

## ГЕНЕРАЦІЯ ЩІЛИНИ У ВЕЙЛІВСЬКИХ НАПІВМЕТАЛАХ З КУЛОНІВСЬКОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ В ЗОВНІШНЬОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

П. О. Сухачов

*Фізичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
пр. Глушкова 4д, Київ, 03680, Україна*

(Отримано 28 березня 2014 р.; в остаточному вигляді — 02 липня 2014 р.)

Розглянуто динамічну генерацію щілини у вейлівському напівметалі з кулонівською взаємодією в наближенні найнижчого рівня Ландау. Ефекти поляризації та екранування кулонівської взаємодії враховано в першому порядку теорії збурень. Показано, що щілина може генеруватися у відсутності носіїв заряду у стані з кіральною фазою при будь-якому значенні константи зв'язку. За ненульової концентрації носіїв заряду генерація щілини енергетично не вигідна.

**Ключові слова:** вейлівський напівметал, генерація щілини, найнижчий рівень Ландау.

PACS number(s): 71.30.+h, 71.45.Lr, 71.70.Di

### I. ВСТУП

Нещодавно такі нові матеріали, як діраківські та вейлівські напівметали, привернули до себе значну увагу і швидко перемістилися на передній край теоретичних і експериментальних досліджень [1–4]. Особливі властивості цих двовимірних і тривимірних матеріалів пов'язані з незвичайними властивостями їх низькоенергетичних збуджень, які описують за допомогою, відповідно, рівняння Дірака або Вейля.

Прикладом двовимірного діраківського напівметалу є графен. Справді, в енергетичному спектрі графену є так звані діраківські точки, або вузли, тобто такі точки в зоні Брілюена, де валентна зона та зона провідності дотикаються. В околі цих точок ефективна теорія безспінового графену набуває діраківської форми  $H = v(k_x\sigma_x + k_y\sigma_y)$ , де  $\sigma$  є матрицями Паулі [5]. Саме завдяки наявності діраківських точок поблизу поверхні Фермі графен має свої особливі властивості, такі, як висока мобільність носіїв та електропровідність.

Історично першим тривимірним діраківським матеріалом є вісмут [6–9]. Електронні стани цього металу можна описати за допомогою масивного рівняння Дірака. Пізніше було помічено [10, 11], що величина ефективної маси може бути змінена допущанням вісмуту сурмою. При концентрації  $x \approx 0.03$  сплав  $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$  перетворюється на діраківський напівметал і являє собою тривимірний аналог графену.

Для того, щоб отримати вейлівський напівметал з діраківського, необхідно порушити симетрію щодо обертання часу або симетрію відносно просторової інверсії, що можна зробити, наприклад, за рахунок магнітного або електричного полів відповідно. У результаті тривимірна діраківська точка розщепиться на два вейлівські вузли протилежної кіральності, рознесені в імпульсному просторі, або по енергії.

Гарним прикладом динамічного перетворення діраківського напівметалу у вейлівський є динамічна генерація параметра кірального зсуву, тобто відстані між вейлівськими вузлами в імпульсному просторі,

розглянута у статті [12]. У ній автори показали, що відстань між вейлівськими вузлами залежатиме від величини зовнішнього магнітного поля та константи взаємодії. Як можливе експериментальне підтвердження цього факту вкажемо працю [13], де вивчено транспортні характеристики  $\text{Bi}_{0.97}\text{Sb}_{0.03}$  в зовнішньому магнітному полі. Для магнітного поля  $0.1 \text{ T} \leq B \leq 4 \text{ T}$  спостерігався так званий “негативний” магнетотопір, який пояснено наявністю кіральної аномалії, зумовленої розщепленням діраківського вузла на два вейлівські. Проте зростання опору для полів  $B \geq 4 \text{ T}$  залишилося не поясненим. Можливою причиною цього явища є динамічна генерація щілини, зумовлена наявністю кулонівської взаємодії та магнітного поля. Справді, магнітне поле може приводити до генерації щілини, подібно до магнітного каталізу, розглянутого в працях [14, 15]. Генерацію щілини за контактної взаємодії розглянуто в роботах [16–19]. Проте у зв'язку з малою густиною зарядів на поверхні Фермі у вейлівських напівметалах ефекти взаємодії суттєво не змінюють далекодіючого характеру кулонівської взаємодії, тому її врахування разом з ефектами поляризації є досить важливим для точнішого опису.

Отже, основною метою цієї статті є дослідження впливу більш реалістичної кулонівської взаємодії на генерацію щілини у вейлівських напівметалах. У зв'язку зі згаданими експериментами [13] важливо врахувати наявність зовнішнього магнітного поля, принаймні в наближенні найнижчого рівня Ландау, що є виправданим для сильних полів.

Надалі, для зручності будемо використовувати систему одиниць  $\hbar = c = 1$ .

### II. МОДЕЛЬ

Розглянемо модель вейлівського напівметалу з таким гамільтоніаном:

$$H^{(W)} = H_0^{(W)} + H_{\text{int}}, \quad (1)$$

де

$$H_0^{(W)} = \int d^3\mathbf{r} v_F \psi^\dagger(\mathbf{r}) \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - \mathbf{b}_0) & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + \mathbf{b}_0) \end{pmatrix} \psi(\mathbf{r}) \quad (2)$$

є вільним гамільтоніаном, який описує два вейлівські вузли протилежної кіральності (що вимагається теоремою Нільсена–Ніномії [20]), розділені вектором  $2\mathbf{b}_0$  в імпульсному просторі. Ідучи за [12, 19, 21, 22], будемо називати параметр  $\mathbf{b}_0$  початковим кіральним зсувом. Окрім того, вживатимемо такі позначення:  $v_F$  — швидкість Фермі і  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  — матриці Паулі.

Гамільтоніан  $H_{\text{int}}$  описує кулонівську взаємодію і має вигляд

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi^\dagger(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'), \quad (3)$$

де

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{e^2}{\kappa\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4)$$

є кулонівським потенціалом, а  $\kappa$  — діелектричною проникністю речовини. Включення магнітного поля відбувається стандартно:  $\nabla \rightarrow \nabla + ie\mathbf{A}$ . Векторний потенціал  $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$  описує в калібровці Ландау постійне магнітне поле  $\mathbf{B}$ , направлене вздовж осі  $z$ . Використовуючи кіральне представлення для матриць Дірака

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де  $I$  є двовимірною одиничною матрицею, отримаємо такий вираз для повного гамільтоніана:

$$H_{\text{mag}}^{(D)} = \int d^3\mathbf{r} \bar{\psi}(\mathbf{r}) [-iv_F(\boldsymbol{\gamma} \cdot (\nabla + ie\mathbf{A})) - \mu_0\gamma^0 - v_F(\mathbf{b}_0 \cdot \boldsymbol{\gamma})\gamma^5] \psi(\mathbf{r}) + \frac{e^2}{2\kappa\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \bar{\psi}(\mathbf{r}) \gamma^0 \psi(\mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \bar{\psi}(\mathbf{r}') \gamma^0 \psi(\mathbf{r}'). \quad (6)$$

### III. РІВНЯННЯ ДЛЯ ЩІЛИНИ

Виведення рівнянь для щілини розпочнімо з отримання ферміонних пропагаторів. Як випливає з кінетичної частини гамільтоніана (6), обернений вільний ферміонний пропагатор має такий вигляд:

$$iS^{-1}(r, r') = [(i\partial_t + \mu_0)\gamma^0 - v_F(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + v_F(\mathbf{b}_0 \cdot \boldsymbol{\gamma})\gamma^5] \delta^4(r - r'), \quad (7)$$

де  $r = (t, \mathbf{r})$ , а  $\boldsymbol{\pi} \equiv -i\nabla + e\mathbf{A}$ . Для повного оберненого пропагатора можемо написати такий самоузгоджений анзац:

$$iG^{-1}(r, r') = [(i\partial_t + \mu)\gamma^0 - v_F(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \gamma^0(\tilde{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\gamma})\gamma^5 e^{-2i(\mathbf{b}' \cdot \mathbf{r})\gamma^5} + v_F(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\gamma})\gamma^5 - \Delta e^{-2i(\mathbf{b}' \cdot \mathbf{r})\gamma^5}] \delta^4(r - r'), \quad (8)$$

де  $\mathbf{b}$  — перенормований за рахунок взаємодії параметр кірального зсуву і  $\Delta e^{-2i(\mathbf{b}' \cdot \mathbf{r})\gamma^5}$  є загальною формою щілини. Така форма кірального конденсату, де електрони та дірки спарюються з повним моментом  $2\mathbf{b}'$ , нагадує стан Ларкіна–Овчиннікова–Фулде–Феррела (ЛОФФ) [23, 24] в теорії надпровідності. На ферміонні пропагатори (7) та (8) можна також дивитися як на узагальнення відповідних виразів із праць [21, 22, 25].

На щастя, фазовий множник може бути усунутий за допомогою кірального перетворення

$$G^{-1}(r, r') = e^{-i(\mathbf{b}' \cdot \mathbf{r})\gamma^5} \bar{G}^{-1}(r, r') e^{-i(\mathbf{b}' \cdot \mathbf{r}')\gamma^5}, \quad (9)$$

де  $\bar{G}^{-1}(r, r')$  є оберненим ферміонним пропагатором зі звичайною діраківською масою  $\Delta$  та зі змінним кіральним зсувом  $\mathbf{b} \rightarrow \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{b}'$ . Параметр  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$  можна зіставити з аномальним магнітним моментом. Параметри  $\mu_0$  та  $\mu$  є відповідно термодинамічним та ефективним хімічними потенціалами. Варто зазначити, що

в цій статті не розглянуто перенормування кінетичної частини  $(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\gamma})$ . Це наближення виправдане, оскільки такі доданки не порушують кіральної симетрії, а отже суттєво не впливають на генерацію щілини.

Використовуючи формалізм Корнуела–Джеквіва–Томбуліса [26] та нехтуючи фотонним внеском запишімо ефективну дію

$$\Gamma(G) = -i \text{Tr}[\text{Ln} G^{-1} + S^{-1}G - 1] - \frac{e^2}{2} \int d^4r d^4r' \left( \text{tr}[\gamma^0 G(r, r)] D(r, r') \text{tr}[\gamma^0 G(r', r')] - \text{tr}[\gamma^0 G(r, r') D(r, r') \gamma^0 G(r', r)] \right), \quad (10)$$

де  $D(r, r') = D(r - r') = U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t')/e^2$ , слід у першому доданку взятий у функціональному сенсі, а в наступних — за спірним індексом. Із мінімуму ефективної дії  $\frac{\delta\Gamma(G)}{\delta G} = 0$  отримуємо рівняння Швінгера–Дайсона

$$iG^{-1}(r, r') = iS^{-1}(r, r') - e^2 \{ \gamma^0 G(r, r') \gamma^0 - \gamma^0 \text{tr}[\gamma^0 G(r, r')] \} D(r - r'). \quad (11)$$

Перший доданок у фігурних дужках описує обмінну (фоківську), а останній — пряму (гартривську) взаємодію. Використовуючи загальну нейтральність зразка та закон Гаусса

$$Q_{\text{ext}} - e \text{tr}[\gamma^0 G(r, r)] = 0, \quad (12)$$

можна показати, що гартривський доданок зникає. У рівнянні (11) перейдімо до пропагаторів без фази:

$$i\bar{G}^{-1}(r, r') = i\bar{S}^{-1}(r, r') - e^2 \gamma^0 \bar{G}(r, r') \gamma^0 D(r - r'), \quad (13)$$

де  $\bar{S}^{-1}(r, r')$  збігається з (7), але з заміною  $\mathbf{b}_0 \rightarrow \bar{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{b}_0 - \mathbf{b}'$ . Далі в імпульсному просторі маємо такий вираз для фотонного пропагатора:

$$D(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\kappa \epsilon_0 [\mathbf{k}^2 + \Pi(\omega, \mathbf{k})]}, \quad (14)$$

де  $\Pi(\omega, \mathbf{k})$  — поляризаційна функція. Оскільки носії заряду у вейлівських напівметалах є відносно повільними, то залежністю поляризаційної функції від частоти можна знехтувати  $\Pi(\omega, \mathbf{k}) \approx \Pi(0, \mathbf{k})$ . Повний обернений пропагатор (8) можна записати у зручній змішаній координатно-імпульсній формі:

$$i\bar{G}^{-1}(\omega, k_3; \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp) = i \int dt dz e^{-i\omega t + ik_3 z} \bar{G}^{-1}(t, z; \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp) = \left[ (\omega + \mu) \gamma^0 - v_F (\boldsymbol{\pi}_\perp \cdot \boldsymbol{\gamma}) - v_F k_3 \gamma^3 + \gamma^0 (\tilde{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \gamma^5 + v_F (\bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \gamma^5 - \Delta \right] \delta^2(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \quad (15)$$

де  $\boldsymbol{\pi} = \{\boldsymbol{\pi}_\perp, -i\partial_3\}$ . Далі будемо вважати:  $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = (0, 0, \tilde{\mu})$ ,  $\bar{\mathbf{b}}_0 = (0, 0, \bar{b}_0)$  та  $\bar{\mathbf{b}} = (0, 0, \bar{b})$ .

Детальні розрахунки ферміонних пропагаторів у представленні рівнів Ландау є доволі громіздкими й можуть бути знайдені в багатьох роботах (див., наприклад, праці [22, 25]). Наведемо лише остаточні результати в наближенні найнижчого рівня Ландау. Це наближення виправдане в сильних магнітних полях, які розглядаємо в цій статті. Отже, маємо такі вирази для повного, вільного, оберненого повного та оберненого вільного пропагаторів відповідно:

$$\begin{aligned} \bar{G}(\omega, k_3; \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp) &= e^{i\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp)} \tilde{G}(\omega, k_3; \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) = i e^{i\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp)} \frac{e^{-\frac{\xi}{2}} F(\omega, k_3) \mathcal{P}_-}{2\pi l^2 \bar{D}(\omega, k_3)}, \\ \bar{S}(\omega, k_3; \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp) &= e^{i\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp)} \tilde{S}(\omega, k_3; \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) = i e^{i\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp)} \frac{e^{-\frac{\xi}{2}} F_0(\omega, k_3) \mathcal{P}_-}{2\pi l^2 \bar{D}_0(\omega, k_3)}, \\ i\bar{G}^{-1}(\omega, k_3; \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp) &= i e^{i\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp)} \tilde{G}^{-1}(\omega, k_3; \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) = e^{i\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp)} \frac{e^{-\frac{\xi}{2}} Q(\omega, k_3) \mathcal{P}_-}{2\pi l^2}, \\ i\bar{S}^{-1}(\omega, k_3; \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp) &= i e^{i\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp)} \tilde{S}^{-1}(\omega, k_3; \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) = e^{i\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp)} \frac{e^{-\frac{\xi}{2}} Q_0(\omega, k_3) \mathcal{P}_-}{2\pi l^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega, k_3) &= (\omega + \mu - i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \tilde{\mu})^2 - v_F^2 k_3^2 - (\Delta + i v_F \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \bar{b})^2 + 2i\gamma^1 \gamma^2 (\tilde{\mu} + v_F \bar{b} \gamma^0) v_F k_3 \gamma^3, \\ F(\omega, k_3) &= [(\omega + \mu) \gamma^0 - v_F k_3 \gamma^3 - i v_F \bar{b} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 + \Delta + i \tilde{\mu} \gamma^1 \gamma^2] \tilde{F}(\omega, k_3), \\ \tilde{D}(\omega, k_3) &= \left[ (\omega + \mu)^2 + \tilde{\mu}^2 - \Delta^2 - v_F^2 \bar{b}^2 - v_F^2 k_3^2 \right]^2 - 4 \left[ v_F^2 k_3^2 (v_F^2 \bar{b}^2 - \tilde{\mu}^2) + (v_F \bar{b} \Delta + \tilde{\mu} (\omega + \mu))^2 \right], \\ Q(\omega, k_3) &= (\omega + \mu) \gamma^0 - v_F k_3 \gamma^3 + v_F \bar{b} i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 - \Delta + \tilde{\mu} i \gamma^1 \gamma^2, \end{aligned} \quad (17)$$

а нижній індекс 0 у коефіцієнтів формули (16) означає такі заміни:  $\mu \rightarrow \mu_0$ ,  $\bar{b} \rightarrow \bar{b}_0$ ,  $\tilde{\mu} \rightarrow \tilde{\mu}_0$  та  $\Delta \rightarrow 0$ . Також було вжито такі скорочення:

$$\begin{aligned} s_\pm &= \text{sign}(eB), \quad \mathcal{P}_\pm = \frac{1 \pm i s_\pm \gamma^1 \gamma^2}{2}, \\ \xi &= \frac{(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)^2}{2l^2}, \quad \Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp) = \frac{-s_\pm (x + x')(y - y')}{2l^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

У рівнянні Швінгера–Дайсона (13), швінгерівська фаза  $\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp)$  може бути скороченою, а саме рівняння переписане в координатно-імпульсному вигляді

$$i\tilde{G}^{-1}(\omega, k_3; \mathbf{r}_\perp) = i\tilde{S}^{-1}(\omega, k_3; \mathbf{r}_\perp) - \frac{e^2}{\epsilon_0 \kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_3}{2\pi} \gamma^0 \tilde{G}(\Omega, q_3; \mathbf{r}_\perp) \gamma^0 D(k_3 - q_3, -\mathbf{r}_\perp), \quad (19)$$

де

$$D(k_3 - q_3, \mathbf{r}_\perp) = \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi} \frac{J_0(k_\perp r_\perp)}{(k_3 - q_3)^2 + \mathbf{k}_\perp^2 + \Pi(0; k_3 - q_3, \mathbf{k}_\perp)}, \quad (20)$$

тут  $J_0(k_\perp r_\perp)$  – функція Бесселя першого роду 0-го порядку.

Після інтегрування за  $\mathbf{r}_\perp$  та спрощення отримуємо такі рівняння:

$$\tilde{\Delta} = \Delta + s_\perp \tilde{\mu} = \frac{ie^2}{2\epsilon_0\kappa} T_1, \quad \Delta = s_\perp \tilde{\mu}, \quad (21)$$

$$\bar{\mu} - \bar{\mu}_0 = -\frac{ie^2}{2\epsilon_0\kappa} T_2, \quad \mu - \mu_0 = s_\perp (\bar{b}_0 - \bar{b}), \quad (22)$$

де  $\bar{\mu} = \mu - s_\perp \bar{b}$ ,  $\bar{\mu}_0 = \mu_0 - s_\perp \bar{b}_0$  і вжито такі скорочення

$$T_1 = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dq_3}{2\pi} \times \text{tr} \left[ \frac{F(\Omega, -q_3) \mathcal{L}^{(1)}(k_3 - q_3) \mathcal{P}_-}{\tilde{D}(\Omega, q_3)} \right], \quad (23)$$

$$T_2 = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dq_3}{2\pi} \times \text{tr} \left[ \gamma^0 \frac{F(\Omega, -q_3) \mathcal{L}^{(1)}(k_3 - q_3) \mathcal{P}_-}{\tilde{D}(\Omega, q_3)} \right], \quad (24)$$

$$\mathcal{L}^{(1)}(k_3 - q_3) = \int_0^\infty d\xi e^{-\xi} D(k_3 - q_3, \sqrt{2l^2\xi}). \quad (25)$$

#### IV. ПОЛЯРИЗАЦІЙНА ФУНКЦІЯ

Перш ніж розв'язувати систему рівнянь (21), (22), врахуємо ефекти поляризації. У першому порядку теорії збурень буде такий вираз для поляризаційної функції [27, 28]:

$$\begin{aligned} \Pi(r, r') &= -ie^2 \langle \hat{T} \psi^\dagger(r) \psi(r) \psi^\dagger(r') \psi(r') \rangle \\ &= -ie^2 \text{tr} [\gamma^0 S(r, r') \gamma^0 S(r', r)], \end{aligned} \quad (26)$$

а в змішаному координатно-імпульсному представленні маємо

$$\begin{aligned} \Pi(0, k_3; \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp) &= \frac{-ie^2}{\epsilon_0\kappa} \int \frac{d\Omega dp_3}{(2\pi)^2} \\ &\times \text{tr} [\gamma^0 \tilde{S}(\Omega, p_3; \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp) \gamma^0 \tilde{S}(\Omega, p_3 + k_3; \mathbf{r}'_\perp, \mathbf{r}_\perp)], \end{aligned} \quad (27)$$

де було знехтувано залежністю поляризаційної функції від частоти. Використовуючи формули (16), легко бачити, що швінгерівська фаза скорочується. Отже, у наближенні найнижчого рівня Ландау маємо

$$\Pi(0, \mathbf{k}) = i \frac{e^2}{2\pi l^2 \epsilon_0 \kappa} \left[ \mathcal{R}(k_3) e^{-\frac{k_\perp^2 l^2}{2}} \right], \quad (28)$$

де

$$\mathcal{R}(k_3) = \int \frac{d\Omega dp_3}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\Omega}^2 + v_F^2 (\bar{b}_0 + p_3 + k_3) (\bar{b}_0 + p_3)}{[\tilde{\Omega}^2 - v_F^2 (\bar{b}_0 + p_3 + k_3)^2] [\tilde{\Omega}^2 - v_F^2 (\bar{b}_0 + p_3)^2]} + (\bar{b}_0 \rightarrow -\bar{b}_0) \quad (29)$$

і вжито скорочення  $\tilde{\Omega} = \Omega + \mu_0$ . Інтеграл за частотою має таку форму:

$$\int_{-\infty}^\infty d\Omega \frac{\tilde{\Omega}^2 + C_0}{(\tilde{\Omega}^2 - B_0^2) (\tilde{\Omega}^2 - A_0^2)} = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\Omega}{B_0^2 - A_0^2} \left[ \frac{C_0 + B_0^2}{\tilde{\Omega}^2 - B_0^2} - \frac{C_0 + A_0^2}{\tilde{\Omega}^2 - A_0^2} \right]. \quad (30)$$

Кожен із доданків у квадратних дужках може бути спрощений аналогічно. Згідно з [29], для того щоб проінтегрувати за  $\tilde{\Omega}$  у системі з ненульовим хімічним потенціалом, необхідно використати таку заміну:  $\tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega} + i\epsilon \text{sign}(\tilde{\Omega})$ . Остаточно, використовуючи формулу Сохоцького,

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \text{v.p.} \frac{1}{x} \mp \pi i \delta(x) \quad (31)$$

обчислюємо

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{d\Omega}{\tilde{\Omega} + i\epsilon \text{sign}(\tilde{\Omega} - \mu_0) - B_0} = \pi i [\Theta(\mu_0 - B_0) - \Theta(B_0 - \mu_0)]. \quad (32)$$

Після деяких перетворень отримуємо такий допоміжний результат:

$$\int_{-\infty}^\infty d\Omega \frac{\tilde{\Omega}^2 + C_0}{(\tilde{\Omega}^2 - B_0^2) (\tilde{\Omega}^2 - A_0^2)} = \frac{\pi i}{B_0^2 - A_0^2} \left[ \Theta(A_0 - |\mu_0|) \frac{C_0 + A_0^2}{A_0} - \Theta(B_0 - |\mu_0|) \frac{C_0 + B_0^2}{B_0} \right]. \quad (33)$$

У кінцевому результаті, використовуючи співвідношення (33) та інтегруючи за  $p_3$  у (29), маємо наступний вираз для поляризаційної функції

$$\Pi(0, \mathbf{k}) = \frac{2e^2}{(2\pi l)^2 \epsilon_0 \kappa v_F} e^{-\frac{k_{\perp}^2 l^2}{2}}. \quad (34)$$

Цікаво, що незважаючи на наявність хімічного потенціалу та кірального зсуву, цей результат збігається з відповідним виразом у роботі [27]. Використовуючи рівняння (34) та наближення найнижчого рівня Ландау, можна застосувати наступне наближення, яке з  $\sim 10\%$  точністю відповідає безпосередньому чисельному розрахунку інтегралів у виразі (25)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)}(k_3 - q_3) &\approx \int_0^{\sqrt{\frac{2}{l^2}}} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{2\pi} \frac{1}{(k_3 - q_3)^2 + \mathbf{k}_{\perp}^2 + \Pi_0} \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \left| \frac{(k_3 - q_3)^2 + \Pi_0 + \frac{2}{l^2}}{(k_3 - q_3)^2 + \Pi_0} \right|, \end{aligned} \quad (35)$$

де  $\Pi_0 = \frac{2e^2}{(2\pi l)^2 \epsilon_0 \kappa v_F}$ . Суттєвою перевагою цього наближення є можливість отримати аналітичний вираз.

## V. РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ДЛЯ ЩІЛИНИ

Обчислюючи слід у виразах (23) та (24), маємо:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2 \int \frac{d\Omega dq_3}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\Delta} \mathcal{L}^{(1)}(k_3 - q_3)}{\left(\tilde{\Omega} - s_{\perp} v_F \bar{b}_0\right)^2 - v_F^2 q_3^2 - \tilde{\Delta}^2}, \\ T_2 &= 2 \int \frac{d\Omega dq_3}{(2\pi)^2} \frac{\left(\tilde{\Omega} - s_{\perp} v_F \bar{b}_0\right) \mathcal{L}^{(1)}(k_3 - q_3)}{\left(\tilde{\Omega} - s_{\perp} v_F \bar{b}_0\right)^2 - v_F^2 q_3^2 - \tilde{\Delta}^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Подібно до розрахунку поляризаційної функції можна легко взяти інтеграли за  $\Omega$ . У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{-i}{2\pi} \tilde{\Delta} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dq_3 - \Theta(\bar{\mu}^2 - \tilde{\Delta}^2) \int_{-\Lambda'}^{\Lambda'} dq_3 \right] \frac{\mathcal{L}^{(1)}(k_3 - q_3)}{\sqrt{v_F^2 q_3^2 + \tilde{\Delta}^2}}, \\ T_2 &= \frac{i}{2\pi} \text{sign}(\bar{\mu}) \left[ \Theta(\bar{\mu}^2 - \tilde{\Delta}^2) \int_{-\Lambda'}^{\Lambda'} dq_3 \right] \mathcal{L}^{(1)}(k_3 - q_3), \end{aligned} \quad (37)$$

де  $\Lambda' = \frac{\sqrt{\bar{\mu}^2 - \tilde{\Delta}^2}}{v_F}$ . У  $T_2$  інтеграл за  $q_3$  можна обчислити в явному вигляді

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{i}{8\pi^2} \text{sign}(\bar{\mu}) \Theta(\bar{\mu}^2 - \tilde{\Delta}^2) \left[ (k_3 + \Lambda') \ln \left| \frac{(k_3 + \Lambda')^2 + \Pi_0 + \frac{2}{l^2}}{(k_3 + \Lambda')^2 + \Pi_0} \right| \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{\Pi_0 + \frac{2}{l^2}} \arctan \left( \frac{k_3 + \Lambda'}{\sqrt{\Pi_0 + \frac{2}{l^2}}} \right) - 2\sqrt{\Pi_0} \arctan \left( \frac{k_3 + \Lambda'}{\sqrt{\Pi_0}} \right) \right] - (\Lambda' \rightarrow -\Lambda'). \end{aligned} \quad (38)$$

Далі інтегрування за  $q_3$  в  $T_1$  проводитимемо лише з використанням чисельних методів.

Використовуючи вираз для  $T_1$  із системи (37) та рівняння (21), можна бачити, що оскільки  $\tilde{\Delta}$  є однако-вим множником як для лівої, так і для правої частини рівняння (21), то в системі може існувати і тривіальний  $\tilde{\Delta} = 0$ , і нетривіальний  $\tilde{\Delta} \neq 0$  розв'язки. Окрім того, що нетривіальний розв'язок існує для того, щоб реалізуватися як основний стан системи, він повинен мати меншу енергію порівняно зі станом із  $\tilde{\Delta} = 0$ .

Застосовуючи формалізм Корнуела–Джеквіва–Томбуліса [26], розрахуємо густину енергії  $\tilde{\mathcal{E}}$ , яка виражається через ефективну дію  $\Gamma$ , так:  $\tilde{\mathcal{E}} = -\Gamma/V_{\text{ST}}$ , де  $V_{\text{ST}}$  — просторово-часовий об'єм. Використовуючи рівняння Швінґера–Дайсона (13), густину енергії можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} &= i \int \frac{d\omega d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \text{tr} \left[ i\omega \gamma^0 \tilde{G}(\omega; \mathbf{k}) + \frac{1}{2} \left( \tilde{S}^{-1}(\omega; \mathbf{k}) \tilde{G}(\omega; \mathbf{k}) \right) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

де було відкинуто неважливі при порівнянні сталі доданки. Після використання наступних виразів

$$\tilde{G}(\omega, \mathbf{k}) = 2ie^{-k_{\perp}^2 l^2} \frac{F(\omega, k_3) \mathcal{P}_-}{\tilde{D}(\omega, k_3)}, \quad (40)$$

$$i\tilde{S}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = 2e^{-k_{\perp}^2 l^2} Q_0(\omega, k_3) \mathcal{P}_-,$$

та інтегрування за  $\mathbf{k}_{\perp}$ , рівняння (39) можна записати так:

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{-i}{l^2(2\pi)^3} \int d\omega dk_3 \frac{\bar{\omega}(\bar{\omega} - \eta) + v_F^2 k_3^2}{\bar{\omega}^2 - M^2}, \quad (41)$$

де  $\bar{\omega} = \omega + \bar{\mu}$ ,  $\eta = \mu_0 - sv_F \bar{b}_0 + \mu - sv_F \bar{b}$ ,  $M^2 = v_F^2 k_3^2 + \tilde{\Delta}^2$ . Оскільки далі нас цікавитиме лише порівняння енергій двох можливих розв'язків,  $\tilde{\Delta} = 0$  та  $\tilde{\Delta} \neq 0$ , то від густини енергії (41) можна відняти доданки, незалежні від  $\tilde{\Delta}$ . Отже, запишемо густину енергії у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} &= \frac{-i}{l^2(2\pi)^3} \int d\omega dk_3 \frac{-\eta\bar{\omega} + 2v_F^2 k_3^2 + \tilde{\Delta}^2}{\bar{\omega}^2 - M^2} \\ &- \int d\omega dk_3 \frac{i}{(2\pi)^3 l^2} \\ &= \mathcal{E} + \frac{2v_F}{(2\pi l)^2} \int_0^\infty dk_3 k_3 - \int d\omega dk_3 \frac{i}{(2\pi)^3 l^2}, \end{aligned} \quad (42)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{1}{(2\pi l)^2 v_F} \left[ \frac{\tilde{\Delta}^2}{2} + \Theta(\bar{\mu}^2 - \tilde{\Delta}^2) \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{\bar{\mu}^2 - \tilde{\Delta}^2} \operatorname{sign}(\bar{\mu}) \bar{\mu}_0 \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Цей вираз містить лише важливу для порівняння частину густини енергії і є зручнішим для використання.

Представимо тепер чисельний розв'язок системи (21), (22). Згідно з [30], для  $\text{Bi}_{0.88}\text{Sb}_{0.12}$ ,  $v_F = 3.5 \times 10^5$  м/с. Згідно з [31],  $\kappa \approx 100$ . Магнітне поле вважаємо рівним 5 Т. Також будемо вважати  $k_3 = 0$ . Слід зауважити, що за певних значень  $\bar{\mu}_0$  можливе існування двох значень  $\tilde{\Delta}$ , які задовольняють рівняння (21). Згідно з виразом (43), обрано найбільш енергетично вигідний розв'язок, залежність якого від  $\bar{\mu}_0$  показана на рис. 1 та 2.

Користуючись цими даними, отримуємо значення параметра щілини в електрон-вольтах як функцію зовнішнього магнітного поля

$$\tilde{\Delta} = 9.3 \times 10^{-14} \sqrt{B[\text{T}]} \text{ eV}, \quad (44)$$

де  $B$  вимірюється в теслах. Варто зазначити характерну для кулонівської взаємодії кореневу залежність від магнітного поля [14, 15]. Це значення параметра щілини дуже мале, що пов'язано з великим значенням діелектричної проникності  $\kappa$ . Справді, з огляду на явище магнітного каталізу [14, 15] малість параметра щілини не є несподіванкою, адже в 3+1 вимірній КЕД  $\tilde{\Delta} \propto e^{-2\frac{e^2}{\sqrt{\kappa}}}$ . Тому для  $\text{Bi}_{0.88}\text{Sb}_{0.12}$ ,  $\tilde{\Delta}$  можна покласти рівним нулеві. Для матеріалів із  $\kappa \approx 5$  маємо такий вираз для параметра щілини:

$$\tilde{\Delta} = 4.3 \times 10^{-4} \sqrt{B[\text{T}]} \text{ eV}. \quad (45)$$

Використовуючи вираз (43), можна порівняти густини енергії тривіального  $\tilde{\Delta} = 0$  та нетривіального  $\tilde{\Delta} \neq 0$  розв'язків. Залежність різниці густин енергій  $\mathcal{E}(\tilde{\Delta}) - \mathcal{E}(0)$  від  $\bar{\mu}_0$  показана на рис. 3.

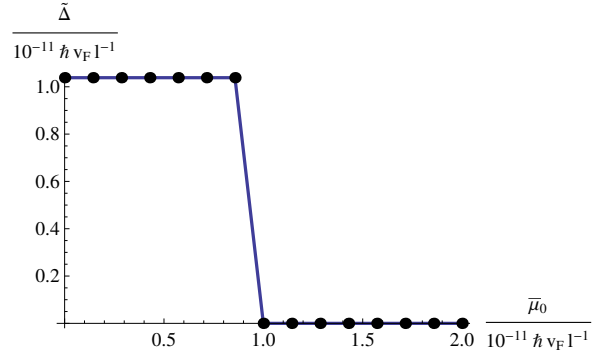


Рис. 1. Залежність динамічного параметра  $\tilde{\Delta}$  від  $\bar{\mu}_0$ .

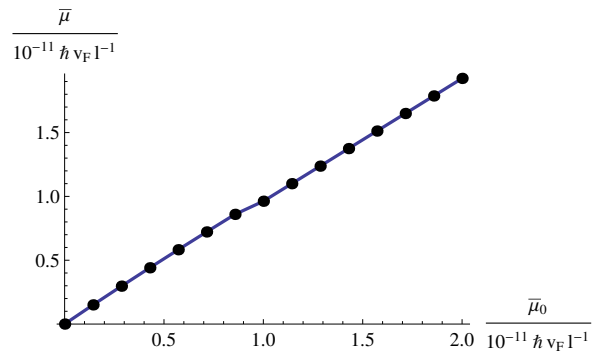


Рис. 2. Залежність динамічного параметра  $\bar{\mu}$  від  $\bar{\mu}_0$ .

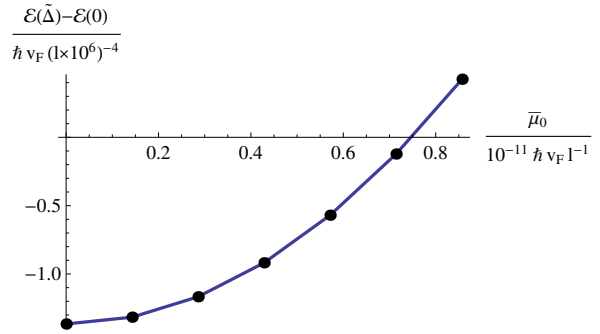


Рис. 3. Залежність різниці густин енергій  $\mathcal{E}(\tilde{\Delta}) - \mathcal{E}(0)$  від  $\bar{\mu}_0$ .

Отже, за певних значень  $\bar{\mu}_0$  існує нетривіальний розв'язок (44). Розрахуймо тепер густину носіїв заряду.

$$\begin{aligned} N &= \langle \psi^\dagger(r) \psi(r) \rangle = -\operatorname{tr}(\gamma^0 G(r, r)) \\ &= -2i \int \frac{d\omega d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-k_\perp^2 l^2 \bar{\omega}}}{\bar{\omega}^2 - v_F^2 k_3^2 - \tilde{\Delta}^2} = \\ &= \frac{\operatorname{sign}(\bar{\mu}) \Lambda' \Theta(\bar{\mu}^2 - \tilde{\Delta}^2)}{(2\pi l)^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Як видно з виразу (46),  $N \neq 0$  при  $\tilde{\Delta} < \bar{\mu}$ , що завжди виконується для тривіального розв'язку. Для нетривіального розв'язку, коли він реалізується як основний стан системи, виконується зворотна нерівність

$\tilde{\Delta} > \bar{\mu}$ . Отже, нетривіальний розв'язок відповідає нульовій густині носіїв заряду.

## VI. ВИСНОВКИ

У цій праці вивчено генерацію щілини у вейлівському напівметалі з кулонівською взаємодією в зовнішньому магнітному полі. Використовуючи формалізм Корнуела–Джеквіа–Томбуліса, ми отримали рівняння для щілини (21) і (22). Окрім того, були враховані ефекти поляризації та екранування в першому порядку теорії збурень. Аналізуючи дані, наведені на рис. 1, 2 та 3, було показано, що нетривіальний розв'язок для параметра щілини  $\tilde{\Delta}$ , значення якого дається рівняннями (44) та (45), може існувати, але відповідає нульовій густині носіїв заряду. При ненульовій концентрації носіїв заряду генерація щілини енергетично не вигідна.

Можливо, при врахуванні вищих рівнів Ландау ситуація зміниться, але у зв'язку з тим, що динамічні

параметри є функціями від  $(\pi \cdot \gamma)^2$  і залежать від номера рівня, ми будемо мати справу вже з цілим набором параметрів щілини, кожен з яких відповідає певному рівню. Таке розширення майже унеможливило аналітичні розрахунки. Також у цій роботі розглянуто спрощену ізотропну модель вейлівського напівметалу, хоча в реальних матеріалах, таких, як сплави вісмуту, телуру та сурми, анізотропія має бути врахована. Окрім того, можливе врахування ефектів поляризації у вищому порядку. Відповідний аналіз буде зроблено в інших статтях. Однак можна вважати, що наші якісні результати будуть справедливими і для більш реалістичних моделей.

## ПОДЯКИ

Автор висловлює щиро подяку Горбарові Е. В. за корисні поради, які значно посприяли написанню статті.

- 
- [1] X.-L. Qi, S.-C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 831057 (2011).
- [2] M. Z. Hasan, C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 823045 (2010).
- [3] O. Vafek, A. Vishwanath, *Ann. Rev. Condens. Matter Phys.* **5**, 83 (2014).
- [4] Y. Ando, *J. Phys. Soc. Jpn* **82**, 32 (2013).
- [5] A. H. Castro Neto, A. K. Geim, F. Guinea, K. S. Novoselov, N. M. R. Peres, *Rev. Mod. Phys.* **81**(1), 109 (2009).
- [6] M. H. Cohen, E. I. Blount, *Phil. Mag.* **5**, 115 (1960).
- [7] P. A. Wolff, *J. Phys. Chem. Solids* **25**, 1057 (1964).
- [8] L. A. Fal'kovskii, *Sov. Phys. Usp.* **11**, 1 (1968) [*Usp. Fiz. Nauk* **94**, 1 (1968)].
- [9] V. S. Edel'man, *Adv. Phys.* **25**, 555 (1976); *Sov. Phys. Usp.* **20**, 819 (1977) [*Usp. Fiz. Nauk* **123**, 257 (1977)].
- [10] L. S. Lerner, K. F. Cuff, L. R. Williams, *Rev. Mod. Phys.* **40**, 770 (1968).
- [11] S. Golin, *Phys. Rev.* **176**, 830 (1968).
- [12] E. V. Gorbar, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, *Phys. Rev. B* **88**, 165105 (2013).
- [13] H.-J. Kim *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 246603 (2013).
- [14] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, *Phys. Rev. D* **52**, 4747 (1995).
- [15] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, *Nucl. Phys. B* **462**, 249 (1996).
- [16] S.-C. Zhang, Z. Wang, *Phys. Rev. B* **87**, 161107 (2013).
- [17] V. Aji, S.-P. Chao, H. Wei, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 196403 (2012).
- [18] Y.-M. Lu, Y. Ran, K.-Y. Yang, *Phys. Rev. B* **84**, 075129 (2011).
- [19] P. O. Sukhachov, *Ukr. J. Phys.* **59**, No. 7, 696 (2014).
- [20] H. B. Nielsen, M. Ninomiya, *Phys. Lett. B* **130**, 389 (1983).
- [21] E. V. Gorbar, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, *Phys. Rev. C* **80**, 032801(R) (2009).
- [22] E. V. Gorbar, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, *Phys. Rev. D* **83**, 085003 (2011).
- [23] A. I. Larkin, Y. N. Ovchinnikov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **47**, 1136 (1964) [*Sov. Phys. JETP* **20**, 762 (1965)].
- [24] P. Fulde, R. A. Ferrell, *Phys. Rev.* **135**, A550 (1964).
- [25] E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, *Phys. Scr.* **T146**, 014018 (2011).
- [26] J. M. Cornwall, R. Jackiw, E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **10**, 8, 2428 (1974).
- [27] G. Calucci, R. Ragazzon, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, 2161 (1994).
- [28] W. Dittrich, M. Reuter, *Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
- [29] A. Chodos, K. Everding, D. A. Owen, *Phys. Rev. D* **42**, 2881 (1990).
- [30] S. Bandyopadhyay *et al.*, *J. Appl. Phys.* **112**, 083706 (2012).
- [31] *Bi<sub>1-x</sub>Sb<sub>x</sub> Optical Properties, Dielectric Constants*, edited by O. Madelung, U. Rössler, M. Schulz (Springer, Berlin, 1998).
- [32] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, Orlando, 1980).

П. О. СУХАЧОВ

**GAP GENERATION IN WEYL SEMIMETALS WITH COULOMB INTERACTION IN  
THE EXTERNAL MAGNETIC FIELD**

P. O. Sukhachov

*Department of Physics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4d, Glushkov St., Kyiv, UA-03680,  
e-mail: pavel.sukhachov@gmail.com*

We consider a dynamical gap generation in the Weyl semimetal with the Coulomb interaction in the lowest Landau level approximation. The effects of polarization and screening of the Coulomb interaction are included in the first-order of perturbation theory. It was shown that the gap can be generated in the absence of charge carriers in the state with a chiral phase at any value of the coupling constant. The gap generation at nonzero charge density is energetically unfavorable.