ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 17, № 2 (2013) 2401(4 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 17, No. 2 (2013) 2401(4 p.)

КВАНТОВОМЕХАНІЧНА АНАЛОГІЯ ПОШИРЕННЯ СВІТЛА В ПЛАНАРНОМУ ХВИЛЕВОДІ

Г. П. Лаба[1], В. М. Ткачук[2]
[1] *Національний університет "Львівська політехніка", кафедра телекомунікацій, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна*
[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра теоретичної фізики, вул. Драгоманова 12, Львів, 79005, Україна*
(Отримано 08 квітня 2013 р.; в остаточному вигляді — 13 травня 2013 р.)

Ми встановили точну аналогію між рівняннями, які описують поширення TE- і TM-мод у планарному хвилеводі з довільною неперервною залежністю показника заломлення від координат, і стаціонарним рівнянням Шредингера. Ефективні потенціальні енергії, які входять у рівняння Шредингера та відповідають TE- і TM-модам, відрізняються між собою, хоча в наближенні слабкої залежності показника заломлення від координат збігаються. Для довільної залежності показника заломлення від координат на прикладах показано суттєву відмінність між ефективними потенціальними енергіями для TE- і TM-мод.
Ключові слова: планарний хвилевід, TE- і TM-моди, рівняння Шредингера.

PACS number(s): 42.79.Gn, 03.65.−w.

I. ВСТУП

Аналогія між хвильовою оптикою і квантовою механікою та відповідно між геометричною оптикою і класичною механікою відома давно (див., наприклад [1–4] і посилання там). Ця аналогія цікава сама собою, а також має практичне значення. Як теоретичні, так і експерементальні методи розвинуті в одній області, можуть бути успішно перенесені в іншу. З одного боку, методи, розвинуті в рамках квантової механіки, такі, як метод факторизації чи суперсиметрії, варіаційний метод, метод ВКБ та багато інших, можна застосувати, досліджуючи поширення світла в оптоволокні. З іншого боку, поширення світла в оптоволокні можна використати для експериментальної перевірки багатьох квантовомеханічних ефектів, наприклад, таких, як тунелювання крізь потенціальний бар'єр і час тунелювання, осциляції Блоха в періодичних структурах, квантовий хаос. Огляд цих проблем можна знайти в [5–7]. Звернімо також увагу на недавні праці [8,9], у яких квантовомеханічну аналогію використано при вивченні конфайнменту світла у хвилеводних структурах та в мікротрубчастих резонаторах відповідно.

Досліджуючи квантовомеханічну аналогію поширення світла в оптичному хвилеводі, найчастіше використовують наближення слабої залежності показника заломлення від координат. Метою цієї роботи є отримати точну квантовомеханічну аналогію при поширенні світла в планарному хвилеводі з довільною залежністю показника заломлення від координат. Слід зауважити, що планарний хвилевід є найпростішим для аналізу, проте він має широке практичне застосування й досліджується в різних аспектах дотепер (див., наприклад [10, 11]).

II. ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ В ПЛАНАРНОМУ ХВИЛЕВОДІ

У цьому розділі ми нагадаємо рівняння, які описують поширення електромагнітної хвилі у планарному хвилеводі [12]. Нехай планарний хвилевід розміщений у площині $y-z$ з діелектричною проникністю $\epsilon = \epsilon(x)$, яка є неперервною функцією x, і магнітною $\mu = 1$ (рис. 1). Показник заломлення при цьому $n^2(x) = \epsilon(x)$. Такий хвилевід називають ґрадієнтним.

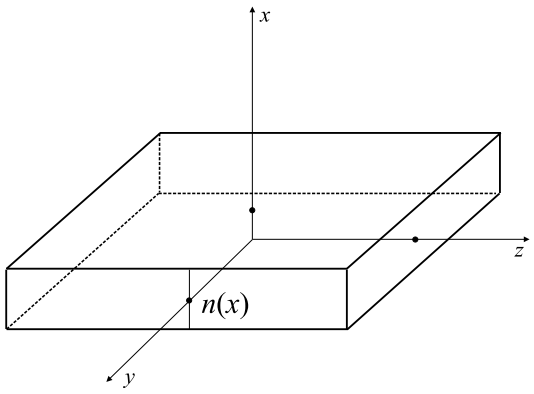

Рис. 1. Планарний хвилевід розміщений у площині $y-z$. Показник заломлення змінюється вздовж напрямку x. Електромагнітна хвиля поширюється вздовж z.

Опис поширення хвиль у планарному хвилеводі почнімо з рівнянь Максвелла в середовищі

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\mathbf{E}, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

де $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ і $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Для електромагнітної хвилі, яка поширюється вздовж осі z, розв'язок шукаємо у вигляді

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x)e^{i(\beta z-\omega t)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x)e^{i(\beta z-\omega t)}. \tag{4}$$

Підставляємо шуканий розв'язок у (1) і знаходимо

$$\frac{\epsilon\omega}{c}E_x = \beta H_y, \tag{5}$$

$$\frac{\epsilon\omega}{c}E_y = -i\frac{\partial H_z}{\partial x} - \beta H_x, \tag{6}$$

$$\frac{\epsilon\omega}{c}E_z = i\frac{\partial H_y}{\partial x}. \tag{7}$$

Аналогічно рівняння (2) запишемо

$$\frac{\omega}{c}H_x = -\beta E_y, \tag{8}$$

$$\frac{\omega}{c}H_y = i\frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta E_x, \tag{9}$$

$$\frac{\omega}{c}H_z = -i\frac{\partial E_y}{\partial x}. \tag{10}$$

Рівняння (5)–(10) розпадаються на дві незалежні системи рівнянь. Так, рівняння (6), (8), (10) містять E_y, H_x, H_z, які становлять моди ТЕ-типу, а рівняння (5), (7), (9) містять E_x, E_z, H_y, які становлять моди ТМ-типу (див., наприклад [12]). Зауважимо, що в ТЕ-моді електричне поле напрямлене вздовж осі y і є перпендикулярним до напрямку поширення хвилі, тоді як магнітне поле містить також повздовжній складник і напрямлене під певним кутом до напрямку поширення хвилі. Для ТМ-моди, навпаки, магнітне поле напрямлене вздовж осі y і є перпендикулярним до напрямку поширення хвилі, електричне поле містить також повздовжній складник і напрямлене під певним кутом до напрямку поширення хвилі. При цьому напруженості полів за величиною змінюються вздовж напрямку x.

Система рівнянь для ТЕ-мод зводиться до рівняння другого порядку для E_y

$$-\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - n^2(x)\frac{\omega^2}{c^2}E_y + \beta^2 E_y = 0. \tag{11}$$

Це рівняння на власні значення $-\beta^2$.

ТМ-моди описуються таким рівнянням для H_y

$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{n^2(x)}\frac{\partial}{\partial x}H_y - \frac{\omega^2}{c^2}H_y + \frac{\beta^2}{n^2(x)}H_y = 0. \tag{12}$$

Домножимо ліву і праву частини рівняння (12) на $n^2(x)$

$$-n^2(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{n^2(x)}\frac{\partial}{\partial x}H_y - \frac{\omega^2}{c^2}n^2(x)H_y + \beta^2 H_y = 0. \tag{13}$$

У наближенні слабкої залежності показника заломлення від координат доданками, які містять $n'(x)$, можна знехтувати. Тоді $n^2(x)$ у першому доданку рівняння (13) для H_y скорочується і воно стає аналогічне до рівняння (11) для E_y.

Звернімо увагу на асиметрію точних рівнянь (11) і (13), які описують відповідно ТЕ- і ТМ-моди, стосовно до заміни електричного поля на магнітне і навпаки. Така асиметрія закладена з самого початку вибором для діелектричного хвилевода магнітної проникності $\mu = 1$, а діелектричної проникності, залежної від координат, $\epsilon = \epsilon(x)$.

III. КВАНТОВОМЕХАНІЧНА АНАЛОГІЯ ПОШИРЕННЯ ТЕ- І ТМ-МОД

Розгляньмо спершу ТЕ-моди. Як бачимо, рівняння (11) повністю аналогічне стаціонарному рівнянню Шрединґера

$$-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = E\psi, \tag{14}$$

де $\hbar = 1$, маса $2m = 1$, енергія $E = -\beta^2$, хвильова функція $\psi = E_y$, потенціальна енергія

$$V(x) = V_{\text{ТЕ}}(x) = -n^2(x)\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{15}$$

Цю аналогію для ТЕ-мод зауважили давно й широко використовують у літературі.

На відміну від рівняння (11), подібну аналогію рівняння (12) для довільної залежності показника заломлення від координат не досліджували. Розглядали тільки слабку залежність показника заломлення від координат, коли рівняння (12) зводиться до (11). Ми розглянемо аналогію рівняння (12), яке описує ТМ-моди, з рівнянням Шрединґера для довільної залежності показника заломлення від координат.

Найперше зауважимо, що рівняння (12) аналогічне стаціонарному рівнянню Шрединґера, з масою, залежною від координат (див., наприклад [13–15])

$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2m(x)}\frac{\partial}{\partial x}\psi + V(x)\psi = E\psi. \tag{16}$$

Як бачимо, є повна аналогія рівнянь (12) і (16) при $2m(x) = n^2(x)$, $V(x) = \beta^2/n^2(x)$, $E = \omega^2/c^2$, $\psi = H_y$. Звернімо увагу на те, що роль власних значень у цьому рівнянні виконує ω^2/c^2, тоді як у рівнянні (11) власні значення — це $-\beta^2$.

Тепер покажемо, що рівняння (13) можна звести до стаціонарного рівняння Шрединґера для частинки зі сталою масою в деякому ефективному потенціальному полі. Зауважимо, що оператор із першого доданка в цьому рівнянні

$$\hat{T} = -n^2(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{n^2(x)}\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{n'}{n}\frac{\partial}{\partial x} \tag{17}$$

містить першу похідну, отже рівняння (13) також містить першу похідну. Щоби позбутися її, розв'язок шукаємо у вигляді $H_y = e^{\phi}h_y$ і отримуємо

$$\hat{T}e^{\phi}h_y = e^{\phi}\Big[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\phi')^2 - \phi'' - 2\left(\phi' - \frac{n'}{n}\right)\frac{\partial}{\partial x} + 2\phi'\frac{n'}{n}\Big]h_y. \quad (18)$$

Довільну функцію ϕ добираємо з умови

$$\phi' - \frac{n'}{n} = 0, \quad (19)$$

при якій зникає перша похідна. У результаті знаходимо

$$\phi = \ln n + \ln c. \quad (20)$$

Таким чином, $H_y = cn(x)h_y$, де c — довільна константа. Для нової функції $h_y(x)$ отримуємо рівняння

$$-\frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} + \left(-n^2(x)\frac{\omega^2}{c^2} + \left(\frac{n'(x)}{n(x)}\right)^2 - \left(\frac{n'(x)}{n(x)}\right)'\right)h_y + \beta^2 h_y = 0. \quad (21)$$

Подібно, як і в рівнянні (11), роль власних значень у цьому рівнянні виконує $-\beta^2$. Рівняння (21) повністю аналогічне рівнянню Шредингера для частинки зі сталою масою $2m = 1$ у потенціальному полі

$$V(x) = V_{\rm TM}(x) = -n^2(x)\frac{\omega^2}{c^2} + \left(\frac{n'(x)}{n(x)}\right)^2 - \left(\frac{n'(x)}{n(x)}\right)'. \quad (22)$$

Порівняймо ефективну потенціальну енергію для ТМ-моди (22) з ефективною потенціальною енергією для ТЕ-моди (15):

$$V_{\rm TM}(x) = V_{\rm TE}(x) + U(x), \quad (23)$$

де ми ввели позначення

$$U(x) = \left(\frac{n'(x)}{n(x)}\right)^2 - \left(\frac{n'(x)}{n(x)}\right)'. \quad (24)$$

Цікаво зауважити, що вираз для $U(x)$ збігається з виразом для потенціальної енергії, який виникає в межах суперсиметричної квантової механіки [16]. Роль суперпотенціалу тут виконує $W(x) = n'(x)/n(x)$. Зауважимо, що в границі слабкої залежності показника заломлення від координат $n'(x) \to 0$ і доданком $U(x)$ можна знехтувати. Тоді $V_{\rm TM}(x) = V_{\rm TE}(x)$ і поширення ТЕ- і ТМ-мод описується тими самими рівняннями.

Розгляньмо кілька прикладів з явною залежністю показника заломлення від координати, коли залежністю показника заломлення від координат нехтувати не можна.

Приклад 1

$$n^2(x) = 1 + \frac{\gamma}{\cosh^2(x)}, \quad (25)$$

де $\gamma > 0$. Такий показник заломлення дуже часто використовують, вивчаючи ґрадієнтне оптоволокно. У цьому випадку

$$V_{\rm TE}(x) = -\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{\gamma}{\cosh^2(x)}\right) \quad (26)$$

є точно розв'язуваним. Ефективний потенціал для ТМ-моди визначається формулою (22) і в цьому випадку є

$$V_{\rm TM}(x) = -\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{\gamma}{\cosh^2(x)}\right) + \gamma\frac{1 + \gamma - 2\sinh^2(x)}{(\cosh^2(x) + \gamma)^2}. \quad (27)$$

При $x \to \pm\infty$ знаходимо

$$V_{\rm TM}(x) = V_{\rm TE}(x) \to -\frac{\omega^2}{c^2}. \quad (28)$$

Потенціал $V_{\rm TE}(x)$ має мінімум у точці $x = 0$ і в околі цієї точки поводиться так:

$$V_{\rm TE}(x) = -\frac{\omega^2}{c^2}(1 + \gamma) + \frac{\omega^2}{c^2}\gamma x^2. \quad (29)$$

Для потенціалу $V_{\rm TM}(x)$ в околі точки $x = 0$ знаходимо

$$V_{\rm TM}(x) = -\frac{\omega^2}{c^2}(1 + \gamma) + \frac{\gamma}{(1 + \gamma)} + \gamma\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4}{(1 + \gamma)^2}\right)x^2. \quad (30)$$

При $\omega^2/c^2 < 4/(1 + \gamma)^2$ ефективний потенціал $V_{\rm TM}(x)$ має локальний максимум у точці $x = 0$ і є двоямним, тоді як $V_{\rm TE}(x)$ при всіх значення параметрів є одноямним.

Приклад 2. Мета цього прикладу показати, що на відміну від $V_{\rm TE}(x)$, потенціал $V_{\rm TM}(x)$ може містити синґулярні доданки. Розгляньмо

$$n(x) = n_0 e^{\alpha|x|}. \quad (31)$$

Для цього випадку знаходимо

$$V_{\rm TE}(x) = -\frac{\omega^2}{c^2}n_0^2 e^{\alpha 2|x|}, \quad (32)$$

$$V_{\rm TM}(x) = V_{\rm TE}(x) + \alpha^2 - 2\alpha\delta(x), \quad (33)$$

де $\delta(x)$ — дельта-функція, яка спричинена доданком $U(x)$ в (23). Таким чином, несинґулярний показник заломлення дає змогу змоделювати синґулярний потенціал дельта-типу. Це своєю чергою дає змогу за допомогою ТМ-мод експериментально досліджувати поведінку частинки в дельта-потенціалі.

IV. ВИСНОВКИ

У цій статті ми досліджуємо квантовомеханічну аналогію поширення елетромагнітної хвилі у планарному хвилеводі. Давно відомо, що рівняння для ТЕ-моди (11) збігається з рівнянням Шредингера для частинки зі сталою масою в ефективному потенціальному полі $V_{\rm TE}(x)$ (15). Легко зауважити, що ТМ-мода (12) також описується рівнянням Шредингера, проте з масою, залежною від координат. Ми показали, що рівняння (12) для ТМ-моди можна звести точно до рівняння Шредингера для частинки зі сталою масою (21) в ефективній потенціальній енергії $V_{\rm TM}(x)$ (22). Зауважимо, що в границі слабкої залежності показника заломлення від координат $V_{\rm TM}(x) = V_{\rm TE}(x)$ і поширення ТЕ- і ТМ-мод описується тими самими рівняннями. У випадку не слабкої залежності показника заломлення від координат приклади 1 і 2 демонструють суттєву відмінність ефективної потенціальної енергії для ТМ-мод від потенціальної енергії для ТЕ-мод. Так, на прикладі 1 ми показали, що тоді, як $V_{\rm TE}(x)$ є одноямною потенціальною енергією, $V_{\rm TM}(x)$ може бути двоямною. Приклад 2 демонструє, що за допомогою $V_{\rm TM}(x)$ можна організувати сингулярний потенціал, а саме, дельта-потенціал, тоді як $V_{\rm TE}(x)$ не може бути сингулярним через скінченність показника заломлення. Цікаво те, що є змога не тільки теоретично, а й експериментально дослідити поведінку частинки в дельта-потенціалі. А саме, експериментальне дослідження ТМ-моди внаслідок квантовомеханічної аналогії в цьому випадку аналогічне експериментальному дослідженню поведінки частинки в дельта-потенціалі.

[1] R. Black, A. Ankiewicz, Am. J. Phys. **53**, 554 (1985).
[2] J. Evans, Am. J. Phys. **61**, 347 (1993).
[3] C. Tzanakis, Eur. J. Phys. **19**, 69 (1998).
[4] M. A. Man'ko, J. Phys.: Conf. Ser. **99**, 012012 (2008).
[5] S. Longhi, P. Laporta, M. Belmonte, E. Recami, Phys. Rev. E **65**, 046610 (2002).
[6] S. Longhi, D. Janner, M. Marano, P. Laporta, Phys. Rev. E **67**, 036601 (2003).
[7] M. Ornigitti, G. Della Valle, D. Gatti, S. Longhi, Phys. Rev. A **76**, 023833 (2007).
[8] S. N. Kulkarmi, S. R. Patricar, J. Mod. Optics **59**, 1391 (2012).
[9] Ch. Strelow *et al.*, Phys. Rev. B **85**, 155329 (2012).
[10] W. G. Scheibenzuber *et al.*, Phys. Rev. B **80**, 115320 (2009).
[11] M.-A. Miri, M. Heinrich, D. N. Christodoulides, Phys. Rev. A **87**, 043819 (2013).
[12] Х.-Г. Унгер, *Планарные и волоконные оптические волноводы* (Мир, Москва, 1980).
[13] C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **37**, 4267 (2004).
[14] D. Bagchi, A. Banerjee, C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **38**, 2929 (2005).
[15] I. O. Vakarchuk, J. Phys. A **38**, 4727 (2005).
[16] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).

QUANTUM MECHANICAL ANALOGY OF LIGHT PROPAGATION IN PLANAR WAVEGUIDES

H. P. Laba[1], V. M. Tkachuk[2]
[1] *Department of Telecomunications, Lviv Polytechnic National University*
12, S. Bandery St., Lviv, UA–79013, Ukraine,
[2] *Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,*
12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine,
e-mail: tkachuk@ktf.franko.lviv.ua

We establish an exact analogue of equations describing the propagation of TE and TM modes in planar waveguide with an arbitrary continuous dependence of refractive index on coordinates with stationary Schrödinger equation. The effective potential energies involved in Schrödinger equation for TE and TM modes are different but in the limit of a weak dependence of refractive index on the coordinates they coincide. For comparison of these potential energies in the case of arbitrary dependence of refractive index on cordinates we consider examples which show essential difference between effective potential energies for TE and TM modes.