ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 16, № 3 (2012) 3001(4 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 16, No. 3 (2012) 3001(4 p.)

ЕФЕКТ КАЗИМИРА В ЕЛЕКТРОДИНАМІЦІ ПОДОЛЬСЬКОГО

М. Блажиєвська
Кафедра теоретичної фізики, Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна

(Отримано 23 травня 2012 р.; в остаточному вигляді — 27 червня 2012 р.)

Досліджено ефект Казимира на основі узагальненої електродинаміки Подольського. Знайдено вирази для густини енерґії та сили Казимира в одновимірному та тривимірному випадках. Показано, що доданок, спричинений наявністю параметра Подольського, має характер поправки.

Ключові слова: електродинаміка Подольського, енерґія Казимира, сила Казимира, хвильове рівняння.

PACS number(s): 03.65.Ge, 03.70.+k, 12.20.−m

I. ВСТУП

У класичній електродинаміці ми стикаємося із синґулярністю r^{-1}, яка приводить до безмежної величини власної енерґії електрона. Тому велике зацікавлення викликають теорії, у яких вдається оминути цю проблему. Такою теорією є електродинаміка з вищими похідними. Першою моделлю польової теорії з похідними вищого порядку є узагальнення електромагнітного поля, запропоноване в роботах Подольського, Шведа й Кікучі [1–4]. У цих працях було узагальнено теорію Максвелла–Лоренца введенням у лаґранжіан доданків, квадратичних за напруженостями та за похідними від напруженостей електричного й магнітного полів. Теорія Подольського має багато цікавих особливостей уже на класичному рівні. Вона розв'язує проблему безмежної енерґії в електростатичному випадку, дає скінченний вираз для самодії заряджених частинок на коротких відстанях, розв'язуючи тим самим проблему синґулярності $r \to 0$. Класичну електродинаміку Подольського можна розглядати як ефективну теорію, де введене обрізання a через квантові процеси на малих відстаннях (при великих імпульсах). Якщо відстані більші за a, то маємо звичайну класичну електродинаміку.

За останні кілька років з'явилося багато праць, присвячених різним аспектам електродинаміки Подольського. Зокрема можна відзначити експериментальну роботу [5] з вимірювань параметра Подольського a та маси фотона. Питання про квантування електромагнітного поля в теорії Подольського та калібрувальні умови порушено в [6]. Відзначимо роботи [7, 8], де показано, що деформація алґебри Гайзенберґа і використання формалізму з вищими похідними приводить до однакової структури рівнянь Максвелла.

Одним із проявів існування нульових коливань поля є ефект Казимира [9]. Його суть полягає у взаємному притяганні провідних незаряджених тіл під дією квантових флуктуацій у вакуумі. Найчастіше йдеться про дві паралельні дзеркальні поверхні, що розташовані на близькій відстані, проте ефект Казимира існує і при складнішій геометрії. Ефект передбачив голландський фізик Хендрік Казимир (Hendrik Casimir, 1909–2000) у 1948 році, а пізніше підтвердили експериментально.

Тривалий час праця Казимира була майже невідомою. Але починаючи з 1970-х років, цей ефект зацікавив широке коло науковців. Проведено багато нових високоточних експериментів на вимірювання сили Казимира. У теоретичних пошуках значного прогресу досягнуто в дослідженнях структури розбіжностей в узагальненому неплоскому просторі та в обчисленні ефекту зі складнішою геометрією, а також при наявності різних граничних умов, включаючи реальну структуру границь [10]. Зокрема в праці [11] обчислено поправку до сили Казимира, що виникає у зв'язку з наявністю мінімальної довжини. Виявилося, що така поправка має протилежний знак до стандартної сили Казимира, тобто по суті є відштовхувальною силою, що забезпечує бажану стабільність системи двох пластин. Можна вважати, що мінімальна довжина діє подібно до природного обрізаючого фактора, який послаблює внески від небажаних великих імпульсів [11, 12]. Застосований підхід до квантування електромагнітного поля, який базується на побудові максимально локалізованих станів, дав змогу обчислити поправку до енерґії Казимира, зумовлену мінімальною довжиною. Розглянуто кілька моделей узагальненого співвідношення невизначеності [13]. Цікаво, що для всіх моделей поправки до сили Казимира мають притягальний характер. Сильні обмеження на потенціал типу Юкави при короткосяжній взаємодії отримано в роботі [15] із використанням результатів вимірювання нормальної сили Казимира між сферою і пластиною з трапецієподібними гофрами. Найближчим часом очікується поліпшення досягнутих результатів від вимірювання сили Казимира в конфіґурації з гофрованою границею та в циліндричній геометрії. На прикладі простої конфігурації — ефект Казимира між сферою і площиною — досліджено нетривіальність залежності ефекту Казимира від геометрії простору, його зв'язок із наслідками недосконалості відбивання та температурою [14]. При кімнатній температурі навколишнього середовища зв'язок між впливом геометрії та температурою може привести до відштовхуючого внеску теплових фотонів у силу Казимира й до неґативного значення ентропії.

Підсумовуючи все сказане бачимо, що ефект Казимира викликає на сьогодні велике зацікавлення й досить широко застосовується. У цій праці обчислено силу Казимира на основі співвідношень узагальненої електродинаміки Подольського. Отримано вирази для густини енергії та сили Казимира в одновимірному та тривимірному просторах. Показано, що доданок, який містить параметр Подольського a, має характер поправки і зникає при $a \to 0$.

II. ЕФЕКТ КАЗИМИРА В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ЕЛЕКТРОДИНАМІЦІ ПОДОЛЬСЬКОГО

Візьмімо за основу узагальнену електродинаміку Подольського та обчислімо силу притягання, що виникає в просторі між двома паралельними пластинами, тобто силу Казимира. Розв'язок хвильового рівняння для векторного потенціалу

$$(1 - a^2\Box)\Box\mathbf{A} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

де $\Box = \Delta - (1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)$ — оператор д'Аламбера, складатиметься з двох гілок [2]:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = N\sum_{\mathbf{k}}\left[\mathbf{A}(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr}) + \mathbf{A}^*(\mathbf{k})\exp(-i\mathbf{kr})\right]\\ + N\sum_{\mathbf{k}}\left[\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr}) + \tilde{\mathbf{A}}^*(\mathbf{k})\exp(-i\mathbf{kr})\right],\end{aligned} \tag{2}$$

де $\mathbf{k}$ — хвильовий вектор ($k_i = \pi n/l$), N — константа, уведена для зручності, $\mathbf{A}(\mathbf{k})$, $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k})$ — Фур'є-амплітуди векторного потенціалу:

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) \sim e^{-i\omega t};\ \mathbf{A}^*(\mathbf{k}) \sim e^{i\omega t};\ \omega = c|k| \tag{3}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) \sim e^{-i\tilde{\omega} t};\ \tilde{\mathbf{A}}^*(\mathbf{k}) \sim e^{i\tilde{\omega} t};\ \tilde{\omega} = c\sqrt{1/a^2 + k^2}. \tag{4}$$

Скористаймося загальною схемою квантування електромагнітного поля в узагальненій електродинаміці Подольського [2,4] і в результаті отримаємо вираз для енергії основного (вакуумного) стану поля:

$$E_0 = \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\hbar\omega(k) + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\hbar\tilde{\omega}(k). \tag{5}$$

Тепер знайдімо зміну густини енергії нульових коливань електромагнітного поля при введенні на віддалі l двох плоско-паралельних площин, які обмежують поле.

A. Ефект Казимира в одновимірному просторі

Енерґія нульових коливань у границі нескінченного об'єму $L \to \infty$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{01} &= \sum_k \frac{\hbar W_k}{2} = \frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hbar\omega(k)}{2}dk = \frac{L\hbar c}{2\pi}\int_0^{+\infty} k\,dk\\ \mathcal{E}_{02} &= \sum_k \frac{\hbar\tilde{\omega}(k)}{2} = \frac{L\hbar c}{2\pi}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{1}{a^2} + k^2}\,dk\end{aligned} \tag{6}$$

Якщо поле обмежене в просторі між точками $x = 0$ та $x = l$, то векторний потенціал A в цих точках дорівнює нулеві і тоді $k = \pi n/l$. Тепер енерґія нульових коливань

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \sum_k \frac{\hbar\omega(k)}{2} = \frac{\hbar\pi c}{2l}\sum_{n=1}^{\infty} n,\\ \mathcal{E}_2 &= \sum_k \frac{\hbar\tilde{\omega}(k)}{2} = \frac{\hbar c}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}}.\end{aligned} \tag{7}$$

Різниця густин енерґій (7) та (6) є енерґією поляризації вакууму та називається енерґією Казимира

$$\epsilon_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{l} - \frac{\mathcal{E}_{01}}{L} = \frac{\hbar\pi c}{2l^2}\sum_{n=1}^{\infty} n - \frac{\hbar c}{2\pi}\int_0^{+\infty} k\,dk, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{l} - \frac{\mathcal{E}_{02}}{L} = \frac{\hbar c}{2l}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}}\\ - \frac{\hbar c}{2\pi}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{1}{a^2} + k^2}\,dk.\end{aligned} \tag{9}$$

Різниця (8) дає добре відому звичайну енерґію Казимира:

$$\epsilon_1 = -\frac{1}{24}\frac{\hbar c\pi}{l^2}. \tag{10}$$

Для обчислення суми у виразі (8) скористаймося формулою Абеля–Плани

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x)dx + i\int_0^{\infty}\frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1}dt. \tag{11}$$

Другий доданок в (11) скорочується з інтеґральним доданком у (8). Також візьмімо до уваги, що при обході точок розгалуження $t_{1,2} = \pm iA$ функції $f(t) = \sqrt{A^2 + t^2}$ матимемо таке співвідношення:

$$f(it) - f(-it) = 2i\sqrt{t^2 - A^2} \qquad (t \geq A).$$

Тепер наша сума набуде вигляду

$$\frac{\hbar c}{2l}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}} = \frac{\hbar c}{4al} - \frac{\hbar c\pi}{l^2}\int_{l/a\pi}^{\infty}\frac{\sqrt{t^2 - (l/a\pi)^2}}{e^{2\pi t} - 1}dt.$$

Після нескладних математичних обчислень отримаємо для густини енерґії Казимира

$$\begin{aligned}\epsilon_2 = \frac{\hbar c}{4la} - \frac{\hbar c}{8l\sqrt{\pi al}}e^{-2l/a}\\ \times\left(1 + \frac{3}{2}\frac{a}{4l} - \frac{15}{32}\left(\frac{a}{4l}\right)^2 + \frac{35}{128}\left(\frac{a}{4l}\right)^3 + \ldots\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Можемо тепер обчислити силу Казимира

$$\begin{aligned}F = -\frac{\partial(\epsilon l)}{\partial l} = -\frac{1}{24}\frac{\hbar c\pi}{l^2}\\ - \frac{\hbar c}{16l\sqrt{\pi al}}e^{-2l/a}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{a}{4l} - \frac{15}{32}\left(\frac{a}{4l}\right)^2 + \ldots\right)\end{aligned} \tag{13}$$

Як бачимо, другий доданок у (13) зникає при $a \to 0$.

B. Ефект Казимира в тривимірному просторі

Для першої гілки будемо матимемо звичайну енерґію Казимира

$$\epsilon_1 = \frac{1}{l}\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hbar c}{2}\sqrt{k_x^2+k_y^2+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} - \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_y \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{\hbar c}{2}\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 l^4}. \quad (14)$$

Обчислюючи енерґію Казимира для другої гілки коливань, виконаймо спершу інтеґрування за $q = \sqrt{k_x^2+k_y^2}$ при деякому сталому значенні верхньої межі інтеґрування q, опісля порахуємо суми, а на останок знайдімо границю $q \to \infty$.

$$\epsilon_2 = \lim_{q\to\infty}\left[\frac{\hbar c}{6\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\left(q^2+\frac{1}{a^2}+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)^{3/2} - \frac{\hbar c}{6\pi^2}\int_0^{\infty}\left(q^2+\frac{1}{a^2}+k_z^2\right)^{3/2} dk_z\right] - \frac{\hbar c}{6\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a^2}+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)^{3/2} + \frac{\hbar c}{6\pi^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{a^2}+k_z^2\right)^{3/2} dk_z. \quad (15)$$

Тепер для переходу від сум до інтеґралів скористаймося формулою Абеля–Плани (11). Перший інтеґрал у формулі Абеля–Плани точно скорочує інтеґрал за k_z, а обчислення другого інтеґралу дає

$$\epsilon_2 = \frac{\hbar c}{6\pi l}\lim_{q\to\infty}\left[\frac{1}{2a^3} - \frac{3\pi^3}{2l^3}\sqrt{\frac{\pi}{4l\sqrt{q^2+\frac{1}{a^2}}}}e^{-2l\sqrt{q^2+1/a^2}}\left(1+\frac{15}{16}\frac{1}{l\sqrt{q^2+1/a^2}}+\frac{105}{512}\frac{1}{l^2(q^2+1/a^2)}+\ldots\right)\right] - \frac{\hbar c}{6\pi l}\left[\frac{1}{2a^3} - \frac{3}{4a^3}\left(\frac{a}{l}\right)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-2l/a}\left(1+\frac{15}{16}\frac{a}{l}+\frac{105}{512}\frac{a^2}{l^2}+\ldots\right)\right]. \quad (16)$$

Як бачимо, границя $q \to \infty$ дорівнює $1/2a^3$. І остаточно маємо для густини енерґії Казимира у тривимірному випадку

$$\epsilon = -\frac{\hbar c\pi^2}{720 l^4} - \frac{\hbar c}{8la^3}\left(\frac{a}{\pi l}\right)^{3/2} e^{-2l/a}\left(1+\frac{15}{16}\frac{a}{l}+\frac{105}{512}\frac{a^2}{l^2}+\ldots\right). \quad (17)$$

І сила Казимира

$$F = \frac{\hbar c\pi^2}{240 l^4} + \frac{27\hbar c}{64\pi l a^3}\left(\frac{a}{\pi l}\right)^{3/2} e^{-2l/a}\left(1+\frac{235}{288}\frac{a}{l}+\frac{245}{1152}\frac{a^2}{l^2}+\ldots\right) \quad (18)$$

III. ВИСНОВКИ

У цій статті в межах узагальненої електродинаміки Подольського отримано вираз для енерґії елктромагнітного поля, яка складається з двох доданків. Перший доданок — енерґія "звичайного" електромагнітного поля, другий назвемо енерґією "незвичайного" поля. Саме в другому доданку міститься залежність від параметр Подольського a. На основі виразу для енерґії електромагнітного поля пораховано густину енерґії та силу Казимира в одновимірному та тривимірному випадках.

Як бачимо, сила Казимира складається з двох доданків. Перший отримуємо зі звичайної гілки коливань, і він є добре відомою силою Казимира. Другий доданок отриманий із "незвичайної" гілки коливань, тобто з тої гілки, де наявний параметр Подольського a. Обчисливши границю при $a \to 0$, ми бачимо, що другий доданок у виразі для сили зникає. Тобто, якщо нема параметра Подольського (розглядаємо звичайну електродинаміку), то отримаємо відомий результат. Для простоти введемо знерозмірену довжину $l = ax$. Тоді вираз для сили Казимира матиме вигляд:

$$F = \frac{\hbar c}{a^4}[f_1+f_2], \quad (19)$$

де

$$f_1 = \frac{\pi^2}{240}\frac{1}{x^4};$$
$$f_2 = \frac{27}{64\pi^{5/2}}\frac{1}{x^{5/2}}e^{-2x}.$$

Якщо тепер узяти відношення "незвичайної" сили Казимира до "звичайної" f_2/f_1, то легко бачити, що завжди виконуватиметься нерівність $f_2/f_1 < 1$. Це означає, що доданок f_1, який є "звичайною" силою Казимира, завжди більший за доданок f_2, залежний від параметра Подольського a. А з цього випливає, що головний внесок маємо від "звичайної" сили Казимира, а другий доданок, який ми назвали "незвичайною" силою Казимира, є поправкою. Якщо розв'язати задачу на екстремум функції f_2/f_1, то можемо побачити, що це відношення набуває максимального значення $f_2/f_1 = 0.03$ в точці $x = 0.75$. Тобто "незвичайна" сила Казимира f_2 становить менше 3% від "звичайної" сили Казимира f_1. А це попадає в межі похибки вимірювань [17–19] для діапазону відстаней між пластинами l від 160 нм до 750 нм.

На завершення кілька слів скажемо про числове значення параметра Подольського a. Можна відзначити працю [5], у якій автори спершу розглядали можливість використати експерименти на йонному інтерферометрі [20] для вимірювання параметра Подольського a. Проте, було показано, що точності цього експерименту недостатньо, щоб визначити a. Автори дійшли висновку, що a має бути малим, бо в протилежному випадку істотний вплив матимуть додаткові доданки Подольського в лаґранжіані електромагнітного поля. Такі масштаби довжин установлено, наприклад, для спектроскопії атома водню. Наступним етапом роботи [5] було дослідження впливу електростатичного потенціалу Подольського на основний стан атома водню, і в результаті отримано верхню межу для параметра Подольського $a \leq 5.56$ фм. Таке обмеження, із квантовомеханічних міркувань, установлює високу енерґетичну шкалу для маси фотона $m_\gamma > 35.51$ eV. Отже, якщо модель Подольського правильна, то відхилення від електродинаміки Максвела спостерігаємо лише для високих енерґій, доступних тільки на прискорювачах частинок. У роботі [16] досліджували поширення хвиль у вакуумі в межах реґуляризованої електродинаміки Подольського. Виявлено два види хвиль: звичайні недисперсійні хвилі з $k = \omega/c$ і дисперсійні, які поширюються при високих частотах і загасають при низьких. У межах класичної ефективної теорії цей результат інтерпретується як плазмоподібна поведінка квантового поляризованого вакууму. Відповідно, параметр Подольського у високочастотній гілці коливань був оцінений як приблизно рівний комптонівській довжині хвилі $a \approx \lambda_C = \hbar/mc$. У квантовій теорії ці результати можна тлумачити як ознаку існування двох збуджень в електродинаміці Подольського, які відповідають двом знайденим видам хвиль: безмасовим фотонам і масивним нейтральним бозонам.

IV. ПОДЯКИ

Автор висловлює щиру подяку І. О. Вакарчукові, В. М. Ткачукові та Ю. С. Криницькому за цінні поради і плідні дискусії.

[1] B. Podolsky, Phys. Rev. **62**, 68 (1942).
[2] B. Podolsky, C. Kikuchi, Phys. Rev. **65**, 228 (1944).
[3] B. Podolsky, C. Kikuchi, Phys. Rev. **67**, 184 (1945).
[4] B. Podolsky, Ph. Schwed, Rev. Mod. Phys. **20**, 40 (1948).
[5] R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo, L. G. Medeiros, P. J. Pompeia, Int. J. Mod. Phys. A **26**, 3641 (2011).
[6] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, G. E. R. Zambrano, J. Math. Phys. **52**, 102902 (2011).
[7] В. М. Ткачук, Журн. фіз. досл. **11**, 41 (2007).
[8] S. K. Moayed, M. R. Setare, H. Moayeri, Europhys. Lett. **98**, 50001 (2012).
[9] H. B. G. Gasimir, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
[10] M. Bordag, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, (2001).
[11] Kh. Nouicer, J. Phys. A **38**, 10027 (2005).
[12] U. Harbach, S. Hossenfelder, Phys. Lett. B **632**, 379 (2005).
[13] A. M. Frassino, O. Panella, Phys. Rev. D **85**, 045030 (2012).
[14] A. Canaguier-Durand, R. Guérout, P. A. Maia Neto, A. Lambrecht, S. Reynaud, Int. J. Mod. Phys.: Conf. Ser. **14**, 250 (2012).
[15] V. M. Mostepanenko, V. B. Bzerra, G. L. Klimchitskaya, C. Romero, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1260015 (2012).
[16] R. Baginski, B. Santos, Mod. Phys. Lett. A **26**, 1909 (2011).
[17] A. Lanbrecht, S. Reynaud, in *Poincaré Seminar 2002*, edited by B. Duplantier and V. Rivasseau (Birkhäuser, 2003), p. 109.
[18] G. L. Klimchitskaya *et al.*, J. Phys. A **39**, 6485 (2006).
[19] V. M. Mostepanenko, J. Phys.: Conf. Ser. **161**, 012003 (2009).
[20] B. Neyenhuis, D. Christensen, D. S. Durfee, Phys. Rev. Lett. **99**, 200401 (2007).

THE CASIMIR EFFECT IN THE ELECTRODYNAMICS OF PODOLSKY

M. Blazhyevska
Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,
12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine

The Casimir effect on the basis of generalized electrodynamics of Podolsky is studied. The expressions for the energy density and the Casimir force in one-dimensional and three-dimensional cases were obtained. It was shown that the term caused by the presence of the Podolsky parameter has the nature of the correction.