}{dB^l} \sqrt{\frac{2}{P}} e^{-\frac{1}{2}\alpha B}, \tag{B.11}$$

де є відповідність: $\nu = 1/2 \to l = 1$; $\nu = 3/2 \to l = 2$. Використовуючи наведені асимптотичні формули для величини $\mathcal{B}^{(1)}(N)$, одержимо вираз:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^{(1)}(N) &\approx -\frac{\beta}{2} \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\alpha}(Q-q)} + \frac{\beta \mathcal{K}(q)}{1 + \frac{\beta}{\alpha}(Q-q)}, \\
\mathcal{K}(q) &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1+q}{\alpha}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{1+q}} - \sqrt{\frac{\alpha}{1+q}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (1+\rho^2) e^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha\rho^2}{1+q}} d\rho.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Наявний інтеґрал за змінною $\rho$ в (B.12) виражається через функцію похибок, однак відповідний вираз занадто громіздкий, тому його не наводимо. Підставляючи (B.12) у (B.1), приходимо до формули (45).

---


[1] I. Kondor, J. Krtesz, *Econophysics: An Emerging Science* (Kluwer, Dordrecht, 1999).

[2] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambrige University Press, 1999).

[3] N. Hidetoshi, *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing An Introduction,* (Clarendon Press, Oxford, 2001).

[4] G. Parisi, preprint cond-mat/0301157 (2003).

[5] O. Dubois, R. Monasson, B. Selman, R. Zecchina, Theoret. Comp. Sci. **265**, 1 (2001).

[6] Р. Фейнман, *Статистическая механика* (Мир, Москва, 1975).

[7] К. Хуанг, *Статистическая механика* (Мир, Москва, 1966).

[8] D. S. Dean, D. Lancaster, preprint cond-mat/9606033 (1996).

[9] D. Malzahn, M. Opper, J. Stat. Mech. **11**, P11001 (2005).

[10] E. Kritchevski, S. Starr, preprint math-ph/0505001 (2005).

[11] D. Challet, Y. C. Zhang, Physica A **246**, 407 (1997).

[12] D. Challet, Y. C. Zhang, Physica A **256**, 514 (1998).

[13] R. Savit, R. Manuca, R. Riolo, Phys. Rev. Lett. **82**, 2203 (1999).

[14] D. Challet, M. Marsili, R. Zecchina, Phys. Rev. Lett. **84**, 1824 (2000); preprint cond-mat/9904392 (1999).

[15] D. Challet, M. Marsili, R. Zecchina, Physica A **280**, 522 (2000); cond-mat/9901243 (1999).

[16] A. De Martino, M. Marsili, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 2525 (2001); preprint cond-mat/0007397.

[17] D. Challet, A. Chessa, M. Marsili, Y.-C. Zhang, Quantitative Finance **1**, 168 (2001); preprint cond-mat/0011042 (2000).

[18] Y.-C. Zhang, Physica A **269**, 30 (1999); preprint cond-mat/9901243 (1999).

[19] A. C. C. Coolen, *The Mathematical Theory of Minority Games. Statistical mechanics of interacting agents* (Oxford, University Press, 2005).
[20] В. Янішевський, Журн. фіз. досл. **13**, 3602 (2009).
[21] O. C. Martin, R. Monasson, R. Zecchina, Theor. Comput. Sci. **265**, 3 (2001).
[22] Л. Блажиєвський, В. Янішевський, Журн. фіз. досл. **13**, 2601 (2009).

## TO THE OPTIMIZATION PROBLEM IN THE MINORITY GAME MODEL

V. Yanishevsky
*Ivan Franko State Pedagogical University of Drohobych*
*46, Lesja Ukrajinka St., Drohobych, UA–82100, Ukraine*

The optimization problem in the minority game model was investigated using a variational technique that is based on the logarithmic grand-canonical partition function inequality. In the introduced approach the $\beta/P$ parameter expansion is not used as in the original papers. Fundamental relations were obtained in replica symmetric approximation for the minimum of the investigated variable as well as a system of equations for variational parameters. It was shown that the obtained results coincide with the results of the original papers.