ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 16, № 4 (2012) 4101(8 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 16, No. 4 (2012) 4101(8 p.)

ВАЖКІ КВАРКОНІЇ В РЕЛЯТИВІЗОВАНІЙ ПОТЕНЦІАЛЬНІЙ МОДЕЛІ

С. С. Піх
Кафедра теоретичної фізики, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Драгоманова, 12, м. Львів, 79005
(Отримано 28 серпня 2011 р.; в остаточному вигляді — 25 грудня 2012 р.)

На основі формалізму Солпітера досліджено спектроскопію і двофотонні розпади чармонію та боттомонію в релятивізованій потенціальній моделі, що містить потенціал Корнеля з нестатичними спін-залежними поправками. Обговорено також недавно відкриті нові стани.

Ключові слова: спектроскопія кварконію, потенціальні моделі, узагальнене рівняння Солпітера.

PACS number(s): 14.40.−n, 11.10.St

I. ВСТУП

Відкриття J/Ψ-частинки понад три десятиліття тому [1,2] започаткувало феноменологічну інтерпретацію важких мезонів на основі квантової хромодинаміки (КХД). Передбачення та відкриття збуджених станів чармонію та боттомонію стимулювало появу різних теоретичних досліджень спектроскопії та розпадів важких кварконіїв. Порівнюючи теоретичні передбачення, що випливають із КХД, ґраткових обчислень, із наявними експериментальними даними, можна отримати інформацію про динаміку важких мезонів. Ця інформація підтверджує найважливіші риси КХД — асимптотичну свободу та ув'язнення (конфайнмент) кварків.

Але з основних принципів КХД неможливо одержати потенціал кварк-антикваркової взаємодії на великих віддалях. Через зростання константи сильної взаємодії на великих віддалях (більших за 0.1 fm) теорія збурень не застосовна, що й призводить до теоретичної невизначеності потенціалу на великих віддалях. Саме тому є багато різних феноменологічних підходів для опису непертурбативної частини КХД. Серед них значних успіхів досягнуто в потенціальних кваркових моделях [3–6]. Вагомим теоретичним підґрунтям цих моделей є ґраткова КХД, згідно з якою феноменологічний потенціал містить статичні [7] та нестатичні члени [8].

Статичний потенціал залежить тільки від віддалі між кварком й антикварком. Далекосяжна частина потенціалу забезпечує ув'язнення кварків, короткосяжна — асимптотичну свободу. Нестатична частина потенціалу залежить від аромату через посередництво мас кварків і складається зі спін-залежної та спін-незалежної частин.

Дослідження тонкої та надтонкої структури спектрів мезонів і ширин розпадів виявили суттєву залежність їх від релятивістських ефектів, зокрема від Лоренц-трансформаційних властивостей міжкваркового потенціалу [9–12]. З'ясовано, що потенціал має бути сумою Лоренц-векторної та Лоренц-скалярної частин.

Нові експериментальні відкриття частинок $X(3872)$, $X(3940)$, $Z(3930)$, $Y(4260)$ у спектрі чармонію, $\Upsilon(1D)$, $\Upsilon(3S)$, $\Upsilon(5S)$ у спектрі боттомонію [13,14] (деякі з яких виявилися неочікуваними) відновили зацікавленість потенціальними моделями для опису важких кварконіїв. Тому в цій роботі дослідимо ці нові стани у спектрах чармонію, боттомонію на основі квазірелятивістського рівняння Солпітера.

II. КВАЗІРЕЛЯТИВІСТСЬКА МОДЕЛЬ

Квантово-польовий опис релятивістських зв'язаних станів подається рівнянням Бете–Солпітера [15]. Якщо інтеґральне ядро, що описує взаємодію ферміонів з масами m_1 і m_2, замінити інстантонним потенціалом $V(r)$, знехтувати спіном і розщепленням на "велику–велику" та "малу–малу" компоненти хвильової функції, то отримаємо безспінове рівняння [16]

$$\left[\sqrt{p^2+m_1^2}+\sqrt{p^2+m_2^2}+V(r)-M\right]\Psi(r)=0,$$

де M — повна енерґія зв'язаного стану, p — відносний імпульс ферміонів. Розгляньмо це рівняння для мезона масою M як зв'язаного стану кварка масою m_1 та антикварка масою m_2, покладаючи, що потенціал кварк-антикваркової взаємодії $V(r)$ є сумою Лоренц-векторної $V_\mathrm{v}(r)$ і Лоренц-скалярної $V_\mathrm{s}(r)$ частин [17,18],

$$\begin{aligned}&\left\{[p^2+(m_1+\beta_1 V_\mathrm{s}(r))^2]^{1/2}\right.\\&\left.+[p^2+(m_2+\beta_2 V_\mathrm{s}(r))^2]^{1/2}\right\}\Psi(r)=(M-V_\mathrm{v}(r))\Psi(r),\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}&V(r)=V_\mathrm{s}(r)+V_\mathrm{v}(r),\\&\beta_{1,2}=\frac{m_{2,1}}{m_1+m_2},\qquad \beta_1+\beta_2=1.\end{aligned}\tag{2}$$

Нехай $m_{1,2}>p$, $m_{1,2}>V_\mathrm{s}(r)$, тоді рівняння (1) можна спростити, розкладаючи корені в ряд за степенями $p^2/m_{1,2}^2$, $V_\mathrm{s}(r)/m_{1,2}$. У цьому розкладі обмежимося членами другого порядку, крім того, візьмімо до уваги той факт, що p^2 і $V_\mathrm{s}(r)$ не комутують. Отже,

$$\begin{aligned}&\left[\frac{p^2}{2\mu}\left(1-\frac{V_\mathrm{s}(r)}{2\eta}\right)-\frac{1}{4\mu\eta}V_\mathrm{s}(r)p^2-\frac{p^4}{8\nu}\right]\Psi(r)\\&=[E-V(r)]\,\Psi(r),\end{aligned}\tag{3}$$

де $E = M - m_1 - m_2$, $\eta = \frac{\nu}{\mu^2}$, $\nu = \frac{(m_1 m_2)^3}{m_1^3 + m_2^3}$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Із рівняння Шредингера

$$\frac{p^2}{2\mu}\Psi(r) = (E - V(r))\Psi(r)$$

маємо [19]

$$\frac{p^4}{8\nu} = \frac{(E - V(r))^2}{2\eta},$$

і рівняння (3) набере вигляду

$$\left[\frac{p^2}{2\mu}\left(1 - \frac{V_\mathrm{s}(r)}{2\eta}\right) - \frac{1}{4\mu\eta}V_\mathrm{s}(r)p^2 - \frac{(E - V(r))^2}{2\eta}\right]\Psi(r) = (E - V(r))\Psi(r). \tag{4}$$

А що $V(r)$ сферично-симетричний, то перейдімо в рівнянні (4) до сферичної системи координат і відокремимо змінні. Для цього в рівняння (4) підставмо

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{R(r)}{r}Y(\vartheta, \varphi).$$

Після деяких перетворень отримаємо таке радіальне рівняння:

$$-\frac{1}{2\mu}R''_{nl} + \frac{1}{2\mu\eta\left(1 - \frac{V_\mathrm{s}}{\eta}\right)}V'_\mathrm{s}R'_{nl} + \left(V - \frac{V^2}{2\eta} + \frac{E_{nl}V}{\eta} + \frac{V''_\mathrm{s}}{4\mu\eta}\right)\frac{R_{nl}}{1 - \frac{V_\mathrm{s}}{\eta}} + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2}R_{nl} = \left(\frac{E_{nl}^2}{2\eta} + E_{nl}\right)\frac{R_{nl}}{1 - \frac{V_\mathrm{s}}{\eta}}$$

або

$$-\frac{1}{2\mu}R''_{nl} + \frac{1}{2\mu\eta}\left(1 + \frac{V_\mathrm{s}}{\eta}\right)V'_\mathrm{s}R'_{nl} + \left(V - \frac{V^2}{2\eta} + \frac{E_{nl}V}{\eta} + \frac{V''_\mathrm{s}}{4\mu\eta}\right)\left(1 + \frac{V_\mathrm{s}}{\eta}\right)R_{nl} + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2}R_{nl} = \left(\frac{E_{nl}^2}{2\eta} + E_{nl}\right)\left(1 + \frac{V_\mathrm{s}}{\eta}\right)R_{nl}, \tag{5}$$

де враховано, що $V_\mathrm{s} < m$, тому

$$\left(1 - \frac{V_\mathrm{s}}{\eta}\right)^{-1} \simeq \left(1 + \frac{V_\mathrm{s}}{\eta}\right).$$

Тепер зведімо рівняння (5) до шредингероподібної форми. Із тотожності

$$\frac{1}{\chi}\frac{d^2}{dr^2}(\chi R) = \frac{\chi''}{\chi}R + 2\frac{\chi'}{\chi}R' + R''$$

маємо

$$R'' = \frac{1}{\chi}\frac{d^2}{dr^2}(\chi R) - \frac{\chi''}{\chi} - 2\frac{\chi'}{\chi}R'. \tag{6}$$

Порівнюючи з (5), знайдемо рівняння для $\chi(r)$

$$\frac{\chi'}{\chi} = -\frac{1}{2\eta}\left(1 + \frac{V_\mathrm{s}}{\eta}\right)\frac{V'_\mathrm{s}}{\eta}, \tag{7}$$

розв'язок якого

$$\chi(r) = \exp\left\{-\frac{1}{2\eta}\int V'_\mathrm{s}\left(1 + \frac{V_\mathrm{s}}{\eta}\right)dr\right\}. \tag{8}$$

У рівняння (5) підставмо (6), (7), (8), домножмо на $\chi(r)$ і обмежмося членами порядку $1/\eta$

$$\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{V_\mathrm{v}^2(r)}{2\eta} + \gamma(r) + \left(1 + \frac{E_{nl}}{\eta}\right)V_\mathrm{v}(r)\right] \times \Phi_{nl}(r) = \left(1 + \frac{E_{nl}}{2\eta}\right)E_{nl}\Phi_{nl}(r), \tag{9}$$

$$\Phi_{nl}(r) = \chi_{nl}(r)R_{nl}(r), \quad \gamma(r) = V_\mathrm{s}(r) + \frac{V_\mathrm{s}^2(r)}{\eta}.$$

Оберімо потенціальну модель Корнеля $V_\mathrm{v}(r) = -4\alpha_s/3r$, $V_\mathrm{s}(r) = ar$, α_s, a — параметри моделі, тоді в (9), об'єднуючи другий і третій члени

$$\frac{1}{2\mu r^2}l'(l'+1) = \frac{1}{2\mu r^2}\left(l(l+1) - \left(\frac{4}{3}\alpha_s\right)^2\frac{\mu}{\eta}\right),$$

введімо орбітальне квантове число l'

$$l' = -\frac{1}{2} + \sqrt{(l+1)^2 - \left(\frac{4\alpha_s}{3}\right)^2\frac{\mu}{\eta}}, \tag{10}$$

крім того, константу α'_s

$$\alpha'_s = \alpha_s\left(1 + \frac{E_{nl}}{2\eta}\right), \tag{11}$$

енергію $E'_{nl'}$

$$E'_{nl'} = E_{nl}\left(1 + \frac{E_{nl}}{\eta}\right) \tag{12}$$

й остаточно отримаємо шредингероподібне радіальне рівняння

$$\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l'(l'+1)}{2\mu r^2} + \gamma(r) - \frac{4}{3}\frac{\alpha'_s}{r}\right]\Phi_{nl'}(r) = E'_{nl'}\Phi_{nl'}(r). \tag{13}$$

III. МАСОВІ СПЕКТРИ І ДВОФОТОННІ РОЗПАДИ

Маючи рівняння (13), дослідімо масові спектри важких кварконіїв ($m_1 = m_2$) та їхні радіаційні розпади в потенціальній моделі Корнеля, додаючи спін-залежні члени [20]

$$V_{\mathrm{SD}}(r) = V_{\mathrm{SS}}(r) + V_{\mathrm{LS}}(r) + V_{\mathrm{T}}(r), \tag{14}$$

$V_{\mathrm{SS}}(r)$ відповідає спін-спіновій взаємодії

$$V_{\mathrm{SS}}(r) = \frac{2}{3}\frac{(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2)}{m^2}\Delta V_{\mathrm{v}}(r), \tag{15}$$

$\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ — спіни кварка й антикварка відповідно, $V_{\mathrm{LS}}(r)$ — спін-орбітальний потенціал

$$V_{\mathrm{LS}}(r) = \frac{(\mathbf{LS})}{2m^2 r}\left(3\frac{dV_{\mathrm{v}}}{dr} - \frac{dV_{\mathrm{s}}}{dr}\right), \tag{16}$$

$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ — спін кварконія, $\mathbf{L}$ — відносний орбітальний момент кварка й антикварка, $V_{\mathrm{T}}(r)$ — тензорний потенціал

$$\begin{gathered} V_{\mathrm{T}}(r) = \frac{S_{12}}{m^2}\left[\frac{1}{r}\frac{dV_{\mathrm{v}}}{dr} - \frac{d^2V_{\mathrm{v}}}{dr^2}\right], \\ S_{12} = \frac{(\mathbf{S}_1\mathbf{r})(\mathbf{S}_2\mathbf{r})}{r^2} - \frac{1}{3}(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2). \end{gathered} \tag{17}$$

Щоб обчислити енерґетичний спектр E_{nl}, спочатку усереднімо (13) і (14) на функціях кулонівського типу [21]

$$\Phi_{nl'}(r) = C_{nl'} r^{l'+1} e^{-br} L_{n-1}^{2l'+2}(2br), \tag{18}$$

$C_{nl'} = \left[\frac{(2b)^{2l'+3}(n-1)!}{\Gamma(2l'+n+2)}\right]^{1/2}$ — константа нормування, $L_{n-1}^{2l'+2}(2br)$ — приєднані функції Лаґерра [22], b — варіаційна стала, яку визначаємо з умови $\frac{\partial E_{nl'}}{\partial b} = 0$. Тепер, ураховуючи (10)–(12), з квадратного рівняння для спін-незалежної частини спектра E_{nl}^0 одержимо

$$\begin{aligned} E_{nl}^0 &= (J_4 - \eta) \\ &\quad + \left[(J_4 - \eta)^2 + 2\eta(J_1 + J_2 + J_3 + J_4)\right]^{1/2}, \end{aligned} \tag{19}$$

спін-залежна частина спектра E_{nl}^1

$$E_{nl}^1 = J_5,$$

$$E_{nl} = E_{nl}^0 + E_{nl}^1,$$

$$\begin{aligned} &J_1 = \left\langle -\frac{1}{m}\frac{d^2}{dr^2}\right\rangle, \qquad J_2 = \left\langle \frac{l'(l'+1)}{dr^2}\right\rangle, \\ &J_3 = \langle \gamma(r)\rangle, \qquad J_4 = \left\langle -\frac{4}{3r}\alpha_s'\right\rangle, \\ &J_5 = \langle V_{\mathrm{SD}}\rangle. \end{aligned} \tag{20}$$

Після інтеґрування за формулами [23]

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{cx}\, L_m^\gamma(cx) L_n^\lambda(cx)\, dx \\ &\quad = (-1)^n \frac{\Gamma(\gamma+1+m)\Gamma(\lambda)}{m! c^\lambda \Gamma(\gamma+1)}, \\ &\int_0^\infty x^\lambda e^{-cx}\, L_m^\lambda(cx) L_n^\lambda(cx)\, dx \\ &\quad = \frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{n! c^{\lambda+1}}\delta_{nm},\ \mathrm{Re}\, c > 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda > -1, \end{aligned}$$

остаточно одержимо

$$\begin{aligned} E_{nl}^0 = &-\left(2m + \frac{4\alpha_s}{3(l'+1)}b\right) + \Bigg[4m^2 + 16b^2\left(-\frac{1}{4} - \frac{(-1)^n}{2} + \frac{\alpha_s^2}{9(l'+1)^2} + \frac{(-1)^n(n-1)(n+l')}{(l'+1)(2l'+3)}\right) \\ &+ \frac{4ma}{b}\left(n + l' + \frac{1}{2}\right) + \frac{a^2}{4b^2}\left(4\left(n + l' + \frac{1}{2}\right)^2 + n(n+2l'+2) + (n-1)(n+2l'+1)\right)\Bigg]^{1/2}. \end{aligned} \tag{21}$$

У Додатку наведено вирази для мас S-, P-, D-станів чармонію, боттомонію, числові розрахунки подано в таблицях 1–4.

Наостанок обчислімо ширини двофотонних розпадів на основі одержаного масового спектра. Ці розпади чутливі до вибору радіальної функції кварконію [27]. Зокрема, у псевдоскалярному стані пропорційні квадратові радіальної функції в нулі

$$\Gamma(\eta_{c,b}(1^1S_0) \to \gamma\gamma) = \frac{3\alpha_{em}^2 e^4}{M_{\eta_{c,b}}^2}|R_s(0)|^2, \tag{22}$$

у скалярному та тензорному станах — пропорційні квадратові похідної радіальної функції в нулі

$$\Gamma(\chi_{c,b}(1^3P_0) \to \gamma\gamma) = \frac{27\alpha_{em}^2 e^4}{M_{\chi_{c,b}}^4}|R_p'(0)|^2, \tag{23}$$

$$\Gamma(\chi_{c,b}(1^3P_2) \to \gamma\gamma) = \frac{36\alpha_{em}^2 e^4}{5M_{\chi_{c,b}}^4}|R_p'(0)|^2, \tag{24}$$

де $\alpha_{em} = \frac{1}{137.036\ldots}$ — електромагнітна стала тонкої структури, e — електричний заряд кварка, $e_c = 2/3$,

$e_b = -1/3$, M — маса кварконію. Результати обчислень наведено в таблиці 5.

IV. ВИСНОВКИ

У цій статті одержано вираз для обчислення масових спектрів важких мезонів на основі формалізму Солпітера у квазірелятивістському наближенні. Досліджено спектроскопію та ширини двофотонних розпадів чармонію й боттомонію в потенціальній моделі Корнеля зі спін-залежними релятивістськими поправками. У таблицях 2, 3 подано теоретичні передбачення та експериментальні дані разом із новими станами. У цілому узгодження є в межах декількох МеВ. Оскільки наявні різні стани, квантові числа яких дотепер не виміряні експериментально, прокоментуємо одержані результати й можливі квантові числа. Отже, імовірна інтерпретація

у спектрі чармонію:

$X(3940)$ — це $3^1S_0(c\bar{c})$ стан, $Y(4260)$ — стан 3^3S_1, однак у деяких моделях маса $Y(4260)$ сумісна зі станом $4^3S_1(c\bar{c})$ [6], крім того, є припущення, що це тетракварк $cs\bar{c}\bar{s}$ або гібрид, тому питання лишається відкритим. Спостережувані властивості $Z(3930)$ сумісні з передбачуваними для $2^3P_2(c\bar{c})$ стану, і $\Psi(3836)$ ідентифікується зі станом $1^3D_2(c\bar{c})$;

у спектрі боттомонію:

$\Upsilon(1D)$ ідентифікується зі станом $1^3D_2\Upsilon(1D)$, $\Upsilon(5S)$ — зі станом $5^3S_1\Upsilon(5S)$. Щодо ширин двофотонних розпадів чармонію, то найбільше відхилення від експериментальних значень є для $\eta_c(1^1S_0)$. Однак близьке до цього значення зафіксовано й у [28].

Для боттомонію експериментальних даних немає, тому в таблиці 5 для порівняння подано результати інших авторів. Які ж із цих передбачень підтвердяться, покажуть майбутні експерименти.

ДОДАТОК

Наведемо явні вирази для обчислення мас S-, P-, D-станів для чармонію та боттомонію:

$1S$-стани

$$
\begin{aligned}
& l'+1 = 0.864,\\
& E^0_{10} = -\left(2m + \frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{(l'+1)}b\right) + \Bigg[4(m^2+b^2)\\
&\quad + \frac{16}{9}\frac{\alpha_s^2 b^2}{(l'+1)^2} + \frac{4ma}{b}\left(l'+1+\frac{1}{2}\right) + \frac{a^2}{4b^2}\left(4\left(1+l'+\frac{1}{2}\right)^2 + (3+2l')\right)\Bigg]^{1/2},\\
& E^1_{10} = \begin{cases} -\dfrac{8}{3}\dfrac{\alpha_s b^3}{m^2} & S=0,\\[2ex] \dfrac{8}{9}\dfrac{\alpha_s b^3}{m^2} & S=1 \end{cases},\\
& M(1^1S_0) = 2m + E^0_{10} + E^1_{10} = 2m + E^0_{10} - \frac{8}{3}\frac{\alpha_s b^3}{m^2},\\
& M(1^3S_1) = 2m + E^0_{10} + E^1_{10} = 2m + E^0_{10} + \frac{8}{9}\frac{\alpha_s b^3}{m^2}.
\end{aligned}
$$

$2S$-стани

$$
\begin{aligned}
& E^0_{20} = -\left(2m + \frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{(l'+1)}b\right) + \Bigg[4m^2 + 16b^2\left(-\frac{3}{4} + \frac{\alpha_s^2}{9(l'+1)^2} + \frac{(2+l')}{(l'+1)(2l'+3)}\right)\\
&\quad + \frac{4ma}{b}\left(2+l'+\frac{1}{2}\right) + \frac{a^2}{4b^2}\left(4\left(2+l'+\frac{1}{2}\right)^2 + 4(2+l') + (3+2l')\right)\Bigg]^{1/2},\\
& E^1_{20} = \begin{cases} -\dfrac{8}{9}\dfrac{\alpha_s b^3}{m^2} & S=0,\\[2ex] \dfrac{8}{27}\dfrac{\alpha_s b^3}{m^2} & S=1 \end{cases},\\
& M(2^1S_0) = 2m + E^0_{20} + E^1_{20} = 2m + E^0_{20} - \frac{8}{9}\frac{\alpha_s b^3}{m^2},\\
& M(2^3S_1) = 2m + E^0_{20} + E^1_{20} = 2m + E^0_{20} + \frac{8}{27}\frac{\alpha_s b^3}{m^2}.
\end{aligned}
$$

$3S$-стани

$$E_{30}^0 = -\left(2m + \frac{4}{3}\frac{\alpha_\mathrm{s}}{(l'+1)}b\right) + \left[4m^2 + 4\left(1 + \frac{4}{9}\frac{\alpha_\mathrm{s}^2}{(l'+1)^2} - \frac{8(3+l')}{(l'+1)(2l'+3)}\right)b^2 \right.$$
$$\left. + \frac{4ma}{b}\left(3 + l' + \frac{1}{2}\right) + \frac{a^2}{4b^2}\left(4\left(3 + l' + \frac{1}{2}\right)^2 + 3(5+2l') + 4(2+l')\right)\right]^{1/2},$$

$$E_{30}^1 = \begin{cases} -\dfrac{4}{9}\dfrac{\alpha_\mathrm{s}b^3}{m^2} & S = 0, \\ \dfrac{4}{27}\dfrac{\alpha_\mathrm{s}b^3}{m^2} & S = 1 \end{cases},$$

$$M(3^1S_0) = 2m + E_{30}^0 + E_{30}^1 = 2m + E_{30}^0 - \frac{4}{9}\frac{\alpha_\mathrm{s}b^3}{m^2},$$
$$M(3^3S_1) = 2m + E_{30}^0 + E_{30}^1 = 2m + E_{30}^0 + \frac{4}{27}\frac{\alpha_\mathrm{s}b^3}{m^2}.$$

$1P$-стани

$$l' + 1 = 1.96,$$
$$E_{11}^0 = -\left(2m + \frac{4}{3}\frac{\alpha_\mathrm{s}}{(l'+1)}b\right) + \left[4(m^2+b^2) + \frac{16}{9}\frac{\alpha_\mathrm{s}^2}{(l'+1)^2}b^2 + \frac{4ma}{b}\left(1 + l' + \frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{a^2}{b^2}\left(1 + l' + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4b^2}(3+2l')\right]^{1/2},$$

$$E_{11}^1 = \begin{cases} \dfrac{ab}{2m^2} - \dfrac{16}{9}\dfrac{\alpha_\mathrm{s}b^3}{m^2} & S = 1,\ J = 0, \\ \dfrac{ab}{4m^2} - \dfrac{4}{9}\dfrac{\alpha_\mathrm{s}b^3}{m^2} & S = 1,\ J = 1, \\ -\dfrac{ab}{4m^2} - \dfrac{28}{45}\dfrac{\alpha_\mathrm{s}b^3}{m^2} & S = 1,\ J = 2, \end{cases}$$

$$M(1^3P_0) = 2m + E_{11}^0 + E_{11}^1 = 2m + E_{11}^0 + \frac{ab}{2m^2} - \frac{16}{9}\frac{\alpha_\mathrm{s}b^3}{m^2},$$
$$M(1^3P_1) = 2m + E_{11}^0 + E_{11}^1 = 2m + E_{11}^0 + \frac{ab}{2m^2} - \frac{4}{9}\frac{\alpha_\mathrm{s}b^3}{m^2},$$
$$M(1^3P_2) = 2m + E_{11}^0 + E_{11}^1 = 2m + E_{11}^0 - \frac{ab}{4m^2} - \frac{28}{45}\frac{\alpha_\mathrm{s}b^3}{m^2}.$$

$2P$-стани

$$E_{21}^0 = -\left(2m + \frac{4}{3}\frac{\alpha_\mathrm{s}}{(l'+1)}b\right) + \left[4m^2 + 4\left(\frac{4}{9}\frac{\alpha_s^2}{(l'+1)^2} + \frac{4(2+l')}{(l'+1)(2l'+3)} - 3\right)b^2\right.$$
$$\left. + \frac{4ma}{b}\left(2 + l' + \frac{1}{2}\right) + \frac{a^2}{b^2}\left(2 + l' + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4b^2}\left(4(2+l') + (2l'+3)\right)\right]^{1/2},$$

$$E_{21}^1 = \begin{cases} -\dfrac{16}{9}\dfrac{\alpha_\mathrm{s}}{m^2}A(b) + \dfrac{a}{2m^2}B(b) & S = 1,\ J = 0, \\ -\dfrac{4}{9}\dfrac{\alpha_\mathrm{s}}{m^2}A(b) + \dfrac{a}{4m^2}B(b) & S = 1,\ J = 1, \\ \dfrac{28}{45}\dfrac{\alpha_\mathrm{s}}{m^2}A(b) - \dfrac{a}{4m^2}B(b) & S = 1,\ J = 2, \end{cases},$$

$$
\begin{aligned}
&M(2^3P_0) = 2m + E_{21}^0 + E_{21}^1 = 2m + E_{21}^0 - \frac{16}{9}\frac{\alpha_\mathrm{s}}{m^2}A(b) + \frac{a}{2m^2}B(b),\\
&M(2^3P_1) = 2m + E_{21}^0 + E_{21}^1 = 2m + E_{21}^0 - \frac{4}{9}\frac{\alpha_\mathrm{s}}{m^2}A(b) + \frac{a}{4m^2}B(b),\\
&M(2^3P_2) = 2m + E_{21}^0 + E_{21}^1 = 2m + E_{21}^0 + \frac{28}{45}\frac{\alpha_\mathrm{s}}{m^2}A(b) - \frac{a}{4m^2}B(b),\\
&A(b) = 5b^3 - 2b^2 + \frac{3}{10}b, \quad B(b) = 5b - 4 + \frac{1}{b}.
\end{aligned}
$$

$1D$-стани

$$
\begin{aligned}
&l' + 1 = 2.52,\\
&E_{12}^0 = -\left(2m + \frac{4}{3}\frac{\alpha_\mathrm{s}}{(l'+1)}b\right) + \left[4(m^2+b^2) + \frac{16}{9}\frac{\alpha_s^2 b^2}{(l'+1)} + \frac{4ma}{b}\left(1 + l' + \frac{1}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{a^2}{b^2}\left(1 + l' + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4b^2}(3 + 2l')\right]^{1/2},\\
&E_{12}^1 = \left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{4}{9}\dfrac{\alpha_\mathrm{s} b^3}{m^2} + \dfrac{ab}{2m^2} & S = 1,\ J = 1,\\[2ex] -\dfrac{4}{45}\dfrac{\alpha_\mathrm{s} b^3}{m^2} + \dfrac{ab}{6m^2} & S = 1,\ J = 2, \end{array}\right. ,\\
&M(1^3D_1) = 2m + E_{12}^0 + E_{12}^1 = 2m + E_{12}^0 - \frac{4}{9}\alpha_\mathrm{s}\frac{b^3}{m^2} + \frac{ab}{2m^2},\\
&M(1^3D_2) = 2m + E_{12}^0 + E_{12}^1 = 2m + E_{12}^0 - \frac{4}{45}\alpha_\mathrm{s}\frac{b^3}{m^2} + \frac{ab}{6m^2}.
\end{aligned}
$$

α_s	a (ГеВ^2)	m_c (ГеВ)	m_b (ГеВ)
0.5154	0.1487	1.463	4.894

Таблиця 1. Параметри моделі.

стан$^{2n+1}L_J$	частинка	теорія	експеримент [24–26]
1^1S_0	$\eta_c(1S)$	2.988	2.980
1^3S_1	$J/\Psi(1S)$	3.026	3.0969
1^3P_0	$\chi_{c0}(1P)$	3.445	3.4152
1^3P_1	$\chi_{c1}(1P)$	3.510	3.5106
1^3P_2	$\chi_{c2}(1P)$	3.550	3.5563
1^1P_1	$h_c(1P)$	3.525	3.5259
1^3D_1	$\Psi(3770)$	3.769	3.771
1^3D_2	$\Psi(3836)$	3.837	3.836
2^1S_0	$\eta_c(2S)$	3.632	3.638
2^3S_1	$\Psi(2S)$	3.665	3.6861
2^3P_2	$Z(3930)$	3.930	3.929
3^1S_0	$X(3940)$	3.966	3.940
3^3S_1	$Y(4260)$	4.2619	4.260

Таблиця 2. Масовий спектр чармонію (в ГеВ).

стан $^{2S+1}L_J$	частинка	теорія	експеримент [24–26]
1^1S_0	$\eta_b(1S)$	9.359	—
1^3S_1	$\Upsilon(1S)$	9.467	9.4603
1^3P_0	$\chi_{b0}(1P)$	9.867	9.8599
1^3P_1	$\chi_{b1}(1P)$	9.922	9.8927
1^3P_2	$\chi_{b2}(1P)$	9.974	9.9122
1^3D_2	$\Upsilon(1D)$	10.162	10.161
2^1S_0	$\eta_b(2S)$	9.955	—
2^3S_1	$\Upsilon(2S)$	10.030	10.0233
2^3P_0	$\eta_{b0}(2P)$	10.236	10.232
2^3P_1	$\eta_{b1}(2P)$	10.253	10.255
2^3P_2	$\eta_{b2}(2P)$	10.266	10.268
3^3S_1	$\Upsilon(3S)$	10.339	10.355
5^3S_1	$\Upsilon(5S)$	10.878	10.865

Таблиця 3. Масовий спектр боттомонію (в ГеВ).

стан	$c\bar{c}$	$b\bar{b}$
1^1S_0	0.54	1.1
1^3S_1	0.57	0.92
1^3P_0	0.62	1.3
1^3P_1	0.62	1.4
1^3P_2	0.62	1.3
1^1P_1	0.62	—
1^3D_1	0.55	—
1^3D_2	0.5	0.98
2^1S_0	0.37	0.58
2^3S_1	0.36	0.54
2^3P_0	—	0.63
2^3P_1	—	0.63
2^3P_2	0.42	0.63
3^1S_0	0.32	—
3^3S_1	0.29	0.43
5^3S_1	—	0.38

Таблиця 4. Варіаційний параметр (в ГеВ).

частинка	Γ(кеВ)	$\Gamma_{\text{теор}}$(кеВ)			$\Gamma_{\text{експ}}$(кеВ)					
		[29]	[30]	[31]	[32]	[33]	[30]	[24]	[25]	[28]
$\eta_c(1^1S_0)$	2.969				7.5	4.4		7.2		2.46
$\eta_b(1^1S_0)$	2.213	0.35	0.46	0.46	—	—	—	—	—	—
$\chi_c(1^3P_0)$	3.165				3.1	2.9		2.87		
$\chi_b(1^3P_0)$	0.0723	0.038	0.080	0.043	—	—	—	—	—	—
$\chi_c(1^3P_2)$	0.532				0.45	0.31	0.61	—	0.559	
$\chi_b(1^3P_2)$	0.0031	0.008	0.008	0.007	—	—	—	—	—	—

Таблиця 5. Ширини двофотонних розпадів.

[1] J. J. Aubert *et al.*, Phys. Rev. Lett. **33**, 1404 (1974); J.-E. Augustin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **33**, 1408 (1974); C. Bacci *et al.*, Phys. Rev. Lett. **33**, 1408 (1974).
[2] G. S. Abrams *et al.*, Phys. Rev. Lett. **33**, 1453 (1974).
[3] E. Eichten *et al.*, Phys. Rev. Lett. **34**, 369 (1975).
[4] N. Brambilla *et al.*, *CERN Yellow Report, CERN-2005-005* (Geneva, CERN, 2005).
[5] S. F. Radford, W. W. Repko, Phys. Rev. D **75**, 074031 (2007).
[6] E. Eichten, S. Godfrey, H. Mahlke, J. L. Rosner, Rev. Mod. Phys. **80**, 1161 (2008).
[7] G. S. Bali, Phys. Rep. **343**, 1 (2001).
[8] Y. Koma, M. Koma, Nucl. Phys. B **769**, 79 (2007).
[9] T. Appelquist, R. M. Barnett, K. D. Lane, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **28**, 387 (1978).
[10] W. Kwong, C. Quigg, J. L. Rosner, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **37**, 3257 (1987).
[11] L. P. Fulcher, Phys. Rev. D **60**, 074006 (1999).
[12] D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin, Mod. Phys. Lett. A **20**, 875 (2005).
[13] A. Tomaradze, J. Phys.: Conf. Ser. **9**, 119 (2005).
[14] S. Eidelman *et al.*, Phys. Lett. B **592**, 1 (2004); A. Abulencia *et al.* (CDF Collaboration), Phys. Rev. Lett. **96**, 082002 (2006).
[15] E. E. Salpeter, H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
[16] L. J. Nickish, L. Durand, B. Durand, Phys. Rev. D **30**, 660 (1984).
[17] D. Lichtenberg, E. Predazzi, C. Rossetti, Z. Phys. C **40**, 357 (1988).
[18] C. Goebel, D. La Course, M. G. Olsson, Phys. Rev. D **41**, 2917 (1990).
[19] C. Olsson *et al.*, Phys. Rev. D **45**, 4317 (1992).
[20] S. F. Radford, W. W. Repko, Phys. Rev. D **75**, 074031 (2007).
[21] W. Lucha, F. Schoberl, Int. J. Mod. Phys. A **14**, 2309 (1999).
[22] *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган (Наука, Москва, 1979).
[23] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и рады. Специальные функции. Т. 2* (Наука, Москва, 1983).
[24] W. M. Yao *et al.* (Particle Data Group), J. Phys. G **33**, 1 (2006).
[25] S. Dobbs *et al.* (CLEO), Phys. Rev. D **73**, 071101 (2006).
[26] O. Oliviera, R. A. Coimbra, preprint arXiv:hep-ph/0603046 (2006).
[27] В. Люха, Ф. Шеберл, *Сильное взаимодействие. теория потенциальных моделей* (Акад. Экспресс, Львов, 1996).
[28] Z. Metreveli, eConf **C070805**, 16 (2007).
[29] S. Godfrey, J. Phys.: Conf. Ser. **9**, 123 (2005).
[30] K. Abe *et al.*, Phys. Rev. D **58**, 11 (2004).
[31] T. Manke *et al.* (CP-PACS), Phys. Rev. D **62**, 114508 (2000).
[32] K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
[33] S. Bagnasco *et al.*, Phys. Lett. B **533**, 237 (2002).

HEAVY QUARKONIA IN THE RELATIVIZED POTENTIAL MODEL

S. S. Pikh
Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,
12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine

Spectroscopy and two-photon decays of the charmonium and bottomonium in a relativized potential model consisting of the Cornell potential with a nonstatic spin-dependent corrections are studied within the framework of the Salpeter formalizm. The newly discovered states are also discussed.