ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 18, № 2/3 (2014) 2004(5 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 18, No. 2/3 (2014) 2004(5 p.)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ПЕРЕРІЗ ФОТОЕФЕКТУ В ДЕФОРМОВАНОМУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ

І. О. Вакарчук, Ю. М. Дяків
Кафедра теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка, вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна

(Отримано 17 червня 2014 р.; в остаточному вигляді — 30 червня 2014 р.)

Розраховано диференціальний переріз фотоефекту атома в деформованому електромагнітному полі, коли компоненти узагальнених координат та імпульсів підпорядковані деформованим дужкам Пуассона. Диференціальний переріз зводиться до звичайного при наближенні деформаційного параметра β до нуля, а також зменшується зі збільшенням β і прямує до нуля при $\beta \to \infty$.

Ключові слова: нелінійне поле, мінімальна довжина, фотоефект.

PACS number(s): 03.70.+k

I. ВСТУП

Дослідження квантових систем із деформованими дужками Пуассона вперше з'явилися в роботах Снайдера [1, 2] і після цього викликали до себе значний інтерес у різних галузях теоретичної фізики. Загалом, для одновимірного випадку деформація задається через величину f, яка є функцією узагальнених координати $\hat{Q}$ та імпульсу $\hat{P}$ так, що: $f = f(\hat{Q}, \hat{P})$. Відтак комутатор для відповідних операторів $\hat{Q}$ та $\hat{P}$ дорівнює $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar f$ (для недеформованого простору $f = 1$). Деформацію розглядають як незначну, тобто середнє значення f не повинне надто сильно відрізнятися від одиниці.

Особливо цікавою є деформація дужок Пуассона, що квадратично залежить від узагальненого імпульсу: $f = 1 + \beta\hat{P}^2$ (уперше представлена у [3, 4]). Вона приводить до існування мінімальної ненульової довжини, тобто до квантування простору.

Із деформацією що приводить до існування мінімальної довжини, проаналізовано багато задач. Зокрема, одновимірний гармонічний осцилятор [4–6], D-вимірний ізотропний гармонічний осцилятор [7, 8], тривимірний осцилятор у теорії Дірака [9], (1+1)-вимірний осцилятор у теорії Дірака з Лоренц-коваріантною деформованою алґеброю [10], одновимірна кулонівська задача [11] та синґулярний обернено-квадратичний потенціал [12, 13]. Тривимірну кулонівську задачу з деформованою алґеброю Гайзенберґа розглянуто в [14–17], а у [18–20] досліджено ультрахолодні нейтрони у ґравітаційному полі з мінімальною довжиною.

Деформація з мінімальною довжиною може бути розширена для довільного простору узагальнених координат та імпульсів. Наприклад, електромагнітне поле можна розглядати як систему осциляторів із деформованими комутаційними співвідношеннями між узагальненими координатами та імпульсами. Зрозуміло, що в цьому випадку отримують деформацію власне поля, а не реального простору.

Таку модель електромагнітного поля досліджували у [21]. Для такого ж випадку у [22] розглянуто теорію випромінювання та поглинання квантів та, зокрема, розраховано інтенсивність спонтанного випромінювання. Ефект Казимира для деформованого поля аналізували у [23, 24].

Варто зауважити, що зацікавлення деформацією, що квадратично залежить від узагальненого імпульсу, також пов'язане з дослідженням у теорії струн та квантовій ґравітації, які передбачають існування мінімальної довжини [25–27].

У цій праці простежимо взаємодію деформованого електромагнітного поля з атомною системою у просторі недеформованих координат та обчислимо значення диференціального перерізу фотоекту як функцію від параметра деформації.

II. ВИХІДНІ РІВНЯННЯ

Ми розглядаємо взаємодію електромагнітного поля з атомною системою. Гамільтоніан, що описує поле, після представлення його як суми гамільтоніанів осциляторів, має такий вигляд:

$$\hat{H} = \sum_k \sum_\alpha \left(\frac{\hat{P}_{k,\alpha}^2}{2} + \frac{\omega_k^2 \hat{Q}_{k,\alpha}^2}{2} \right). \tag{1}$$

Тут k — хвильовий вектор, α визначає поляризацію, $\omega_k = ck$-циклічна частота. Узагальнені оператори координат та імпульсу $\hat{Q}_{k,\alpha}$, $\hat{P}_{k,\alpha}$ задовольняють деформовані комутаційні співвідношення з деформаційним параметром $\beta \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\hat{Q}_{k,\alpha}\hat{P}_{k,\alpha} - \hat{P}_{k,\alpha}\hat{Q}_{k,\alpha} = i\hbar(1 + \beta\hat{P}_{k,\alpha}^2), \\ &[\hat{P}_{k,\alpha}, \hat{P}_{k',\alpha'}] = 0, \\ &[\hat{Q}_{k,\alpha}, \hat{Q}_{k',\alpha'}] = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Як добре відомо, такі комутаційні співвідношення приводять до нерівності $\sqrt{\left\langle \hat{Q}_{k,\alpha}^2 \right\rangle} \geq \hbar\sqrt{\beta}$, тобто до існування мінімальної довжини [3, 4]. Узагалі параметр деформації може бути залежним від хвильового вектора: $\beta = \beta_k$. Для простоти записів у цій праці ми вважатимемо, що β не залежить від k, однак у кінцевому результаті легко відновити цю залежність простою заміною β на β_k.

Уводячи нові оператори координат $\hat{q}_{k,\alpha}$ та імпульсу $\hat{p}_{k,\alpha}$, такі, що

$$\hat{q}_{k,\alpha} = \hat{Q}_{k,\alpha}, \quad \hat{P}_{k,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg}(\hat{p}_{k,\alpha}\sqrt{\beta}), \tag{3}$$

ми можемо переписати гамільтоніан так:

$$\hat{H} = \sum_k \sum_\alpha \left(\frac{\omega_k^2 \hat{q}_{k,\alpha}^2}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2(\hat{p}_{k,\alpha}\sqrt{\beta})}{2\beta} \right). \tag{4}$$

При цьому нові оператори є канонічно спряженими (у чому легко переконатися за допомогою простих перетворень):

$$\hat{q}_{k,\alpha}\hat{p}_{k,\alpha} - \hat{p}_{k,\alpha}\hat{q}_{k,\alpha} = i\hbar. \tag{5}$$

Оскільки ми розглядаємо систему осциляторів, то векторний потенціал $\boldsymbol{A}$ у такому випадку задається звично:

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_\alpha \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha} \times \left[\frac{1}{2}\left(\hat{Q}_{k,\alpha} - \frac{\hat{P}_{k,\alpha}}{i\omega_k} \right) e^{i\boldsymbol{kr}} + \frac{1}{2}\left(\hat{Q}_{k,\alpha} + \frac{\hat{P}_{k,\alpha}}{i\omega_k} \right) e^{-i\boldsymbol{kr}} \right], \tag{6}$$

або ж у представленні нових операторів:

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_\alpha \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha} \times \left[\hat{q}_{k,\alpha} \cos(\boldsymbol{kr}) - \frac{\operatorname{tg}(\hat{p}_{k,\alpha}\sqrt{\beta})}{\omega_k\sqrt{\beta}} \sin(\boldsymbol{kr}) \right]. \tag{7}$$

Оператор взаємодії поля з атомом має вигляд:

$$\hat{V} = -\frac{e}{mc}(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{p}}) + \frac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2, \tag{8}$$

тут $\hat{\boldsymbol{p}}$ — оператор імпульсу електрона, заряд і маса якого дорівнюють відповідно e та m.

III. ХВИЛЬОВІ ФУНКЦІЇ ТА ЕНЕРҐЕТИЧНІ РІВНІ ДЕФОРМОВАНОГО ПОЛЯ

Задача на знаходження власних функцій та власних значень оператора (4) має точний розв'язок. У [22] показано, що в імпульсному представленні хвильова функція задається як добуток $\psi_{N_{\boldsymbol{k},\alpha}}(p_{\boldsymbol{k},\alpha})$ — власних функцій для $(\boldsymbol{k},\alpha)$ моди гамільтоніана, а саме:

$$\psi_{\ldots,N_{\boldsymbol{k},\alpha},\ldots}(\ldots,p_{\boldsymbol{k},\alpha},\ldots) = \prod_{\boldsymbol{k}} \prod_\alpha \psi_{N_{\boldsymbol{k},\alpha}}(p_{\boldsymbol{k},\alpha}). \tag{9}$$

$N_{\boldsymbol{k},\alpha} = 0.1, 2\ldots$ — квантові числа поля. Для зручності опускаємо індексацію $\boldsymbol{k},\alpha$ у виразах для операторів $\hat{q}_{\boldsymbol{k},\alpha}$, $\hat{p}_{\boldsymbol{k},\alpha}$, частоти ω_k:

$$\hat{p}_{\boldsymbol{k},\alpha} \to p, \quad \hat{q}_{\boldsymbol{k},\alpha} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_{\boldsymbol{k},\alpha}} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial p}, \quad \omega_k \to \omega.$$

Отже, хвильова функція поля, що задається системою осциляторів, в імпульсному представленні має вигляд [22]:

- для основного стану $N_{\boldsymbol{k},\alpha} = 0$:

$$\psi_0(p) = \beta^{1/4} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}} \cos^\alpha p, \tag{10}$$

- для $N_{\boldsymbol{k},\alpha} \geq 1$:

$$\psi_{N_{\boldsymbol{k},\alpha}}(p) = \beta^{1/4} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+N_{\boldsymbol{k},\alpha}+1)\Gamma(N_{\boldsymbol{k},\alpha}+2\alpha)}{N_{\boldsymbol{k},\alpha}!\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+N_{\boldsymbol{k},\alpha}+1/2)\Gamma(2N_{\boldsymbol{k},\alpha}+2\alpha)}} \times \left(-\frac{d}{d\bar{p}} + \alpha \operatorname{tg}\bar{p} \right) \ldots \left(-\frac{d}{d\bar{p}} + (\alpha + N_{\boldsymbol{k},\alpha} - 1)\operatorname{tg}\bar{p} \right) \cos^{\alpha+N_{\boldsymbol{k},\alpha}} \bar{p}. \tag{11}$$

Тут

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{\beta\hbar\omega}\sqrt{1 + \left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)^2} \right]. \tag{12}$$

Із урахуванням того, що імпульс p змінюється в межах від $-\pi/(2\sqrt{\beta})$ до $\pi/(2\sqrt{\beta})$, для зручності у виразі, що описує хвильову функцію, уведено безрозмірний імпульс $\bar{p} = p\sqrt{\beta}$.

Нормування хвильових функцій відбувається звично:

$$\int_{-\pi/(2\sqrt{\beta})}^{\pi/(2\sqrt{\beta})} \psi_{n'}(p)\psi_n(p)dp = \delta_{n'n}. \tag{13}$$

Енерґетичні рівні поля, як системи гармонічних осциляторів, є власними значеннями гамільтоніана (4) і задаються таким виразом [22]:

$$E_{\ldots,N_{\boldsymbol{k},\alpha},\ldots} = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_\alpha \hbar\omega_k \left[\left(N_{\boldsymbol{k},\alpha} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{\beta\hbar\omega_k}{2}\right)^2} + \frac{\beta\hbar\omega_k}{2}\left(N_{\boldsymbol{k},\alpha}^2 + N_{\boldsymbol{k},\alpha} + \frac{1}{2} \right) \right]. \tag{14}$$

Енерґія кванта поля визначається як різниця між значеннями енерґій поля при наявності одного фотона й вакумного стану:$\hbar\Omega_k = E_{\ldots,0,N_{\boldsymbol{k},\alpha}=1,0,\ldots} - E_{\ldots,0,\ldots}$. Виходячи з попереднього рівняння, отримуємо:

$$\Omega_k = \omega_k\Big[\sqrt{1+\Big(\frac{\beta\hbar\omega_k}{2}\Big)^2}+\beta\hbar\omega_k\Big]. \tag{15}$$

IV. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ПЕРЕРІЗ ФОТОЕФЕКТУ

Розгляньмо взаємодію атома з полем. У початковий момент електрон в атомі перебуває у стані $|1s\rangle$, з енерґією E_{1s}. Поле ж описується хвильовою функцією $|0,\ldots,N_{\boldsymbol{k},\alpha}=1,0,\ldots\rangle$, що задає наявність одного фотона з енерґією $\hbar\Omega_k$. Отож, початковий стан системи $|i\rangle = |1s\rangle|0,\ldots,N_{\boldsymbol{k},\alpha}=1,0,\ldots\rangle$. Кінцевий стан системи $|f\rangle$ описує поле у вакуумному стані та вільний електрон із енерґією $\boldsymbol{p}^2/2m$ і хвильовою функцією $|\boldsymbol{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{pr}/\hbar} : |f\rangle = |\boldsymbol{p}\rangle|\ldots,0,\ldots\rangle$.

Відповідно, повну енерґію початкового E_i та кінцевого E_f станів системи визначаємо як:

$$E_i = E_{1s}+E_0+\hbar\Omega_k,\quad E_f = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+E_0, \tag{16}$$

тут E_0 — енерґія вакууму електромагнітного поля.

Імовірність квантового переходу системи "атом+поле" із початкового стану $|i\rangle$ у кінцевий $|f\rangle$ задається як

$$w_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|\hat{V}|i\rangle|^2\delta(E_f-E_i)$$

.

Обчислюючи беремо до уваги тільки перший, лінійний за векторним потенціалом $\boldsymbol{A}$, доданок із оператора взаємодії (8):

$$w_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}\Big(\frac{e}{mc}\Big)^2|\langle f|\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{p}}|i\rangle|^2\delta\Big(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-E_{1s}-\hbar\Omega_k\Big). \tag{17}$$

Дельта-функція забезпечує виконання закону збереження енерґії:

$$\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-\hbar\Omega_k-E_{1s}=0.$$

E_{1s} — це енерґія йонізації атома або ж робота виходу I, узята з від'ємним знаком: $E_{1s}=-I$. Отже, ми отримали закон фотоефекту:

$$\hbar\Omega_k = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+I. \tag{18}$$

Використавши явний вигляд векторного потенціалу, одержуємо матричний елемент:

$$\langle f|\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{p}}|i\rangle = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}}\Big[\langle\boldsymbol{p}|(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\boldsymbol{p})\cos(\boldsymbol{kr})|1s\rangle\langle 0|\hat{q}_{\boldsymbol{k},\alpha}|1\rangle$$
$$-\langle\boldsymbol{p}|(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\boldsymbol{p})\sin(\boldsymbol{kr})|1s\rangle\langle 0|\frac{\mathrm{tg}(\hat{p}_{\boldsymbol{k},\alpha}\sqrt{\beta})}{\omega_k\sqrt{\beta}}|1\rangle\Big], \tag{19}$$

тут $|0\rangle = |\ldots,0,\ldots\rangle, |1\rangle = |0,\ldots,N_{\boldsymbol{k},\alpha}=1,0\ldots\rangle$.

Узявши до уваги вигляд хвильових функцій поля (10), обчислюємо матричні елементи операторів поля (інтеґрали зводимо до B-інтеґралів Ейлера):

$$\langle 0|\hat{q}_{\boldsymbol{k},\alpha}|1\rangle = -i\hbar\frac{\sqrt{2\beta(\alpha_k+1)}}{2\alpha_k+1}\Big[\frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k+1/2)}\Big]^2, \tag{20}$$

$$\langle 0|\,\mathrm{tg}(\hat{p}_{\boldsymbol{k},\alpha}\sqrt{\beta})|1\rangle = \frac{\sqrt{2(\alpha_k+1)}}{\alpha_k(2\alpha_k+1)}\Big[\frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k+1/2)}\Big]^2. \tag{21}$$

Скориставшись явним виразом для $|1s\rangle$-стану водневої задачі,

$$|1s\rangle = \frac{e^{-r/a}}{\sqrt{\pi a^3}},\qquad a=\frac{h^2}{me^2}\text{ — борівський радіус,}$$

тим, що плоска хвиля є власною функцією оператора імпульсу $\hat{\boldsymbol{p}}$ та умовою поперечності поля $(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\boldsymbol{k})=0$, отримуємо

$$\langle\boldsymbol{p}|e^{i\boldsymbol{kr}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\hat{\boldsymbol{p}})|1s\rangle = (\langle 1s|e^{-i\boldsymbol{kr}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\hat{\boldsymbol{p}})|\boldsymbol{p}\rangle)^* = \frac{8\pi a^3}{(1+q_-^2a^2)^2}\frac{(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\boldsymbol{p})}{\sqrt{V\pi a^3}},$$
$$\langle\boldsymbol{p}|e^{-i\boldsymbol{kr}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\hat{\boldsymbol{p}})|1s\rangle = (\langle 1s|e^{i\boldsymbol{kr}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\hat{\boldsymbol{p}})|\boldsymbol{p}\rangle)^* = \frac{8\pi a^3}{(1+q_+^2a^2)^2}\frac{(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\boldsymbol{p})}{\sqrt{V\pi a^3}}.$$

Тут $\boldsymbol{q}_- = \boldsymbol{p}/\hbar-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{q}_+ = \boldsymbol{p}/\hbar+\boldsymbol{k}$ — імпульси передачі. Ураховуючи це й використавши формулу Ейлера, можна записати, що:

$$\langle\boldsymbol{p}|(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\hat{\boldsymbol{p}})\cos(\boldsymbol{kr})|1s\rangle = \frac{8\pi a^3(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\boldsymbol{p})}{\sqrt{V\pi a^3}}\frac{s}{s^2-t^2}, \tag{22}$$

$$\langle\boldsymbol{p}|(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\hat{\boldsymbol{p}})\sin(\boldsymbol{kr})|1s\rangle = \frac{8\pi a^3(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\boldsymbol{p})}{i\sqrt{V\pi a^3}}\frac{t}{s^2-t^2}. \tag{23}$$

Тут для зручності введено позначення

$$s = \Big[1+a^2\big(\frac{p^2}{\hbar^2}+k^2\big)\Big]^2+4a^4\frac{(\boldsymbol{pk})^2}{\hbar^2},$$
$$t = 4a^2\frac{(\boldsymbol{pk})}{\hbar}\Big[1+a^2\big(\frac{p^2}{\hbar^2}+k^2\big)\Big], \tag{24}$$

такі, що $(1+a^2q_-^2)^2 = s-t$, $(1+a^2q_+^2)^2 = s+t$.

Оскільки ми розглядаємо нерелятивістський випадок ($\hbar\Omega_k \ll mc^2$, $k=\omega_k/c$, тобто $\boldsymbol{k}$ — малі величини), то, узявши до уваги рівняння фотоефекту (18) та значення енерґії йонізації для $|1s\rangle$-стану атома водню $I = \dfrac{e^2}{2a} = \dfrac{\hbar^2}{2ma^2}$, перепишемо величини s та t:

$$s = \frac{\hbar^2}{I^2}\left(\Omega_k^2 + \frac{(\boldsymbol{pk})^2}{m^2}\right), t = \frac{\hbar^2}{I^2}\frac{2\Omega_k(\boldsymbol{pk})}{m}. \tag{25}$$

Повний переріз фотоефекту визначаємо як відношення ймовірності переходу для всіх можливих значень імпульсу електрона, що вилітає з атома $w = \sum_{\boldsymbol{p}} w_{i\to f}$ до густини падаючого потоку фотонів $j = c/V$ (фотон у нашому випадку один):

$$\sigma = \frac{V}{c}\sum_{\boldsymbol{p}} w_{i\to f}.$$

Перейшовши від підсумовування до інтеґрування за $\boldsymbol{p}$ у сферичній системі координат та виділивши інтеґрування за кутами, можемо записати диференціальний переріз фотоефекту так:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V}{c}\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty p^2 w_{i\to f}\, dp. \tag{26}$$

Підставляючи в цей вираз отримані величини (19)–(23) та виконуючи завдяки дельта-функції інтеґрування за імпульсом p, отримуємо:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{32a^3e^2p}{\hbar^3\omega_k cm}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\boldsymbol{p})^2\frac{(\alpha_k\beta\hbar\omega_k s+t)^2}{(s+t)^2(s-t)^2}$$
$$\times\frac{4(\alpha_k+1)}{(2\alpha_k+1)^2\alpha_k^2\beta\hbar\omega_k}\left[\frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k+1/2)}\right]^4. \tag{27}$$

Увівши знерозмірений параметр деформації $\bar\omega = \beta\hbar\omega_k/2$, можна переписати останній вираз як:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{32a^3e^2p}{\hbar^3\omega_k cm}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\boldsymbol{p})^2\frac{(2\bar\alpha\bar\omega s+t)^2}{(s+t)^2(s-t)^2}\xi(\bar\omega), \tag{28}$$

де

$$\bar\alpha = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{\bar\omega}\sqrt{1+\bar\omega^2}\right],$$
$$\xi(\bar\omega) = \frac{2(\bar\alpha+1)}{(2\bar\alpha+1)^2\bar\alpha^2\bar\omega}\left[\frac{\Gamma(\bar\alpha+1)}{\Gamma(\bar\alpha+1/2)}\right]^4.$$

Обчислимо диференціальний переріз фотоефекту при $\beta=0$. Ураховуючи те, що $\bar\omega\to 0$ і $\bar\alpha\to 1/2\bar\omega\to\infty$ при $\beta\to 0$, та розклад гамма-функції при безмежному арґументі, $\Gamma(z+c)\backsim\sqrt{2\pi}e^{-z}z^{z+c-1/2}$ для $z\to\infty$ [28], отримуємо $\xi(\bar\omega)\to 1$. У такому разі вираз (27) зводиться до диференціального перерізу в недеформованому полі (див., наприклад, [29]):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{32a^3e^2p}{\hbar^3\omega_k cm}\frac{(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\boldsymbol{p})^2}{(1+a^2q_-^2)^4}. \tag{29}$$

Для граничного випадку великих деформацій, $\beta\to\infty$, $\bar\omega\to\infty$, коефіцієнт $\xi(\bar\omega)$ обернено пропорційний до параметра деформації:

$$\xi(\bar\omega) = \frac{64}{9\pi^2\bar\omega},$$

а диференціальний переріз спадатиме, як β^{-3}:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{64a^3e^2p}{\hbar^3\omega_k cm}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\alpha}\boldsymbol{p})^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\frac{I^4}{\hbar^7\omega^7}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\frac{1}{\beta^3}. \tag{30}$$

Графік залежності коефіцієнта $\xi(\bar\omega)$ від знерозміреного параметра деформації $\bar\omega$ подано на рисунку 1.

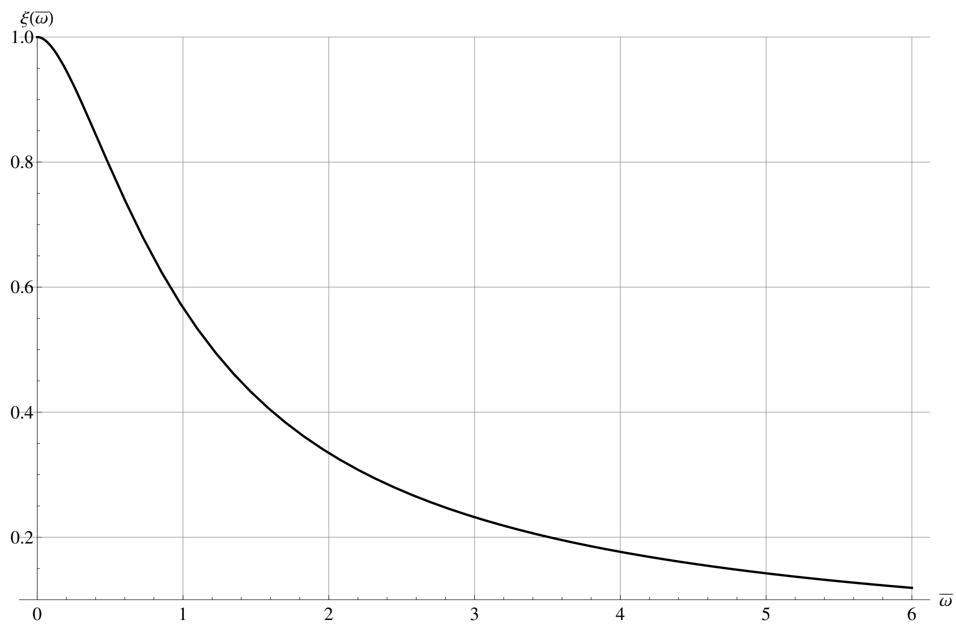

Рис. 1. Залежність коефіцієнта $\xi(\bar\omega)$ від знерозміреного параметру деформації.

[1] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
[2] H. S. Snyder, Phys. Rev. **72**, 6 (1947).
[3] A. Kempf, J. Math. Phys. **35**, 4483 (1994).
[4] A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann, Phys. Rev. D **52**, 1108 (1995).
[5] C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **36**, 10373 (2003).
[6] C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **37**, 10095 (2004).
[7] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi, Phys. Rev. D **65**, 125027 (2002).
[8] I. Dadic, L. Joncke, S. Melanac, Phys. Rev. D **67**, 087701 (2003).
[9] C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **38**, 1747 (2005).
[10] C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **39**, 10909 (2006).
[11] T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **39**, 2143 (2006).
[12] D. Bouaziz, M. Bawin, Phys. Rev. A **76**, 032112 (2007).
[13] D. Bouaziz, M. Bawin, Phys. Rev. A **78**, 032110 (2008).
[14] J. Brau, J. Phys. A **32**, 7691 (1999).
[15] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, T. Takeuchi, Phys. Rev. A **72**, 012104 (2005).
[16] M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A **74**, 012101 (2006).
[17] M. M. Stetsko, Phys. Rev. A **74**, 062105 (2006).
[18] F. Brau, F. Buisseret, Phys. Rev. D **74**, 036002 (2006).
[19] K. Nozari, Europhys. Lett. **92**, 50013 (2010).
[20] P. Pedram, K. Nozari, S. H. Taheri, J. High Energy Phys. **93**, 1103 (2011).
[21] A. Camacho, Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1687 (2003); Gen. Relativ. Gravit. **35**, 1153 (2003).
[22] I. O. Vakarchuk, Cond. Matter Phys. **11**, 409 (2008).
[23] I. O. Vakarchuk, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 185402 (2008).
[24] A. M. Frassino, O. Panella, Phys. Rev. D **85**, 045030 (2012).
[25] D. J. Gross, P. F. Mende, Nucl. Phys. B **303**, 407 (1988).
[26] M. Maggiore, Phys. Lett. B **304**, 65 (1993).
[27] E. Witten, Physics Today **49**, 24 (1996).
[28] М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям* (Наука, Москва, 1979).
[29] І. О. Вакарчук, *Квантова механіка* (ЛНУ ім. Івана Франка, Львів, 2012).

DIFFERENTIAL CROSS-SECTION OF THE PHOTOELECTRIC EFFECT IN THE DEFORMED ELECTROMAGNETIC FIELD

I. O. Vakarchuk, Iu. M. Diakiv
Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv, 12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine

We calculate the differential cross-section of photoelectric effect of the system of a non-linear quantum field where non-linearity is due to deformation of the Poisson brackets of the generalized coordinates and momenta. For $\beta \to \infty$ the differential cross-section reduces to a well-known expression of the differential cross-section of the photoelectronic effect for a non-deformed field. In the case of a considerable deformation ($\beta \to \infty$) the differential cross-section of the photoelectronic effect decreases as β^{-3}.