

АНАЛІТИЧНІ ФОРМИ ХВИЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ В КООРДИНАТНОМУ ПРЕДСТАВЛЕННІ І ТЕНЗОРНА ПОЛЯРИЗАЦІЯ ДЕЙТРОНА ДЛЯ ПОТЕНЦІАЛІВ НЕЙМЕГЕНСЬКОЇ ГРУПИ

В. І. Жаба

*Ужгородський національний університет, кафедра теоретичної фізики,
вул. Волошина, 54, Ужгород, 88000, Україна
(Отримано 23 грудня 2015 р.)*

Чисельно розраховані коефіцієнти чотирьох апроксимаційних залежностей для чисельних значень хвильової функції дейтрона в координатному представленні для реалістичних феноменологічних потенціалів Неймегенської групи (NijmI, NijmII, Nijm93 і Reid93). Аналітичні форми вибрано у вигляді добутка степеневі функції r^n на суми експоненціальних членів. Досліджено поведінку значення χ^2 у залежності від кількості доданків розкладу N_i . Для мінімальних значень χ^2 за аналітичними формами побудовано хвильові функції дейтрона в координатному представленні, які не містять надлишкових вузлів. Розраховані параметри дейтрона добре узгоджуються з теоретичними й експериментальними даними. Знайдено за отриманими хвильовими функціями дейтронну тензорну поляризацію $t_{20}(p)$, $t_{21}(p)$ і $t_{22}(p)$ в інтервалі імпульсів $0-7 \text{ fm}^{-1}$. Значення $t_{20}(p)$ для потенціалів Неймегенської групи добре узгоджується з літературними результатами для інших потенціальних нуклон-нуклонних моделей, а також з експериментальними даними. Отримані результати дейтронної тензорної поляризації $t_{ij}(p)$ дають певну інформацію про електромагнітну структуру дейтрона. І за нею, при відомій тензорній аналізуючій здатності можна розрахувати диференціальний переріз подвійного розсіяння.

Ключові слова: дейтрон, хвильова функція, апроксимація, аналітична форма, поляризація.

PACS number(s): 13.40.Gp, 13.88.+e, 21.45.Bc, 03.65.Nk

І. ВСТУП

Дейтрон є найпростішим ядром, яке складається з двох сильно взаємодіючих частинок (протона і нейтрона). Завдяки простій будові дейтрон є зручною лабораторією для вивчення нуклон-нуклонних сил. На сьогодні він добре вивчений як експериментально, так і теоретично.

Розрахунки статичних характеристик дейтрона (енергія зв'язку, магнітний момент, електричний квадрупольний момент та ін.) добре узгоджуються з експериментальними даними [1]. Але, незважаючи на це, існують певні теоретичні неузгодженості. Наприклад, у деяких теоретичних працях [1] одна (Боннський потенціал) або обидві (Московський потенціал) [3] компоненти хвильової функції мають вузли поблизу початку координат. Така поведінка хвильової функції суперечить загальній математичній теоремі про кількість вузлів власних функцій крайових задач [4]. Основному стану системи відповідає функція без вузлів у середині інтервалу крайової задачі. Наявність вузлів у хвильових функціях основного і єдиного стану дейтрона може вказувати на існування певних неузгодженостей у реалізації чисельних алгоритмів, які застосовуються в подібних задачах. У роботі [5] показано, що асимптотика компонент зв'язку системи рівнянь уже не визначається одним орбітальним моментом L , як у випадку з зв'язками одиночного рівняння Шредингера, а обумовлюється повним орбітальним моментом J і асимптотичною по-

ведінкою тензорного потенціала на малих відстанях, який забезпечує зв'язування рівнянь Шредингера в систему. Вплив вибору чисельних алгоритмів на розв'язки задачі наведено в працях [5–7].

Такі потенціали нуклон-нуклонної взаємодії, як Боннський [2], Московський [3], потенціали Неймегенської групи (NijmI, NijmII, Nijm93 [8]), Argonne v18 [9] чи Паризький потенціал [10] мають досить непросту структуру і громіздкий запис. Оригінальний потенціал Рейда Reid68 був параметризований на основі фазового аналізу Неймегенською групою й отримав назву Reid93. Параметризація проведена для 50 параметрів потенціала, причому $\chi^2/N_{\text{data}}=1.03$ [8].

Хвильова функція описує квантовомеханічну систему і є основною характеристикою мікрооб'єктів. Знання хвильової функції дейтрона дозволяють отримати максимальну інформацію про систему та теоретично розрахувати характеристики, вимірювані на експерименті. Хвильову функцію дейтрона знаходять як розв'язок системи зв'язаних рівнянь Шредингера.

Крім того, хвильова функція дейтрона може бути представлена таблично: через відповідні масиви значень радіальних хвильових функцій. Іноді при чисельних розрахунках оперувати такими масивами чисел доволі складно. І текст програм для чисельних розрахунків перевантажений. Тому доцільно отримати простіші аналітичні форми представлення хвильових функцій дейтрона в координатному зображенні. У подальшому такі аналітичні форми хвильової функції можна використовувати для розрахунку параметрів,

формфакторів і поляризаційних характеристик дейтрона.

II. АПРОКСИМАЦІЯ ХВИЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ ДЕЙТРОНА В КООРДИНАТНОМУ ПРЕДСТАВЛЕННІ

Відомі чисельні значення радіальної хвильової функції дейтрона в координатному представленні для потенціалів Неймегенської групи (NijmI, NijmII, Nijm93 і Reid93) можна апроксимувати за допомогою зручних розкладів [11] в аналітичній формі:

$$\begin{cases} u_1(r) = \sum_{i=1}^{N_1} A_i \exp(-a_i r^2), \\ w_1(r) = r^2 \sum_{i=1}^{N_1} B_i \exp(-b_i r^2), \end{cases} \quad (1)$$

У роботі [11] значення $N_1=13$.

Для розв'язку системи зв'язаних рівнянь Шредингера, що описують дейтронні радіальні хвильові функції, ще в 1995 році було запропоновано параметризацію [12]:

$$\begin{cases} u = ar e^{-\mu r}, \\ w = br e^{-\mu r}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = ar^2 e^{-\mu r}, \\ w = br^3 e^{-\mu r}. \end{cases}$$

Їх можна узагальнити для апроксимації хвильової функції дейтрона у вигляді таких аналітичних форм:

$$\begin{cases} u_2(r) = r \sum_{i=1}^{N_2} A_i \exp(-a_i r), \\ w_2(r) = r^3 \sum_{i=1}^{N_2} B_i \exp(-b_i r), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u_3(r) = r \sum_{i=1}^{N_3} A_i \exp(-a_i r^2), \\ w_3(r) = r \sum_{i=1}^{N_3} B_i \exp(-b_i r^2), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_4(r) = r^2 \sum_{i=1}^{N_4} A_i \exp(-a_i r^3), \\ w_4(r) = r^2 \sum_{i=1}^{N_4} B_i \exp(-b_i r^3). \end{cases} \quad (4)$$

Звичайно, можна апроксимувати хвильову функцію дейтрона за допомогою узагальнених аналітичних форм:

$$\begin{cases} u(r) = r^A \sum_{i=1}^N A_i \exp(-a_i r^a), \\ w(r) = r^B \sum_{i=1}^N B_i \exp(-b_i r^b), \end{cases} \quad (5)$$

або паде-апроксимант вигляду:

$$\begin{cases} u(r) = \frac{1+a_1 r+a_2 r^4}{(1+a_3 r+a_4 r^2+a_5 r^3)^2}, \\ w(r) = \frac{1+b_1 r+b_2 r^4}{(1+b_3 r+b_4 r^2+b_5 r^3)^2}. \end{cases} \quad (6)$$

Крім (1)–(6), у літературі наявна ще одна аналітична форма хвильової функції дейтрона [2, 10, 13]:

$$\begin{cases} u_5(r) = \sum_{j=1}^{N_5} C_j \exp(-m_j r), \\ w_5(r) = \sum_{j=1}^{N_5} D_j \exp(-m_j r) \left[1 + \frac{3}{m_j r} + \frac{3}{(m_j r)^2} \right], \end{cases} \quad (7)$$

де $m_j = \beta + (j - 1)m_0$, $\beta = \sqrt{ME_d}$, $m_0=0.9 \text{ fm}^{-1}$. M – нуклонна маса, E_d – енергія зв'язку дейтрона.

Крайові умови для (7) при $r \rightarrow 0$:

$$u_b(r) \rightarrow r, \quad w_b(r) \rightarrow r^3. \quad (8)$$

Асимптотики хвильової функції дейтрона (7) на $r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} u(r) &\sim A_S \exp(-\beta r), \\ w(r) &\sim A_D \exp(-\beta r) \left[1 + \frac{3}{\beta r} + \frac{3}{(\beta r)^2} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

де A_S і A_D – асимптотики нормування S - і D - станів.

Пошук коефіцієнтів аналітичної форми (7) був здійснений для Паризького [10] і Боннського [2] потенціалів, причому $N_5=13$ і 11 відповідно. Останні коефіцієнти аналітичної форми (7) визначали за формулами [13]

$$\begin{cases} C_n = - \sum_{j=1}^{n-1} C_j \\ D_{n-2} = \frac{m_{n-2}^2}{(m_n^2 - m_{n-2}^2)(m_{n-1}^2 - m_{n-2}^2)} \left[-m_{n-1}^2 m_n^2 \sum_{j=1}^{n-3} \frac{D_j}{m_j^2} + (m_{n-1}^2 + m_n^2) \sum_{j=1}^{n-3} D_j - \sum_{j=1}^{n-3} D_j m_j^2 \right] \end{cases}$$

або з умови

$$\sum_{j=1}^{N_b} C_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{N_b} D_j = \sum_{j=1}^{N_b} D_j m_j^2 = \sum_{j=1}^{N_b} \frac{D_j}{m_j^2} = 0.$$

Точність параметризації (7) характеризується величинами [2]

$$I_S = \left(\int_0^\infty [u(r) - u_{\text{approx}}(r)]^2 dr \right)^{1/2}$$

і

$$I_D = \left(\int_0^\infty [w(r) - w_{\text{approx}}(r)]^2 dr \right)^{1/2}.$$

Вибір необхідної апроксимації хвильової функції дейтрона для потенціалів Неймегенської групи проведено після розрахунку й мінімізації величини

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_p))^2}{n - p}, \quad (10)$$

де n — кількість точок масиву y_i чисельних значень хвильових функцій дейтрона в координатному зображенні; f — апроксимуюча функція u (або w) згідно з формулами (1)–(4); a_1, a_2, \dots, a_p — параметри; p — кількість параметрів (коефіцієнтів у сумах формул (1)–(6)). Отже, χ^2 визначається не тільки формою апроксимуючої функції f , але і кількістю вибраних параметрів.

Для узагальнених аналітичних форм (5) хвильової функції дейтрона для потенціалів Неймегенської групи (NijmI, NijmII, Nijm93 і Reid93 [14, 15]) значення

$$a = 0.8 \div 3.5, \\ b = 0.7 \div 3.1,$$

$$A = 0.9 \div 2.2, \\ B = 0.8 \div 3.7.$$

Виникають труднощі одночасних чисельних розрахунків оптимальних значень і коефіцієнтів A_i, a_i, B_i, b_i і степенів a, A, b, B функцій перед сумами експоненціальних членів. Для цього потрібно затратити значний час. Причому значення χ^2 при застосуванні (5) становить 10^{-5} і 10^{-6} для $u(r)$ і $w(r)$ відповідно. Тому доцільно використати інші апроксимації у вигляді (1)–(4).

Незважаючи на громіздкі й тривалі розрахунки й мінімізації χ^2 (до величини менших за 10^{-7}), довелося апроксимувати чисельні значення хвильових функцій дейтрона для потенціалів Неймегенської групи, масиви чисел яких становили по 839×4 значень в інтервалі $r=0-25$ fm. У праці [11] значення $N_1=13$ для аналітичних форм (1), а величина $\chi^2=10^{-4}$.

Проаналізувавши величини χ^2 залежно від кількості доданків розкладу N_i , можна вибрати найкращі аналітичні форми, для яких χ^2 є мінімальним. Оптимальні значення χ^2 для потенціалів NijmI, NijmII, Nijm93 і Reid93 наведено в таблицях 1 і 2. Для $u(r)$ мінімальне значення χ^2 становить 10^{-8} , для $w(r)$ — 10^{-10} . Для найкращих апроксимацій за аналітичними формами (3) і (4) наведено значення коефіцієнтів A_i, a_i, B_i, b_i у таблицях 3–5. Слід зауважити, що значення числа N_i експоненціальних членів відрізняється.

	N_i	NijmI	N_i	NijmII	N_i	Nijm93	N_i	Reid93
$\chi^2(u_1)$	9	3.23E-07	16	1.75E-07	26	3.62E-07	9	1.05E-07
$\chi^2(u_2)$	22	2.40E-06	19	5.46E-06	28	5.72E-06	21	3.10E-06
$\chi^2(u_3)$	22	1.39E-08	21	7.57E-08	23	9.71E-08	14	6.05E-08
$\chi^2(u_4)$	12	3.24E-07	17	4.22E-08	13	5.82E-07	17	2.73E-07

Таблиця 1. Значення χ^2 для $u(r)$.

	N_i	NijmI	N_i	NijmII	N_i	Nijm93	N_i	Reid93
$\chi^2(w_1)$	8	1.09E-09	12	2.51E-09	16	3.88E-09	8	1.25E-09
$\chi^2(w_2)$	23	2.43E-06	28	2.96E-07	27	3.99E-07	10	3.31E-06
$\chi^2(w_3)$	9	7.25E-10	10	2.33E-10	13	7.57E-10	13	9.18E-10
$\chi^2(w_4)$	13	5.81E-09	13	5.11E-09	13	1.05E-08	23	6.46E-09

Таблиця 2. Значення χ^2 для $w(r)$.

В. І. ЖАБА

i	A_i (NijmI)	a_i (NijmI)	A_i (NijmII)	a_i (NijmII)	A_i (Nijm93)	a_i (Nijm93)
1	-0.65345275	1.59225711	-0.19569428	4.60058099	-0.77445296	3.26497657
2	0.26608299	0.03231823	0.00663737	0.01644815	0.04820149	5.40063554
3	0.41915681	1.12130810	0.00862713	0.00677483	0.04306656	0.02143342
4	0.26502640	0.03227274	0.03586726	0.03466960	0.00712233	0.00700777
5	-0.50557522	0.03121885	0.09210867	2.33805543	-0.38021033	0.08326534
6	0.00646805	0.00676810	0.00621875	0.01558437	0.04820151	5.40063551
7	0.23197239	0.27780909	0.00374013	0.00296664	0.34788824	0.07472803
8	0.26438006	0.03223922	0.06574994	0.07739826	0.34825405	0.07387997
9	-0.50557522	0.03121885	0.03097181	1.45965494	-0.38021031	0.08326492
10	0.26605932	0.03231726	0.00005375	0.00016415	0.04820151	5.40063552
11	0.24448619	0.27655964	0.00137944	0.00126175	0.33964988	0.08715992
12	0.26608323	0.03231824	0.11138753	0.17275678	0.34309582	0.08482927
13	-0.50557522	0.03121885	0.18506043	0.86872344	-0.38021031	0.08326482
14	0.25907795	0.02512618	0.00038765	0.00050156	0.04820153	5.40063550
15	0.24305785	0.27640482	0.00586326	0.01415856	0.19366405	0.20757483
16	0.26620745	0.03232219	0.16598510	0.38689425	0.33812058	0.08780056
17	-0.50557522	0.03121885	-0.27735212	10.90789381	-0.38021030	0.08326471
18	0.26552972	0.03229750	—	—	0.04820151	5.40063551
19	0.21418820	0.16482022	—	—	0.32300475	0.08957323
20	0.24871268	0.27599693	—	—	0.21597620	0.57841172
21	-0.85199193	0.25212374	—	—	-0.38021031	0.08326475
22	0.06226940	0.09262115	—	—	0.04820151	5.40063551
23	—	—	—	—	0.04820150	5.40063553

Таблиця 3. Коефіцієнти A_i , a_i для потенціалів NijmI, NijmII, Nijm93.

i	B_i (NijmI)	b_i (NijmI)	B_i (NijmII)	b_i (NijmII)	B_i (Nijm93)	b_i (Nijm93)
1	0.11491891	0.54827164	-0.00465589	0.02193127	-9.06664664	4.36236821
2	0.04428183	0.24986980	0.00037712	0.00743061	0.00027935	0.00680125
3	0.02816015	0.08220239	0.01609925	0.05788164	0.08281352	0.29879974
4	-0.27726826	3.10996974	-0.17012685	2.47341883	2.20537864	4.41927611
5	0.00066274	0.00887428	0.08621268	0.31797141	0.04748647	0.67534312
6	0.00642751	0.02906143	-0.60979637	5.85795063	0.02036402	0.09879088
7	0.03868162	0.19121591	0.08716347	0.67932216	0.00256313	0.01890703
8	-0.27726826	3.10996974	0.54059159	6.82846468	2.20537864	4.41927611
9	0.32142430	3.81104768	0.00822613	0.02192146	0.04699320	0.67532904
10	—	—	0.04649509	0.13963851	0.01089669	0.04710698
11	—	—	—	—	0.02914427	0.15128860
12	—	—	—	—	2.20537864	4.41927611
13	—	—	—	—	2.20974479	4.41552825

Таблиця 4. Коефіцієнти B_i , b_i для потенціалів NijmI, NijmII, Nijm93.

i	A_i	a_i	B_i	b_i
1	-1.41398807	2.10591564	-1.34779264	2.39924081
2	0.00373401	0.00574094	0.01499711	0.05552601
3	0.24550732	1.67466778	0.02330345	0.42021263
4	0.05941291	0.03699966	0.40634042	2.24214564
5	0.13027700	0.56741103	0.00331801	0.02119804
6	0.18195822	0.21585460	0.12824075	0.81521429
7	0.24550732	1.67466778	0.04422400	0.13357537
8	0.11163396	0.08922696	0.40634042	2.24214564
9	0.13024186	0.56730955	0.00035172	0.00728043
10	0.02307881	0.01499797	0.03779829	0.30032137
11	0.24550732	1.67466778	0.03758227	0.30164198
12	0.24550732	1.67466778	0.40634042	2.24214564
13	-0.40221490	1.23361827	-0.16056155	1.43423148
14	0.24550732	1.67466778	-	-

Таблиця 5. Коефіцієнти A_i, a_i, B_i, b_i для потенціала Reid93.

На відміну від (7) аналітичні форми (1)–(4) є зручними завдяки тій особливості, що забезпечують крайову умову $u(0)=0; w(0) = 0$. І не потрібно додатково знаходити асимптотику хвильових функцій поблизу початку координат. Для $r \rightarrow \infty$ використано асимптотику вигляду (9).

надлишкових вузлів. На рис. 1 і 2 вказано поведінку хвильових функцій дейтрона біля початку координат. Отримані хвильові функції дейтрона добре корелюють із даними праці [14].

III. ПАРАМЕТРИ ДЕЙТРОНА

Якщо відомі хвильові функції (1)–(4) в координатному представленні, тоді можна розрахувати параметри дейтрона [2]:

– радіус дейтрона r_d :

$$r_d = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty r^2 [u^2(r) + w^2(r)] dr \right\}^{1/2};$$

– електричний квадрупольний момент Q_d :

$$Q_d = \frac{1}{20} \int_0^\infty r^2 w(r) [\sqrt{8}u(r) - w(r)] dr;$$

– магнітний момент:

$$\mu_d = \mu_n + \mu_p - \frac{3}{2} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) P_D;$$

– внесок D -стану:

$$P_D = \int_0^\infty w^2(r) dr;$$

– асимптотика D/S -стану:

$$\eta = A_D/A_S.$$

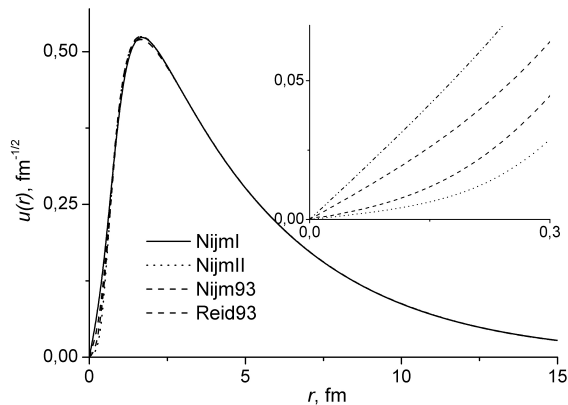


Рис. 1. Хвильова функція дейтрона $u(r)$.

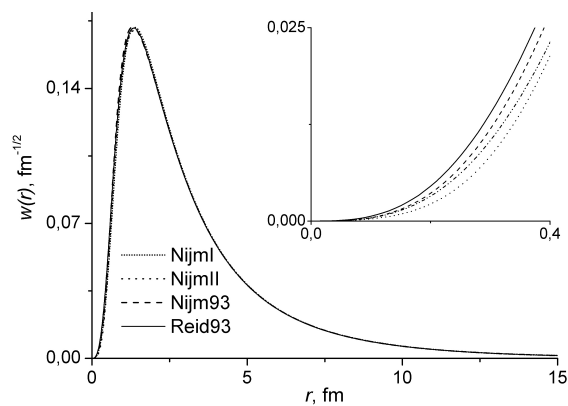


Рис. 2. Хвильова функція дейтрона $w(r)$.

Розраховані радіальні хвильові функції дейтрона в конфігураційному представленні $u(r)$ і $w(r)$, згідно з коефіцієнтами A_i, a_i, B_i, b_i (таблиці 3–5), не містять

Потенціал	P_D (%)	r_m (fm)	Q_d (fm ²)	μ_d	η
Nijm I (1)	5.66437	1.9664	0.271833	0.84753	0.0250102
Nijm I (2)	5.65679	1.96989	0.270154	0.847573	0.0266637
Nijm I (3)	5.66441	1.96625	0.271866	0.84753	0.0249765
Nijm I (4)	5.66478	1.96599	0.271905	0.847528	0.0255289
Nijm I [8, 15]	5.664	1.967	0.2719	–	0.0253
Nijm II (1)	5.63537	1.96743	0.270482	0.847695	0.0247499
Nijm II (2)	5.64001	1.96795	0.27046	0.847669	0.0266036
Nijm II (3)	5.63527	1.9674	0.270726	0.847696	0.0251843
Nijm II (4)	5.63552	1.96736	0.270679	0.847694	0.0254304
Nijm II [8, 15]	5.635	1.968	0.2707	–	0.0252
Nijm 93 (1)	5.75461	1.96591	0.270461	0.847016	0.0247129
Nijm 93 (2)	5.74642	1.96625	0.265676	0.847063	0.0231203
Nijm 93 (3)	5.75431	1.96579	0.270642	0.847018	0.0253275
Nijm 93 (4)	5.75447	1.96573	0.270569	0.847017	0.025423
Nijm 93 [8, 15]	5.755	1.966	0.2706	–	0.0252
Reid93 (1)	5.69877	1.9685	0.270269	0.847334	0.0247946
Reid93 (2)	5.69496	1.9686	0.263974	0.847356	0.0255032
Reid93 (3)	5.69888	1.96845	0.270325	0.847333	0.0252039
Reid93 (4)	5.69927	1.96842	0.270346	0.847331	0.0251474
Reid93 [8, 15]	5.699	1.969	0.2703	–	0.0251
Експеримент [16]	–	1.975(3)	0.2859(3)	0.8574382284	0.0256(4)

Таблиця 6. Параметри дейтрона.

Значення отриманого магнітного моменту дейтрона наведено в ядерних магнетонах μ_N . Розраховані параметри дейтрона подано в таблиці 6. Вони добре узгоджуються з теоретичними [8, 15] й експериментальними [16] результатами.

IV. ФОРМФАКТОРИ І ТЕНЗОРНА ПОЛЯРИЗАЦІЯ ДЕЙТРОНА

Для кількісного розуміння структури дейтрона, S - і D -станів та поляризаційних характеристик розглядаються різні моделі нуклон-нуклонного потенціала. Розподіл заряду дейтрона добре не відомий з експерименту, тому що це здійснюється тільки через використання як вимірювань поляризації, так і неполяризованих пружних розсіяних диференціальних перерізів. Однак його можна визначити [17]. Диференціальний переріз пружного розсіяння неполяризованих електронів неполяризованими дейтронами без вимірювання поляризації відбитих електронів і дейтронів є вираз [18–21]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{МОТТ}} S, \quad (11)$$

$$S = A(p) + B(p) \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (12)$$

Тут θ — кут розсіяння в лабораторній системі, p — імпульс дейтрона в одиницях fm^{-1} , $A(p)$ і $B(p)$ — функції електричної та магнітної структури [18, 21]:

$$A(p) = F_C^2(p) + \frac{8}{9}\eta^2 F_Q^2(p) + \frac{2}{3}\eta F_M^2(p), \quad (13)$$

$$B(p) = \frac{4}{3}\eta(1 + \eta)F_M^2(p), \quad (14)$$

де $\eta = \frac{p^2}{4M_D^2}$; $M_D=1875.63$ MeV — дейтронна маса. Зарядовий $F_C(p)$, квадрупольний $F_Q(p)$ і магнітний $F_M(p)$ формфактори містять інформацію про електромагнітні властивості дейтрона:

$$F_C = [G_{Ep} + G_{En}] \int_0^\infty [u^2 + w^2] j_0 dr, \quad (15)$$

$$F_Q = \frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{9}{8}} [G_{Ep} + G_{En}] \int_0^\infty \left[uw - \frac{w^2}{\sqrt{8}} \right] j_2 dr, \quad (16)$$

$$F_M = 2[G_{Mp} + G_{Mn}] \int_0^\infty \left[\left(u^2 - \frac{w^2}{2} \right) j_0 + \left(\frac{uw}{\sqrt{2}} + \frac{w^2}{2} \right) j_2 \right] dr + \frac{3}{2} [G_{Ep} + G_{En}] \int_0^\infty w^2 [j_0 + j_2] dr, \quad (17)$$

де u і w — радіальні хвильові функції дейтрона в координатному представленні, j_0 , j_2 — сферичні функції Бесселя від аргументу $pr/2$. G_{Ep} і G_{En} — протонний і нейтронний електричний формфактори, G_{Mp} і G_{Mn} — протонний і нейтронний магнітний формфактори. Ці формфактори рівні

$$G_{Ep} = \left(1 + \frac{p^2}{18.235} \right)^{-2}; \quad G_{En} = 0;$$

$$G_{Mp} = \mu_p G_{Ep}; \quad G_{Mn} = \mu_n G_{Ep},$$

де μ_p і μ_n — протонний і нейтронний магнітний моменти в ядерних магнетонах.

В експериментах з неполяризованого пружного розсіяння функції структури можна отримати, визначаючи $B(p)$ безпосередньо з поперечного перерізу розсіяння назад. Рівняння (14) містить магнітний формфактор $F_M(p)$, який з $F_C(p)$ і $F_Q(p)$ є складовою частиною і в (13). Таким чином, додатком до неполяризованого розсіяння повинна також розглядатися і помітна поляризація [21]. Оскільки спін дейтрона дорівнює $S = 1$, то тензорна і векторна поляризація є також помітними і можуть бути розрахованими й розглядатися в задачах розсіяння. Тензорна поляризація відбитих дейтронів визначається такими виразами [17] через формфактори (15)–(17):

$$t_{20}(p) = -\frac{1}{\sqrt{2}S} \left(\frac{8}{3}\eta F_C(p)F_Q(p) + \frac{8}{9}\eta^2 F_Q^2(p) + \frac{1}{3}\eta \left[1 + 2(1 + \eta)\tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] F_M^2(p) \right), \quad (18)$$

$$t_{21}(p) = \frac{2}{\sqrt{3}S \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)} \eta \sqrt{\eta + \eta^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} F_M(p)F_Q(p), \quad (19)$$

$$t_{22}(p) = -\frac{1}{2\sqrt{3}S} \eta F_M^2(p). \quad (20)$$

Величина тензорної поляризації $t_{20}(p)$ визначається формфакторами $F_C(p)$, $F_Q(p)$, $F_M(p)$ і кутом розсіяння θ , а $t_{21}(p)$ — $F_Q(p)$, $F_M(p)$ і θ . $t_{22}(p)$ залежить тільки від формфактора $F_M(p)$ і не залежить від кута розсіяння. Поляризацію відбитого дейтрона можна виміряти, аналізуючи розсіяння. Диференціальний переріз для подвійного процесу розсіяння [18, 22]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d\Omega_2} = \frac{d\sigma}{d\Omega d\Omega_2} \Big|_0 \left[1 + \frac{3}{2} h p_x A_y \sin \phi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} t_{20} A_{zz} - \frac{2}{\sqrt{3}} t_{21} A_{xz} \cos \phi_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} t_{22} (A_{xx} - A_{yy}) \cos 2\phi_2 \right], \quad (21)$$

де $h = \pm 1/2$ — поляризація падаючого електронного пучка; ϕ_2 — кут між двома розсіюючими площинами; A_y і A_{ij} — векторна й тензорна аналізуючі здатності вторинного розсіяння; $t_{20}(p)$, $t_{21}(p)$ і $t_{22}(p)$ визначаються формулами (18)–(20).

Розраховано тензорну поляризацію для Неймегенської групи і порівняно отримані результати з літературними теоретичними й експериментальними даними [11, 16, 17, 23–28].

Проаналізовано вплив точності χ^2 апроксимації (1) хвильової функції дейтрона в координатному представленні на розрахунок тензорної поляризації $t_{20}(p)$ при куті розсіяння $\theta = 70^\circ$ для потенціала Reid93 (рис. 3). Порівняно $t_{20}(p)$, розраховані за двома отриманими апроксимаціями (лінії 1 і 2), з апроксимацією 3 за коефіцієнтами з праці [11]. Значення χ^2 апроксимацій для хвильових функцій $u(r)$ і $w(r)$ становлять 10^{-6} і 10^{-6} , 10^{-7} і 10^{-9} , 10^{-4} і 10^{-4} відповідно. Виявилось,

що “гірша” апроксимація значно впливає на результат розрахунку тензорної поляризації $t_{20}(p)$. Наприклад, при імпульсі 3.6 fm^{-1} між апроксимаціями 2 і 3 становить 2,7%.

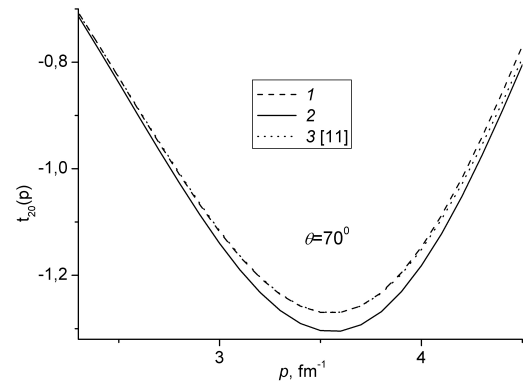


Рис. 3. Дейтронна тензорна поляризація $t_{20}(p)$ для потенціала Reid93. Кут розсіяння $\theta=70^\circ$.

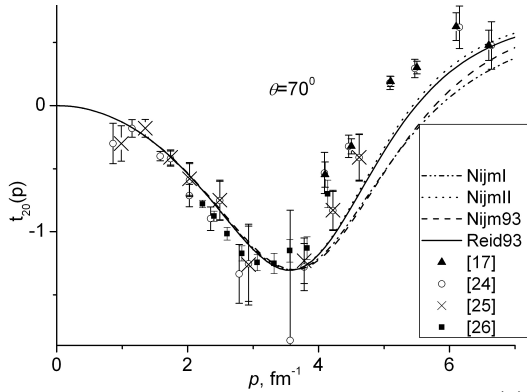


Рис. 4. Дейтронна тензорна поляризація $t_{20}(p)$. Кут розсіяння $\theta=70^\circ$.

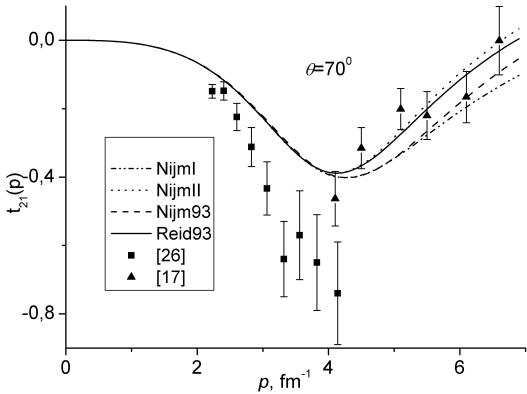


Рис. 5. Дейтронна тензорна поляризація $t_{21}(p)$. Кут розсіяння $\theta=70^\circ$.

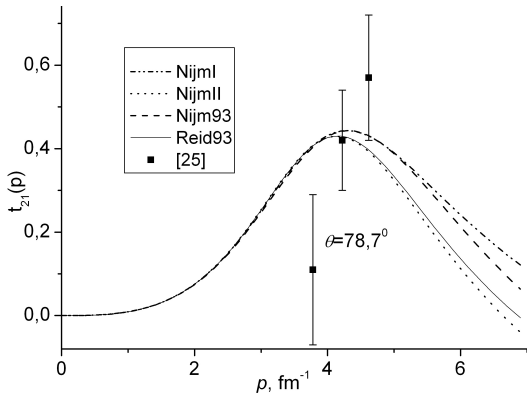


Рис. 6. Дейтронна тензорна поляризація $t_{21}(p)$. Кут розсіяння $\theta=78.7^\circ$.

Проведено детальне порівняння отриманих значень $t_{20}(p)$ (кут розсіяння $\theta=70^\circ$) для потенціалів NijmI, NijmII, Nijm93 і Reid93 (рис. 4) з сучасними експериментальними даними JLAB t20 [17,24] і BLAST [25,26] collaboration. Хороше узгодження значень наявне для області значень імпульсів $p = 1 - 4 \text{ fm}^{-1}$.

Розрахована дейтронна тензорна поляризація $t_{21}(p)$ для потенціалів NijmI, NijmII, Nijm93 і Reid93 при

кутах розсіяння $\theta=70^\circ, 78.7^\circ$ і 90° зображена на рис. 5–7 відповідно. Отриманий результат на рис. 7 добре узгоджується з наявними літературними даними для інших потенціальних моделей: Glendenning–Kramer, Hamada–Johnston, Reid68, Paris, Tourreil–Sprung, Mustafa та ін. [21], а також для потенціалів Reid93 і Argonne v18 [23].

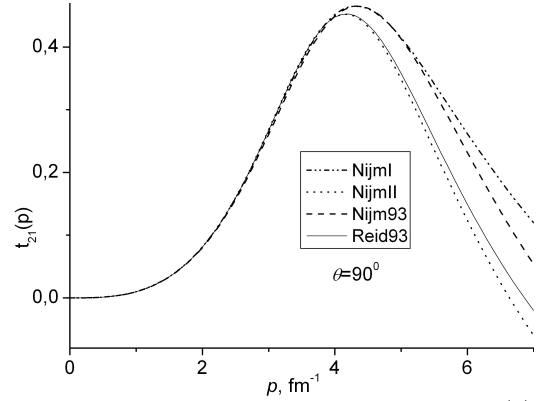


Рис. 7. Дейтронна тензорна поляризація $t_{21}(p)$. Кут розсіяння $\theta=90^\circ$.

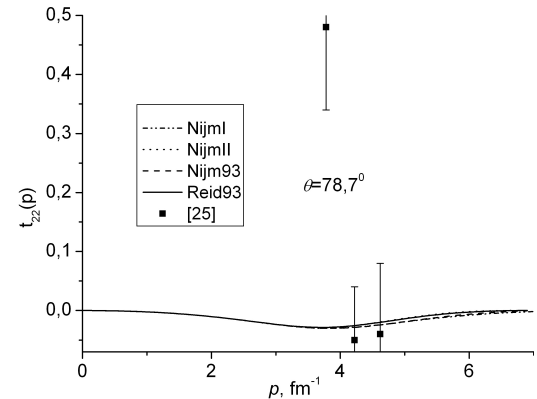


Рис. 8. Дейтронна тензорна поляризація $t_{22}(p)$. Кут розсіяння $\theta=78.7^\circ$.

На рис. 8 наведено розраховану дейтронну тензорну поляризацію $t_{22}(p)$.

У праці [27] наведені розрахунки величин тензорної поляризації при використанні хвильових функцій у вигляді аналітичних форм (1). Отримані результати в цій роботі для $t_{20}(p)$, $t_{21}(p)$ і $t_{22}(p)$ відрізняються від даних [25] на величину 0.5–3.0% для імпульсів $p = 2.1 - 5.5 \text{ fm}^{-1}$.

Розрахована величина $t_{20}(p)$ добре узгоджується з результатами праць, у яких були проведені з теоретичні розрахунки: з даними [25] для Паризького, Argonne v14 і Bonn-E потенціалів і з даними [28] для Moscow, NijmI, NijmII, CD-Bonn, Paris потенціалів. Вона узгоджується з величиною $t_{20}(p)$, розрахованою у [16] для пружного ed -розсіяння для моделей з включенням нуклонної ізобарної компоненти, в межах динаміки світлового фронту і кваркової кластерної моделі, а також для Bonn-A, Bonn-B, Bonn-C, Bonn Q, Reid-SC, Paris і A-VIS потенціалів. Хороше узгоджен-

ня отриманих величин $t_{21}(p)$ і $t_{22}(p)$ з даними для моделей NR1A і NR1A+MEC+RC [25]. Крім цього, $t_{20}(p)$ і $t_{21}(p)$ добре збігаються з результатами згідно з ефективною теорією поля [26].

У науковій літературі відсутні експериментальні дані для $t_{21}(p)$ і $t_{22}(p)$ в широкому інтервалі імпульсів. Тому є актуальним отримання цих величин як теоретично, так і експериментально.

Доцільними є також розрахунки поляризаційних характеристик дейтрона (компоненти тензора чутливості до поляризації дейтронів T_{20} , поляризаційної передачі K_0 і тензорної аналізуючої здатності A_{yy}) і порівняння їх з теоретичними розрахунками [6], а також з експериментальними даними [29].

V. ВИСНОВКИ

Розраховано коефіцієнти чотирьох апроксимаційних залежностей в аналітичній формі (1)–(4) для чисельних значень хвильової функції дейтрона в координатному представленні для реалістичних феноменологічних потенціалів Неймегенської групи (NijmI,

NijmII, Nijm93 і Reid93). Досліджено поведінку значення χ^2 залежно від кількості доданків розкладу N_i . З урахуванням мінімальних значень χ^2 за цими формами побудовано хвильові функції дейтрона (3) і (4) в координатному представленні, які не містять надлишкових вузлів.

Розраховані параметри дейтрона наведено в таблиці 6 добре узгоджуються з теоретичними й експериментальними результатами.

За отриманими хвильовими функціями дейтрона розраховано дейтронну тензорну поляризацію. Чисельні розрахунки дейтронної тензорної поляризації $t_{20}(p)$, $t_{21}(p)$ і $t_{22}(p)$ проведено в інтервалі імпульсів $0-7 \text{ fm}^{-1}$. Отримані результати $t_{20}(p)$ для потенціалів Неймегенської групи добре узгоджуються з літературними результатами для інших потенціальних нуклон-нуклонних моделей, а також з експериментальними даними.

Одержані результати дейтронної тензорної поляризації $t_{ij}(p)$ дають певну інформацію про електромагнітну структуру дейтрона й диференціальний переріз подвійного розсіяння (21), якщо б були відомі інші складники останнього. Для цього необхідно знайти тензорну аналізуючу здатність.

-
- [1] R. Machleidt, Nucl. Phys. A **689**, 11 (2001).
 [2] R. Machleidt, Phys. Rev. C **63**, 024001 (2001).
 [3] V. I. Kukulin *et al.*, Phys. Rev. C **57**, 535 (1998).
 [4] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (Interscience, New York, 1953).
 [5] І. Гайсак, В. Жаба, Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. **44**, 8 (2009).
 [6] І. І. Гайсак, В. І. Жаба, Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. фізика **36**, 100 (2014).
 [7] В. С. Бохінюк, В. І. Жаба, О. М. Парлаг, Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. фізика **31**, 111 (2012).
 [8] V. G. J. Stoks *et al.*, Phys. Rev. C **49**, 2950 (1994).
 [9] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, R. Schiavilla, Phys. Rev. C **51**, 38 (1995).
 [10] M. Lacombe *et al.*, Phys. Lett. B **101**, 139 (1981).
 [11] S. B. Dubovichenko, *Properties of Light Atomic Nucleus in Potential Cluster Model* (Daneker, Almaty, 2004).
 [12] F. Cap, W. Gröbner, Nuovo Cimento **1**, 1211 (1955).
 [13] A. F. Krutov, V. E. Troitsky, Phys. Rev. C **76**, 017001 (2007).
 [14] J. J. de Swart, R. A. M. M. Klomp, M. C. M. Rentmeester, Th. A. Rijken, Few-Body Systems **8**, 438 (1996).
 [15] *NN-OnLine Deuteron wavefunctions* <http://nn-online.org/NN/>.
 [16] M. Garçon, J. W. van Orden, Adv. Nucl. Phys. **26**, 293 (2001).
 [17] D. Abbott *et al.*, Phys. Rev. Lett. **84**, 5053 (2000).
 [18] R. Gilman, F. Gross, J. Phys. G **28**, R37 (2002).
 [19] T. W. Donnelly, A. S. Raskin, Ann. Phys. **169**, 247 (1986).
 [20] M. I. Haftel, L. Mathelitsch, H. F. K. Zingl, Phys. Rev. C **22**, 1285 (1980).
 [21] A. K. A. Azzam, M. A. Fawzy, E. M. Hassan, A. M. Yasser, Turk. J. Phys. **29**, 127 (2005).
 [22] R. G. Arnold, C. E. Carlson, F. Gross, Phys. Rev. C **21**, 1426 (1980).
 [23] В. І. Жаба, Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Фізика. Радіоелектроніка' **23**, 48 (2015).
 [24] D. Abbott *et al.*, Eur. Phys. J A **7**, 421 (2000).
 [25] M. Garçon *et al.*, Phys. Rev. C **49**, 2516 (1994).
 [26] C. Zhang *et al.*, Phys. Rev. Lett. **107**, 252501 (2011).
 [27] S. B. Dubovichenko, Phys. Atom. Nucl. **63**, 734 (2000).
 [28] N. A. Khokhlov, A. A. Vakulyuk, Phys. Atom. Nucl. **78**, 92 (2015).
 [29] L. S. Azhgirey *et al.*, Phys. Atom. Nucl. **68**, 991 (2005).

**ANALYTICAL FORMS OF THE WAVE FUNCTION IN COORDINATE SPACE
AND TENSOR POLARIZATION OF THE DEUTERON FOR POTENTIALS
NIJMEGEN GROUP**

V. I. Zhaba

*Uzhgorod National University, Department of Theoretical Physics,
54, Voloshyna St., Uzhgorod, UA-88000, Ukraine,
e-mail: viktorzh@meta.ua*

The coefficients of the four approximating dependencies for the numerical values of the deuteron wave function in the coordinate representation for realistic phenomenological potentials Nijmegen group (NijmI, NijmII, Reid93 and Nijm93) have been numerically calculated. The analytical forms are chosen as the product of the power function r^n for the sum of exponential terms. The behavior of the value χ^2 depending on the number of expansion terms N_i has been studied. With the account of the minimum values of χ^2 for these forms we have built DWFs in coordinate space, which do not contain superfluous knots. The calculated parameters of the deuteron are in good agreement with theoretical and experimental results. For deuteron wave functions in coordinate and momentum representation the following polarization characteristics were calculated: tensor polarization $t_{20}(p)$, $t_{21}(p)$, $t_{22}(p)$ in the range of 0–7 pulse fm^{-1} . The value of $t_{20}(p)$ for potentials Nijmegen group are in good agreement with literature results for other potential nucleon-nucleonic of models and with experimental data. The impact of the accuracy of χ^2 approximation for the deuteron wave function on the calculation of tensor polarization $t_{20}(p)$ at a scattering angle of $\theta=70^\circ$ for Reid93 potential has been revealed. The results of the deuteron tensor polarization $t_{ij}(p)$ give some information about the electromagnetic structure of the deuteron. At the known tensor analyzing power it is possible to calculate the differential cross-section of double scattering.