

РОЗРАХУНОК ФАЗ НУКЛОН–НУКЛОННОГО РОЗСІЯННЯ ДЛЯ ПОТЕНЦІАЛІВ N_{ijmI} , N_{ijmII} І N_{ijm93} ЗА МЕТОДОМ ФАЗОВИХ ФУНКЦІЙ

В. І. Жаба

*Ужгородський національний університет, кафедра теоретичної фізики,
вул. Волошина, 54, Ужгород, 88000, Україна*

(Отримано 09 липня 2015 р.; в остаточному вигляді — 02 листопада 2015 р.)

Для обчислення фаз одноканального нуклон–нуклонного розсіяння розглянуто відомий метод фазових функцій. За його допомогою чисельно отримано фазові зсуви нуклон–нуклонного розсіяння: nn (1S_0 -, 3P_0 -, 3P_1 -, 1D_2 -станів), pp (1S_0 -, 3P_0 -, 3P_1 -, 1D_2 -станів) і np (1S_0 -, 1P_1 -, 3P_0 -, 3P_1 -, 1D_2 -, 3D_2 -станів). Розрахунки проведено для сучасних реалістичних нуклон–нуклонних потенціалів N_{ijmI} , N_{ijmII} і N_{ijm93} . Чисельно розраховані фазові зсуви добре узгоджуються з результатами, отриманими іншими методами. За розрахованими фазовими зсувами обчислено повний переріз і парціальну амплітуду розсіяння, значення яких мало відрізняються від величин, отриманих з відомих фаз в інших працях.

Ключові слова: розсіяння, метод, фаза, нуклон, стан.

PACS number(s): 21.45.Bc, 03.65.Nk

I. ВСТУП

Із експериментально спостережуваних величин перерізу розсіяння та енергій переходів отримують передусім інформацію про фази та амплітуди розсіяння, а не про хвильові функції, що є основним об'єктом дослідження за стандартного підходу. Інакше кажучи, в експерименті спостерігаються не самі хвильові функції, а їх зміни, викликані внаслідок взаємодії [1]. Тому становить інтерес отримати рівняння, що безпосередньо пов'язують фази й амплітуди розсіяння з потенціалом, не знаходячи при цьому хвильових функцій.

Точний розв'язок задачі розсіяння з метою обчислення фаз розсіяння можливий тільки для окремих феноменологічних потенціалів. Коли використовують реалістичні потенціали, то фази розсіяння обчислюють наближено. Це пов'язано з використанням фізичних апроксимацій або з чисельним розрахунком. Вплив вибору чисельного алгоритму на розв'язок задачі розсіяння вказано в роботі [2].

В останні 10 років зросло зацікавлення нуклон–нуклонним розсіянням у межах кіральної теорії збурень [3,4], у послідовному теоретико-польовому підході [5], для парціального хвильового аналізу нижче від порога утворення піона [6]. Також отримуються фази розсіяння через суперсиметрії й факторизації [7], N/D -метод обчислення парціальних хвиль для еластичного NN -розсіяння [8] або перенормування NN -взаємодії для кірального потенціалу двопіонного обміну [9].

До методів розв'язування рівняння Шредингера з метою отримання фаз розсіяння належать: метод послідовних наближень, борнівське наближення, метод фазових функцій та інші. Метод фазових функцій виявився досить зручним при розв'язуванні багатьох конкретних задач атомної і ядерної фізики.

Основною і головною перевагою методу фазових

функцій (МФФ) при застосуванні до задач нуклон–нуклонного розсіяння є та, що МФФ дає змогу отримати фази розсіяння, не знаходячи при цьому хвильових функцій як розв'язок рівняння Шредингера. Завдяки фазовому рівнянню наявний безпосередній зв'язок між фазою розсіяння й потенціалом взаємодії.

У минулому столітті МФФ частіше використовувався. Але все ж таки у дослідників залишається певний інтерес до його застосування для розрахунків. Наприклад, метод квазілінеаризації [10] з МФФ дає чудові результати, коли застосовується до обчислення основних і збуджених зв'язаних станів енергій і хвильових функцій для різних потенціалів. У роботі [11] запропоновано узагальнення МФФ до проблем акустичної хвилі, що розсіюється на безперервній середній неоднорідності.

Ця робота присвячена розрахунку фазових зсувів нуклон–нуклонного розсіяння в різних спінових станах для сучасних реалістичних феноменологічних нуклон–нуклонних потенціалів Неймегенської групи (N_{ijmI} , N_{ijmII} і N_{ijm93} [12]) за допомогою методу фазових функцій.

II. БОРНІВСЬКІ ФАЗИ np -РОЗСІЯННЯ

Розглянемо типовий приклад реакції: розсіяння безспінової частинки з певними визначеними значеннями енергії E (або хвильового числа k : $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$) і орбітального моменту L на сферично-симетричному потенціалі $V(r)$. Рівняння Шредингера для відповідної радіальної хвильової функції $u_l(r)$ має вигляд [1]:

$$u_l''(r) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) \right) u_l(r) = 0, \quad (1)$$

де $U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r)$ — перенормований потенціал взаємодії, m — приведена маса.

Якщо значення потенціалу $U(r)$ мале, то наближений вираз для фази розсіяння:

$$e^{i\delta_l} \sin \delta_l \approx -\frac{1}{k} \int U(r) [j_l(kr)]^2 dr.$$

Умовою застосовності теорії збурень для фаз $\epsilon \delta_l \ll 1$, тоді наближення називають борнівським наближенням для фаз розсіяння:

$$\delta_l^{(B)} \approx -\frac{1}{k} \int U(r) [j_l(kr)]^2 dr. \quad (2)$$

Воно вказує на те, що якщо потенціал $U(r)$ буде від'ємним значенням (потенціал притягання), то усі борнівські фази будуть додатними (хвильова функція частинки ніби "підтягується" в область взаємодії). При додатному потенціалі $U(r)$ усі борнівські фази від'ємні (хвильова функція ніби "виштовхується" із області взаємодії).

Розраховані по формулі (2) борнівські фази для потенціалів Неймегенської групи значно відрізняються від результатів роботи [12]. Наприклад, для 1P_1 -, 3P_1 -, 1D_2 -, 3D_2 -станів (для np -розсіяння) різниця складає 10–30%, а для 3P_0 -стану в енергетичній області 50–350 МеВ різниця складає рази. Тому потрібно вибрати інший точніший метод отримання фаз розсіяння. Таким методом є метод фазових функцій.

III. МЕТОД ФАЗОВИХ ФУНКЦІЙ

Математично МФФ — це особливий спосіб рішення радіального рівняння Шредингера (1), яке є лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Він досить зручний для отримання фаз розсіяння, оскільки по цьому методу не потрібно спочатку обчислювати в широкій області радіальні хвильові функції задачі розсіяння і потім по їх асимптотикам знаходити ці фази.

Двома лінійно незалежними розв'язками вільного рівняння Шредингера (1) (при $U \equiv 0$) є відомі функції Ріккати–Бесселя $j_l(kr)$ і $n_l(kr)$. Вільному рухові

відповідає тільки регулярний в точці $r = 0$ розв'язок $j_l(kr)$, так що у цьому випадку асимптотично при великих значеннях r розв'язок набуде вигляду

$$u_l(r) \approx \text{const} \cdot \sin(kr - l\pi/2).$$

Наявність потенціалу приводить до того, що тепер в області, де потенціал $U(r)$ зникає, хвильова функція включає добавку нерегулярного розв'язку вільного рівняння $n_l(kr)$. Мірою цієї добавки, що кількісно описує ефект взаємодії, є саме фаза розсіяння δ_l :

$$u_l(r) \approx \text{const} \cdot [j_l(kr) - \text{tg} \delta_l \cdot n_l(kr)],$$

$$u_l(r) \rightarrow \text{const} \cdot \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l), r \rightarrow \infty.$$

Набір фазових зсувів δ_l для різних парціальних хвиль визначає кутовий розподіл і повний переріз розсіяння. Тому важливою задачею теорії потенціального розсіяння є саме знаходження величин δ_l при заданих величинах потенціалу $U(r)$, орбітального моменту l й енергії E . Стандартний спосіб обчислення фаз розсіяння — це розв'язок рівняння Шредингера (1) з асимптотичною граничною умовою. МФФ — це перехід від рівняння Шредингера до рівняння для фазової функції. Для цього роблять заміну [1, 13]:

$$u_l(r) = A_l(r) [\cos \delta_l(r) \cdot j_l(kr) - \sin \delta_l(r) \cdot n_l(kr)]. \quad (3)$$

Введені дві нові функції $\delta_l(r)$ і $A_l(r)$ мають зміст відповідних фаз розсіяння і констант нормування (амплітуд) хвильових функцій для розсіяння на визначеній послідовності обрізаних потенціалів. $\delta_l(r)$ і $A_l(r)$ називаються відповідно їх фізичному змісту фазовою й амплітудною функцією. Термін "фазова функція" вперше був використаний у роботі Морзе і Алліса [14]. Рівняннями для фазової й амплітудної функцій з початковими умовами є:

$$\delta_l'(r) = -\frac{1}{k} U(r) \left[\cos \delta_l(r) \cdot j_l(kr) - \sin \delta_l(r) \cdot n_l(kr) \right]^2, \quad \delta_l(0) = 0; \quad (4)$$

$$A_l'(r) = -\frac{1}{k} A_l(r) U(r) \left[\cos \delta_l(r) \cdot j_l(kr) - \sin \delta_l(r) \cdot n_l(kr) \right] \left[\sin \delta_l(r) \cdot j_l(kr) + \cos \delta_l(r) \cdot n_l(kr) \right], \quad A_l(0) = 1. \quad (5)$$

Фазове рівняння (4) було вперше отримано Друкарєвим [15], а потім незалежно у роботах Бергмана [16], Калоджеро [17] і Зимека [18]. Частинний випадок рівняння (4) при $l = 0$ був використаний Морзе і Аллісом при дослідженні задачі S -розсіяння повільних електронів на атомах [14].

Відмітимо переваги підходу МФФ для обчислення

фаз в порівнянні зі стандартним методом, заснованим на розгляді рівняння Шредингера для хвильової функції [1]. Той факт, що фазове рівняння — першого порядку (хоч і нелінійне), спрощує програмування і обчислення на ЕОМ. Крім того, при цьому зменшується кількість операцій і час розрахунку. Не осцилюючий, а більш монотонний характер поведін-

ки фазової функції дозволяє проводити розрахунки з більшою точністю і полегшує оцінку похибок результатів. Ще однією важливою перевагою даного методу є можливість побудови в його рамках нових алгоритмів обчислення не тільки фазових зсувів, але й парціальних і повних амплітуд розсіяння, елементів S -матриці, довжин розсіяння, ефективних радіусів та інших параметрів розсіяння.

IV. ПОТЕНЦІАЛИ НЕЙМЕГЕНСЬКОЇ ГРУПИ

До сучасних нуклон–нуклонних потенціалів взаємодії належать такі: залежний від заряду потенціал CD-Bonn [19], потенціал Moscow [20], кіральний потенціал Айдахо [21], релятивістська оптична модель [22] на базі Московського потенціалу, бразильський релятивістський потенціал двоіонного обміну $O(q^4)$ [23], локальний нуклон–нуклонний потенціал, розширений з погляду ортогональних проекторів [24].

Чому саме вибрано провести розрахунок фазових зсувів з використанням потенціалів Неймегенської групи (NijmI, NijmII, Nijm93)? Параметри потенційних моделей оптимізовані таким чином, що мінімізовано значення χ^2 у прямій підгонці до даних. Перше удосконалення потенціалу Nijm78 [25] було розпочато на початку 1990-их років. Удосконалена версія потенціалу мала назву Nijm92pp, оскільки була обновлена саме для 1787 pp даних. Для потенціалу Nijm92pp величина χ^2/N_{pp} становила 1.4. Наступне удосконалення потенціалу Nijm78 для np даних дало модель Nijm93: $\chi^2/N_{pp}=1.8$ для 1787 pp і $\chi^2/N_{nn}=1.9$ для 2514 np даних, тобто $\chi^2/N_{data}=1.87$. Для потенціалів Nijm I і NijmII величина $\chi^2/N_{data}=1.03$. Оригінальний потенціал Рейда Reid68 був параметризований на основі фазового аналізу Неймегенською групою і отримав назву Reid93. Параметризація була проведена для 50 параметрів A_{ij} і B_{ij} потенціалу, причому $\chi^2/N_{data}=1.03$ [12]. Структура і запис потенціалу Reid93 доволі громіздкі.

Потенціал Argonne v18 [26] з 40 регульованими параметрами дає величину $\chi^2/N_{data}=1.09$ для 4301 pp і np даних в області енергій 0–350 МеВ. Для потенціалу CD-Bonn [19] величина χ^2/N_{data} становить 1.01 для 2932 pp даних і 1.02 для 3058 np даних. Такі потенціали, як Хамада–Джонсона-62, потенціали Єльської групи, Reid68, UrbanaV14 та ін. мають більші значення χ^2 , оскільки параметризовані на основі більш вузького енергетичного інтервалу.

Отже, потенціали Неймегенської групи є одними з тих реалістичних феноменологічних потенціалів, які найкраще описують міжнуклонну взаємодію.

При розрахунках фаз розсіяння потрібно враховувати особливості потенціалів міжнуклонної взаємодії. У Неймегенському парціальному хвильовому аналізі [27] NN взаємодію ділять на дві частини: частина дальньої дії V_L , яка є відомою і модельно-незалежною, і частина малої дальності V_S , яка розглядається феноменологічно. Остання представлена залежною від енергії з граничною умовою в $r = b =$

1.4 Фм. Використовуючи потенціал дальньої дії V_L , радіальне рівняння Шредингера

$$(\Delta + k^2) \psi = 2M_r V \psi$$

розв'язується для $r > b$. Тут Δ – лапласіан, и M_r – приведена маса.

Релятивістські ефекти взяті до уваги через потенціал, використовуючи релятивістське співвідношення між ц.м. імпульсом в квадратичній формі k^2 і лабораторною кінетичною енергією T_{lab} . Для np -розсіяння це співвідношення буде

$$k^2 = \frac{M_p^2 T_{lab} (T_{lab} + 2M_n)}{(M_p + M_n)^2 + 2T_{lab} M_p},$$

тоді як для pp -розсіяння воно просто

$$k^2 = \frac{1}{2} M_p T_{lab}.$$

Для зв'язаних каналів рівняння Шредингера буде 2×2 матричним рівнянням. Присутність відцентрового бар'єру означає, що рівняння Шредингера потрібно тільки розв'язувати для цілого ряду нижчих парціальних хвиль ($J \leq 4$). Крім цього, рівняння доведеться розв'язувати для кожної енергії, в якій експериментальні дані були отримані.

Потенціал V_L дальньої дії складається з електромагнітної частини V_{EM} і ядерної частини V_N :

$$V_L = V_{EM} + V_N. \quad (6)$$

Електромагнітна взаємодія для pp -розсіяння співпадає з pp парціальним хвильовим аналізом для 0–350 МеВ і складається з модифікованого потенціалу Кулона V_C , взаємодії магнітного моменту V_{MM} і потенціалу вакуумної поляризації V_{VP} . У випадку np -розсіяння електромагнітна взаємодія складається тільки з взаємодії магнітного моменту.

Явно електромагнітна взаємодія записується як

$$V_{EM}(pp) = V_{C1} + V_{C2} + V_{VP} + V_{MM}(pp),$$

$$V_{EM}(np) = V_{MM}(np),$$

де $V_{C1} = \frac{\alpha'}{r}$,

$$V_{C2} = -\frac{1}{2M_p^2} \left[(\Delta + k^2) \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{r} (\Delta + k^2) \right] \approx -\frac{\alpha \alpha'}{M_p r^2},$$

$$V_{MM}(pp) = -\frac{\alpha}{4M_p^2 r^3} \left[\mu_p^2 S_{12} + (6 + 8\kappa_p) \hat{L} \cdot \hat{S} \right],$$

$$V_{MM}(np) = -\frac{\alpha \kappa_n}{2M_n r^3} \left[\frac{\mu_p}{2M_p} S_{12} + \frac{1}{M_r} (\hat{L} \cdot \hat{S} + \hat{L} \cdot \hat{A}) \right].$$

Тут $\alpha' = 2k\eta/M_p$ – стандартний параметр Кулона ($\eta = \alpha/v_{lab}$); $\mu_p = 2.793$ і $\mu_n = -1.913$ – протонний і

нейтронний магнітний моменти; $\kappa_p = \mu_p - 1$, $\kappa_n = \mu_n$ — їх аномальні магнітні моменти. Тут також введено величину $\hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)$. Потенціал вакуумної поляризації може бути написаний як

$$V_{VP} = \frac{2\alpha\alpha'}{3\pi r} \int_1^\infty dx e^{-2m_e r x} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}, \quad (7)$$

де m_e — маса електрона. Очевидно, що вираз (7) дійсний для $r > 0$.

Самий дальньодіючий діапазон ядерної взаємодії V_N задається однопійним обміном (ОРЕ). Використовується той факт, що в NN розсіянні ми стикаємося з с чотирма різними псевдовекторними константами зчеплення у нуклон–нуклон–пійонних вершинах: $f_{pp\pi^0}$, $f_{nn\pi^0}$, $f_{np\pi^-}$ і $f_{pn\pi^+}$. Для комбінацій, які фактично відбуваються в ОРЕ потенціалі, використовуються наступні визначення: для $pp \rightarrow pp$: $f_p^2 \equiv f_{pp\pi^0} f_{pp\pi^0}$; для $np \rightarrow np$: $f_0^2 \equiv -f_{nn\pi^0} f_{pp\pi^0}$; для $np \rightarrow pn$: $2f_c^2 \equiv -f_{np\pi^-} f_{pn\pi^+}$. У випадку зарядової симетрії $f_p^2 = f_0^2$, тоді як у випадку зарядової незалежності $f_p^2 = f_0^2 = f_c^2$. Для pp -розсіяння ОРЕ потенціал може бути записаний як

$$V_{ORE}(pp) = f_p^2 V(m_{\pi^0}),$$

а для np -розсіяння

$$V_{ORE}(np) = -f_0^2 V(m_{\pi^0}) + (-)^{I+1} 2f_c^2 V(m_{\pi^+}),$$

де I — повний ізоспін; введена величина $V(m)$ для великих значень r рівна

$$V(m) = \frac{1}{3} \left(\frac{m}{m_s}\right)^2 \frac{e^{-mr}}{r} \times \left[(\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2) + S_{12} \left(1 + \frac{3}{mr} + \frac{3}{(mr)^2}\right) \right]. \quad (8)$$

V. РОЗРАХУНКИ ФАЗОВИХ ЗСУВІВ МЕТОДОМ ФАЗОВИХ ФУНКЦІЙ

До чисельних методів розв'язання диференціального рівняння першого порядку відносять метод Ейлера, модифікований метод Ейлера, метод Ейлера з перерахунком (методом Гюна), методи Рунге–Кутта, багатокрокові методи (наприклад, метод Адамса четвертого порядку) [28–30]. Указані модифікації методу Ейлера належать до групи методів прогнозу і корекції. Метод Ейлера є однокроковим методом першого порядку точності. Похибка методу Гюна пропорційна квадрату кроку інтегрування h^2 . Алгоритми Рунге–Кутта третього й четвертого порядку мають похибки порядку h^3 і h^4 відповідно. Вони вимагають на кожному кроці трьох і чотирьох обчислень функції відповідно, але, незважаючи на це, є вельми точними методами.

Якщо порівнювати методи Ейлера і Рунге–Кутта, то при використанні останнього потрібно проводити

суттєво більший обсяг обчислень на одному кроці алгоритму. Але такий вибір забезпечує підвищену точність до h^3 чи h^4 . Зрештою це дає змогу проводити розрахунки з більшим кроком. Завдяки високій точності та простоті реалізації метод Рунге–Кутта четвертого порядку є одним із найбільш поширених чисельних методів розв'язування рівнянь і систем рівнянь першого порядку.

При крокові $h = 0.1$ точність розв'язку, згідно з методом Рунге–Кутта, досягається чотирьох значущих цифр. Для досягнення такої точності методом Ейлера потрібно вибрати крок $h = 0.0001$ і проводити 10^3 обчислень. Така велика кількість обчислень обов'язково призведе до похибок округлення.

Спінкові стани для нейтрон–протонної системи представляються як $2^{S+1}L_J$, де L — момент системи (значення орбітального моменту $L = 0; 1; 2; 3; 4; \dots$ відповідають S-, P-, D-, F-, G-,... стану); S -спін системи; J — повний момент системи; $P = (-1)^L$ — парність. Для pp - і nn -систем спіновими станами будуть 1S_0 , 3P_0 -, 3P_1 -, 1D_2 -, 3F_3 -,... стани. Для np - системи спіновими станами будуть 1S_0 -, 1P_1 -, 3P_0 -, 3P_1 -, 1D_2 -, 3D_2 -,... стани.

Методом фазових функцій чисельно отримано фазові зсуви нуклон–нуклонного розсіяння: nn (1S_0 -, 3P_0 -, 3P_1 -, 1D_2 -станів), pp (1S_0 -, 3P_0 -, 3P_1 -, 1D_2 -станів) і np (1S_0 -, 1P_1 -, 3P_0 -, 3P_1 -, 1D_2 -, 3D_2 -станів). Маси нуклонів вибрано такими: $M_p = 938.27231$ MeV; $M_n = 939.56563$ MeV. Був вибраний чисельний метод розв'язку фазового рівняння (4) — метод Рунге–Кутта четвертого порядку. За оптимізованого вибору кроку чисельних розрахунків фазові зсуви отримували з точністю до 0.01. Фазові зсуви знаходили при виході фазової функції $\delta_l(r)$ на асимптотику при $r=10$ Фм. Значення фазових зсувів приведено у таблицях 1–3. Фазові зсуви вказано у градусах. Чисельні розрахунки проведено для потенціалів міжнуклонної взаємодії NijmI, NijmII і Nijm93. Діапазон енергій 1–350 MeV. Розрахунки порівняно з результатами інших робіт: для парціального хвильового аналізу (PWA) [12], для потенціалів NijmI, NijmII і Reid93 [12], Argonne v18 (Av18) [26] і CD-Bonn [19].

Оскільки у науковій літературі були відсутні таблиці значення фазових зсувів nn -розсіяння для потенціалів Неймегенської групи, то розраховані за МФФ фазові зсуви порівняно з фазами для потенціалів Argonne v18 і CD-Bonn.

Якщо порівняти фазові зсуви нуклон–нуклонного розсіяння, розраховані для одних і тих же потенціалів Неймегенської групи (для pp - і np -розсіяння) різними методами — на основі розв'язку рівняння Шредингера (див. роботу [12]) і на основі МФФ (результати даної роботи), то можна зробити висновок, що розходження між результатами становить не більше двох відсотків.

Порівняння результатів розрахунків фазових зсувів для потенціалів Неймегенської групи, отриманих за допомогою МФФ, і фазових зсувів для інших потенціальних моделей (Argonne v18 [26] і CD-Bonn [19]) і для парціального хвильового аналізу вказує на те,

РОЗРАХУНОК ФАЗ НУКЛОН-НУКЛОННОГО РОЗСІЯННЯ ДЛЯ ПОТЕНЦІАЛІВ $N_{ijm}I...$

що відхилення між цими даними становить до п'яти відсотків.

T_{lab}, MeV	Стан	$N_{ijm}I$	$N_{ijm}II$	$N_{ijm}93$
1	1S_0	57.22	57.85	58.25
5		60.43	61.04	62.24
10		57.94	58.26	58.48
25		48.31	48.77	49.17
50		38.44	38.58	39.04
100		24.13	24.61	24.78
150		13.87	14.05	14.42
200		5.647	5.848	6.229
250		-0.848	-0.865	-0.917
300		-6.284	-6.493	-6.848
350		-12.51	-12.37	-12.79
1	3P_0	0.206	0.207	0.209
5		1.824	1.835	1.866
10		4.035	4.064	4.132
25		8.742	8.873	8.914
50		11.39	11.65	11.28
100		8.946	9.433	9.196
150		4.188	4.536	4.784
200		-0.714	-0.790	-0.742
250		-5.836	-5.959	-6.218
300		-10.28	-10.89	-11.12
350		-14.37	-15.48	-16.10
1	3P_1	-0.124	-0.123	-0.123
5		-1.052	-1.036	-1.032
10		-2.268	-2.234	-2.227
25		-5.225	-5.137	-5.139
50		-8.703	-8.555	-8.677
100		-13.71	-13.66	-14.14
150		-17.63	-17.87	-18.55
200		-20.91	-21.63	-22.36
250		-24.62	-25.05	-25.52
300		-27.73	-28.09	-28.17
350		-29.34	-30.83	-30.34
1	1D_2	0.001	0.001	0.001
5		0.052	0.050	0.050
10		0.183	0.180	0.181
25		0.728	0.722	0.727
50		1.724	1.711	1.742
100		3.627	3.586	3.764
150		5.534	5.705	5.563
200		6.832	6.953	7.235
250		7.944	7.907	8.783
300		8.978	9.326	10.25
350		9.573	9.558	10.63

Таблиця 1. nn -фазові зсуви.

T_{lab}, MeV	Стан	$N_{ijm}I$	$N_{ijm}II$	$N_{ijm}93$
1	1S_0	32.94	33.01	33.15
5		54.47	54.73	55.04
10		55.32	55.51	55.17
25		48.56	49.26	50.25
50		38.78	39.25	40.07
100		24.95	25.52	25.88
150		14.61	14.88	15.12
200		6.518	6.485	6.749
250		-0.204	-0.255	-0.235
300		-6.181	-6.211	-6.352
350		-11.33	-11.48	-11.84
1	3P_0	0.132	0.133	0.134
5		1.611	1.608	1.660
10		3.743	3.754	3.914
25		8.812	8.708	8.881
50		11.34	11.27	11.25
100		9.424	9.436	9.158
150		4.671	4.745	4.749
200		-0.637	-0.459	-0.521
250		-5.851	-5.742	-5.658
300		-10.32	-10.34	-11.14
350		-14.66	-15.32	-15.19
1	3P_1	-0.081	-0.080	-0.075
5		-0.884	-0.881	-0.837
10		-2.100	-2.045	-2.122
25		-5.022	-5.010	-5.137
50		-8.475	-8.418	-8.665
100		-13.61	-13.54	-14.14
150		-17.65	-17.82	-18.57
200		-20.89	-21.57	-22.35
250		-24.59	-24.43	-25.51
300		-27.73	-27.05	-28.14
350		-30.21	-30.18	-30.38
1	1D_2	0.001	0.001	0.001
5		0.039	0.041	0.042
10		0.174	0.173	0.177
25		0.716	0.714	0.723
50		1.712	1.704	1.735
100		3.658	3.745	3.756
150		5.465	5.471	5.588
200		7.021	6.997	7.224
250		8.416	8.373	8.757
300		9.389	9.324	9.242
350		10.23	10.45	10.71

Таблиця 2. pp -фазові зсуви.

VI. ВИСНОВКИ

Поряд з фазовими зсувами у задачах розсіяння приходиться мати справу з амплітудами розсіяння, елементами S -матриці і цілим рядом інших параметрів. По відомим фазам розсіяння отримують повну амплітуду, повний переріз і парціальну амплітуду розсіяння відповідно [1]

$$F(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta), \quad (9)$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l, \quad (10)$$

$$f_l = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin \delta_l, \quad (11)$$

де $P_l(\cos \theta)$ — поліноми Лежандра, θ — поляризаційний кут. В залежності від методу розрахунку зміна фази розсіяння призводить до відповідної зміни вищевказаних величин $F(\theta)$, σ , f_l . Так, наприклад, для 1S_0 -стану np -системи зміна фази розсіяння δ_l на величину ε (1–2%) дає незначну зміну дійсної та уявної частини парціальної амплітуди f_l (11).

Проведено порівняння між величинами повного перерізу розсіяння σ (в Фм^{-2}), розрахованими по фазовим зсувам з роботи [12] та фазовим зсувам згідно МФФ для потенціалів NijmI і NijmII. Результати розрахунків повного перерізу розсіяння (9) приведено у таблиці 4. Різниця між розрахунками у залежності від методу отримання фаз розсіяння складає 0.2–6.3% для pp - і 0.1–5.3% для np -розсіяння.

Розглянуто відомий метод фазових функцій для задачі одноканального нуклон–нуклонного розсіяння.

Обґрунтовано доцільність застосування методу Рунге–Кутта четвертого порядку для чисельних розрахунків фазових зсувів.

Вперше методом фазових функцій розраховано nn , pp і np фазові зсуви для відповідних спінових конфігурацій для нуклон–нуклонних потенціалів Неймегенської групи (NijmI, NijmII і Nijm93). Чисельно отримані фазові зсуви добре узгоджуються з результатами оригінальної роботи [12] для цих же потенціалів (відхилення становить не більше двох відсотків). Також порівняно результати розрахунків фазових зсувів за допомогою МФФ з фазовими зсувами для інших потенціальних моделей (Argonne v18 [26] і CD-Bonn [19]) і для парціального хвильового аналізу: відхилення між цими даними становить до п'яти відсотків.

По розрахованим фазовим зсувам за МФФ обчислено повний переріз pp - і np -розсіяння σ та порівняно його з величиною повного перерізу, отриманого по фазовим зсувам з роботи [12]. Отримано й парціальну амплітуду розсіяння f_l для 1S_0 -стану np -системи. Значення σ і f_l мало відрізняються від величин, отриманих по відомим фазам в інших роботах для вказаних потенціалів міжнуклонної взаємодії.

T_{lab} , MeV	Стан	NijmI	NijmII	Nijm93
1	1S_0	62.42	62.37	62.88
5		63.85	63.74	64.19
10		60.18	60.02	60.42
25		51.19	51.15	51.55
50		40.64	40.53	40.94
100		26.55	26.32	26.87
150		16.27	16.16	16.75
200		8.142	7.945	8.357
250		1.449	1.127	1.505
300		-4.341	-4.719	-4.517
350		-9.847	-9.984	-10.26
1	3P_0	0.177	0.176	0.179
5		1.621	1.614	1.635
10		3.623	3.615	3.665
25		8.090	8.072	8.111
50		10.95	10.84	10.39
100		8.381	8.583	8.315
150		3.582	3.854	3.924
200		-1.565	-1.441	-1.543
250		-6.542	-6.589	-7.145
300		-11.24	-11.35	-11.82
350		-15.59	-16.12	-16.74

1	1P_1	-0.186	-0.188	-0.177
5		-1.475	-1.488	-1.388
10		-3.112	-3.127	-3.285
25		-6.274	-6.451	-6.681
50		-9.597	-10.14	-10.19
100		-14.15	-14.27	-14.76
150		-18.54	-18.72	-19.18
200		-21.75	-21.89	-22.74
250		-23.96	-24.15	-25.11
300		-26.48	-26.42	-27.85
350		-27.81	-28.37	-29.84
1	3P_1	-0.109	-0.108	-0.107
5		-0.943	-0.921	-0.925
10		-2.075	-2.056	-2.032
25		-4.946	-4.845	-4.853
50		-8.412	-8.392	-8.352
100		-13.32	-13.37	-13.83
150		-17.45	-17.63	-18.35
200		-20.88	-21.16	-22.01
250		-24.32	-24.75	-25.24
300		-27.54	-27.22	-28.17
350		-30.59	-30.13	-31.14
1	1D_2	0.001	0.001	0.001
5		0.041	0.040	0.042
10		0.158	0.157	0.157
25		0.687	0.675	0.678
50		1.680	1.679	1.703
100		3.744	3.758	3.775
150		5.671	5.695	5.656
200		7.586	7.302	7.359
250		8.562	8.471	8.934
300		9.583	9.494	10.42
350		10.67	10.52	10.99
1	3D_2	0.009	0.009	0.008
5		0.222	0.221	0.224
10		0.854	0.852	0.863
25		3.735	3.727	3.822
50		9.041	8.982	9.426
100		17.57	17.25	17.68
150		22.44	22.19	22.42
200		24.43	24.57	24.64
250		25.29	25.38	26.38
300		24.70	25.51	25.91
350		24.63	25.04	25.33

Таблиця 3. np -фазові зсуви.

T_{lab} , MeV	σ_{pp} [12]	σ_{pp}	σ_{np} [12]	σ_{np}	σ_{pp} [12]	σ_{pp}	σ_{np} [12]	σ_{np}
	NijmI	NijmI	NijmI	NijmI	NijmII	NijmII	NijmII	NijmII
1	76.43	77.05	203.57	204.73	76.47	77.34	203.50	204.55
5	175.12	173.38	210.95	211.33	175.24	174.49	210.66	210.93
10	180.23	180.60	202.53	202.88	180.30	181.38	202.08	202.24
25	170.38	170.97	194.36	194.56	170.19	173.67	193.60	194.58
50	151.62	150.59	209.33	210.49	151.24	152.07	208.84	211.44
100	114.58	115.91	279.38	281.15	114.87	117.78	279.62	278.10
150	105.24	105.44	369.83	375.39	105.63	107.58	368.79	374.61
200	127.40	122.31	462.99	458.01	126.69	128.36	459.88	462.29
250	173.87	171.39	553.32	538.46	171.53	169.17	549.59	545.88
300	237.09	232.03	638.68	617.33	232.80	224.10	637.06	627.45
350	310.94	299.13	718.04	707.62	304.82	305.31	721.31	718.38

Таблиця 4. Повний переріз розсіяння (NijmI і NijmII).

-
- [1] В. В. Баби́ков, *Метод фазовых функций в квантовой механике* (Наука, Москва, 1988).
- [2] І. Гайсак, В. Жаба, Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. **44**, 8 (2009).
- [3] E. Epelbaum, H. Krebs, U.-G. Meißner, Eur. Phys. J. A **51**, 53 (2015).
- [4] D. R. Entem, N. Kaiser, R. Machleidt, Y. Nosyk, Phys. Rev. C **91**, 014002 (2015).
- [5] I. Dubovyk, O. Shebeko, Few-Body Systems **48**, 109 (2010).
- [6] R. N. Perez, J. E. Amaro, E. R. Arriola, Phys. Rev. C **88**, 024002 (2013).
- [7] U. Laha, J. Bhoi, Pramana **81**, 959 (2013).
- [8] M. Albaladejo, J. A. Oller, Phys. Rev. C **84**, 054009 (2011).
- [9] M. P. Valderrama, E. R. Arriola, Phys. Rev. C **74**, 064004 (2006).
- [10] R. Krivec, V. B. Mandelzweig, Comput. Phys. Comm. **152**, 165 (2003).
- [11] V. P. Dzyuba, R. V. Romashko, I. N. Zvestovskaya, Yu. N. Kulchin, Bull. Lebedev Phys. Inst. **42**, 10 (2015).
- [12] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, J. de Swart, Phys. Rev. C **49**, 2950 (1994).
- [13] В. В. Баби́ков, Усп. физ. наук **92**, 3 (1967).
- [14] P. M. Morse, W. P. Allis, Phys. Rev. **44**, 269 (1933).
- [15] Г. Ф. Друкарев, Журн. эксп. теор. физ. **19**, 247 (1949).
- [16] O. Bergmann, Acta Phys. Austriaca **4**, 62 (1950).
- [17] F. Calogero, Nuovo Cim. **27**, 261 (1963).
- [18] Ch. Zemach, Nuovo Cim. **33**, 939 (1964).
- [19] R. Machleidt, Phys. Rev. C **63**, 024001 (2001).
- [20] V. I. Kukulín, I. T. Obukhovskiy, V. N. Pomerantsev, A. Faessler, J. Phys. G **27**, 1851 (2001).
- [21] D. R. Entem, R. Machleidt, Phys. Lett. B **524**, 93 (2002).
- [22] V. A. Knyr, V. G. Neudatchin, N. A. Khokhlov, Phys. Atom. Nucl. **69**, 2034 (2006).
- [23] C. A. da Rocha, R. Higa, M. R. Robilotta, Braz. J. Phys. **37**, 75 (2007).
- [24] G. P. Kamuntavicius, M. Kaminskas, Cent. Eur. J. Phys. **8**, 970 (2010).
- [25] M. M. Nagels, T. A. Rijken, J. J. de Swart, Phys. Rev. D **17**, 768 (1978).
- [26] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, R. Schiavilla, Phys. Rev. C **51**, 38 (1995).
- [27] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, M. C. M. Rentmeester, J. J. de Swart, Phys. Rev. C **48**, 792 (1993).
- [28] Н. Н. Калиткин, *Численные методы* (Наука, Москва, 1978).
- [29] А. Е. Мудров, *Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль* (РАСКО, Томск, 1991).
- [30] В. И. Ракитин, В. Е. Первушин, *Практическое руководство по методам вычислений с применением программ для персональных компьютеров* (Высшая школа, Москва, 1998).

CALCULATION OF PHASES OF NUCLEON-NUCLEON SCATTERING FOR POTENTIALS NijmI, NijmII AND Nijm93 ON THE PHASE-FUNCTION METHOD

V. I. Zhaba

*Uzhgorod National University, Department of Theoretical Physics,
54, Voloshyna St., Uzhhorod, UA-88000, Ukraine,
e-mail: viktorzh@meta.ua*

For the calculation of single-channel nucleon–nucleon scattering the phase-functions method has been proposed. Using the phase-functions method the following phase shifts of a nucleon–nucleon scattering are calculated numerically: nn (1S_0 -, 3P_0 -, 3P_1 -, 1D_2 -state), pp (1S_0 -, 3P_0 -, 3P_1 -, 1D_2 -state) and np (1S_0 -, 1P_1 -, 3P_0 -, 3P_1 -, 1D_2 -, 3D_2 -state). The calculations have been performed using realistic nucleon–nucleon potentials Nijmegen groups (NijmI, NijmII and Nijm93). The feasibility of the fourth-order Runge–Kutta method for numerical calculations of phase shifts was explained. When choosing the step of the optimized calculations phase shifts of up to 0.01 were received. The obtained phase shifts are in good agreement with the results obtained in the framework of other methods. They are also in good agreement with the results of the original paper for the same potential. The deviation is not more than 2%. We also compared the results of calculations of the phase shift under the phase-functions method with the phase shift for other potential models (Argonne v18 and CD-Bonn) and for the partial wave analysis. The deviation between these data is up to 5%. Using the obtained phase shifts we have calculated the full cross-section and the partial scattering amplitudes. These results are in good agreement with those obtained by using known phases published in the literature.