ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 21, № 4 (2017) 4801(10 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 21, No. 4 (2017) 4801(10 p.)

ВЗАЄМНА ФАЗОВА СИНХРОНІЗАЦІЯ СПІНТРОННИХ МАГНІТНИХ НАНООСЦИЛЯТОРІВ З УРАХУВАННЯМ ТЕХНОЛОГІЧНОГО РОЗКИДУ ЇХ ВЛАСНИХ ПАРАМЕТРІВ

О. Р. Сулименко, О. В. Прокопенко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Факультет радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем,
вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, 01601, Україна
(Отримано 13 вересня 2017 р.; в остаточному вигляді — 28 листопада 2017 р.)

Спінтронні магнітні наноосцилятори (СМНО) є перспективними базовими елементами електроніки майбутнього, проте для створення ефективних мікрохвильових пристроїв на їхній основі необхідно застосовувати не окремі СМНО, а масиви синхронізованих наноосциляторів. На практиці синхронізація СМНО суттєво ускладнюється за рахунок досить великого технологічного розкиду власних параметрів наноосциляторів, що є наслідком не достатньо досконалої технології їх виготовлення. У цій статті вперше описано числову модель взаємної фазової синхронізації довільної кількості слабко зв'язаних СМНО, яка враховує технологічний розкид їхніх власних параметрів. Використання цієї моделі продемонстровано для двох, трьох, п'яти, десяти та двадцяти СМНО.

Ключові слова: взаємна синхронізація коливань, спінтронний магнітний наноосцилятор, фазова модель, технологічний розкид параметрів.

PACS number(s): 85.75.−d, 05.45.Xt, 07.57.Hm, 84.40.−x

I. ВСТУП

Одним із найвідоміших базових елементів спінтроніки є спінтронний магнітний наноосцилятор (СМНО, spin-torque nano-oscillator) [1–6]. Принцип його роботи ґрунтується на двох фундаментальних фізичних явищах: спін-обертовому ефекті (СОЕ, the spin-transfer torque) [7, 8] та магніторезистивному ефекті, який, залежно від будови СМНО, може проявлятися як ефект гігантського [1–3] або тунельного [4, 5] магнітоопору. Типовий СМНО є багатошаровою структурою, що складається мінімум з двох магнітних шарів різного функціонального призначення, розділених немагнітним (металевим чи діелектричним) прошарком. Один із магнітних шарів — закріплений магнітний шар (ЗМШ). У ньому напрямок вектора намагніченості досить жорстко зафіксований і майже не змінюється під час прикладання до СМНО керувального зовнішнього сиґналу. Інший магнітний шар є вільним магнітним шаром (ВМШ), вектор намагніченості в якому може майже вільно рухатись під дією слабкого зовнішнього впливу. Під час руху електронів крізь таку тришарову структуру носії заряду поляризуються у ЗМШ і, згідно з СОЕ [7,8], переносять набутий ними нескомпенсований спіновий магнітний момент до ВМШ. Це приводить до появи прецесії намагніченості або до перемикання напрямку намагніченості в цьому шарі, що, своєю чергою, спричиняє осциляції або перемикання магнітоопору пристрою [6]. Відповідні ефекти, що відбуваються у спінтронних магнітних наноструктурах, можуть бути використані для розробки нових типів нанорозмірних ґенераторів електромагнітних сиґналів [1–6, 9–11], амплітудних і частотних детекторів, аналізаторів спектра електромагнітного випромінювання [6, 12–15], систем обробки, передачі та збереження інформації [6,16,17] тощо.

СМНО можуть стати основою для новітніх електронних пристроїв майбутнього за умови поліпшення ряду їхніх технічних характеристик: збільшення потужності вихідного сиґналу, зменшення ширини смуги генерації, розширення робочої смуги частот, підвищення стабільності частоти вихідного сиґналу, зниження рівня шумів тощо [5,6,11,17,18]. Є декілька підходів до поліпшення робочих характеристик СМНО: (i) під'єднувати СМНО до зовнішніх пристроїв за допомогою спеціальних узгоджувальних мікрохвильових кіл [10,11,18–20]; (ii) застосовувати СМНО складної будови, що мають декілька закріплених та/або вільних магнітних шарів [21–24]; (iii) змінювати температуру та/або інші умови проведення експерименту, добирати оптимальні матеріальні параметри та форму шарів СМНО [25–29]; (iv) синхронізувати СМНО між собою та/або із зовнішнім сиґналом [30–36]. З усіх згаданих вище підходів тільки останній є досить перспективним і дає істотне поліпшення майже всіх робочих характеристик СМНО.

Проте синхронізація багатьох СМНО стикається з низкою принципових проблем: (i) практична реалізація синхронізації декількох СМНО ускладнена завдяки сильній нелінійності та неізохронності наноосциляторів [9, 30–34, 36, 37]; (ii) технологія виробництва СМНО є недосить досконалою, що призводить до великого розкиду робочих параметрів СМНО [25,26,38, 39], що, своєю чергою, суттєво ускладнює одержання синхронізованого стану кількох наноосциляторів; (iii) загальна теорія синхронізації СМНО ще не завершена — на цей момент проаналізовано лише декілька окремих випадків [9,37,40–47]. Усі ці чинники заважають розробці та створенню ефективних мік-

рохвильових приладів з масивами синхронізованих СМНО, що робить дослідження процесів синхронізації СМНО актуальним завданням сучасної нелінійної фізики, радіофізики та електроніки.

Незважаючи на значний прогрес у фізиці синхронізації коливань [48], на сьогодні практичні досягнення в галузі синхронізації саме СМНО досить обмежені. Після першого експериментального підтвердження синхронізації двох наноосциляторів у 2005 р. [30, 31] протягом наступних 12 років удалося досягти синхронізації лише чотирьох магнітних вихорів у СМНО з вихровим станом намагніченості ВМШ [33], трьох [34] та п'яти [36] СМНО традиційного типу (не з вихровим станом намагніченості ВМШ). Зазначимо також, що 2017 р. показано можливість синхронізації дев'яти спінових осциляторів Холла [49]. З огляду на складність експериментальної синхронізації СМНО, основну увагу дослідники зосередили переважно на аналітичних [37,40–45] і числових [50–57] методах вивчення цього явища. Є також низка праць [46, 47, 58], які поєднують обидва ці підходи. У більшості цих робіт проаналізовано синхронізацію СМНО з вихровим станом намагніченості ВМШ. Задачу синхронізації СМНО традиційного типу, як правило, розглядається в одному з двох наближень: а) для масивів з малою кількістю СМНО (типово $2 \div 10$ структур) [40, 41, 44, 45]; б) для масивів з дуже великою кількістю СМНО [51], яку типово аналізують у межах моделі Курамото [59]. Особливістю зазначених робіт із синхронізації СМНО є те, що в них, як правило, досліджують структури з детермінованими параметрами. Відповідно, наявний суттєвий розкид технологічних параметрів СМНО, який принципово впливає на процес їх синхронізації у таких роботах не враховують, а тому отримані в цих працях результати досить складно порівнювати з даними експерименту. Є лише дуже небагато робіт, наприклад [57,58], де зроблено спробу врахувати технологічний розкид параметрів при розгляді синхронізації наноосциляторів (експериментально цю задачу аналізували в [60], де, однак, синхронізації СМНО спостережено не було), проте в усіх цих працях вивчають лише СМНО з вихровим станом намагніченості ВМШ.

Метою цієї статті є узагальнення моделі взаємної фазової синхронізації СМНО [9, 43, 45] у наближенні глобального зв'язку на випадок довільної кількості слабко взаємодіючих наноосциляторів з урахуванням скінченого технологічного розкиду їхніх власних параметрів, а також оцінка ефективності синхронізації різної кількості СМНО для деяких практично важливих випадків. У праці наведено й проаналізовано результати числового моделювання процесів фазової синхронізації двох, трьох, п'яти, десяти та двадцяти СМНО з урахуванням технологічного розкиду їхніх робочих параметрів. Наведені дані корисні для оцінки впливу технологічного розкиду параметрів СМНО на ефективність роботи мікрохвильових пристроїв з масивами синхронізованих наноосциляторів і важливі для поліпшення та оптимізації характеристик таких систем.

II. МОДЕЛЬ ВЗАЄМНОЇ ФАЗОВОЇ СИНХРОНІЗАЦІЇ СМНО

A. Основні рівняння

Як уже зазначено, завдання синхронізації СМНО ускладнюється низкою проблем, які не характерні для спінтроніки, проте добре відомі в нелінійній динаміці [37, 39–41, 47, 48], у мікро- та наноелектронній технології [25, 26, 34, 36, 38, 39, 60, 61]. Відповідно, для одержання найпростішого і, водночас, точного опису синхронізації коливань намагніченості декількох СМНО необхідно вдало обрати вихідну теоретичну модель. На сьогодні є кілька підходів для опису взаємної фазової синхронізації СМНО [9,32,37,50]. Нижче буде використано підхід, що ґрунтується на нелінійній універсальній моделі автогенератора Славіна–Тиберкевича (модель СТ) [9]. Цей вибір теоретичної моделі пов'язаний з такими обставинами: (i) нині модель СТ є найпростішою моделлю СМНО, що адекватно описує будь-які процеси перетворення енергії в СМНО, причому основне рівняння моделі (1), фактично, випливає із закону збереження енергії; (ii) висновки та результати, отримані за допомогою моделі СТ, неодноразово перевіряли на експерименті [9,32,41,62,63], який показав коректність та достатню точність цієї моделі; (iii) згадана модель придатна для опису динамічних процесів у СМНО будь-якого типу/будови (наприклад, у роботі [64] доведено, що ця модель адекватно описує динаміку вихорів у СМНО з вихровим станом намагніченості ВМШ); (iv) нарешті, ця модель є досить універсальною, а отримані за її допомогою результати з певними, не принциповими змінами можуть бути поширені на нелінійні осцилятори довільної природи.

Основне рівняння моделі СТ для замкненої системи з N взаємодіючих СМНО має вигляд [9]

$$\frac{dc_i}{dt} + \mathrm{i}\omega_i(p_i)c_i + \Gamma_{\mathrm{eff},i}(p_i)c_i = S_i\,. \qquad (1)$$

Тут індексом $i = \overline{1,N}$ позначено величини, що належать до i-го СМНО, $c_i \equiv c_i(t)$ — безрозмірна комплексна амплітуда прецесії намагніченості, $p_i = |c_i|^2$ — безрозмірна потужність прецесії намагніченості, $\omega_i(p_i)$ — циклічна частота неізохронних коливань намагніченості, $\Gamma_{\mathrm{eff},i}(p_i)$ — ефективний коефіцієнт дисипації коливань намагніченості, $S_i \equiv S_i(t)$ — функція, що описує вплив на i-й СМНО зовнішніх чинників (зовнішнього мікрохвильового сигналу, сигналів від інших СМНО, шуму тощо), $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Другий доданок у лівій частині (1) описує консервативну прецесію намагніченості у ВМШ наноосцилятора, третій — зміну енергії системи за рахунок природної позитивної дисипації в магнітному матеріалі ВМШ ($\Gamma_{+,i}$) або накачування енергії в систему (неґативна дисипація) завдяки СОЕ ($\Gamma_{-,i}$). Відповідно, ефективний коефіцієнт дисипації $\Gamma_{\mathrm{eff},i}(p_i)$ є різницею коефіцієнтів позитивної та неґативної дисипацій, $\Gamma_{\mathrm{eff},i}(p_i) = \Gamma_{+,i}(p_i) - \Gamma_{-,i}(p_i)$.

Метод розрахунку величин c_i, $\omega_i(p_i)$, $\Gamma_{\text{eff},i}(p_i)$ для СМНО з різними параметрами наведено в працях [9, 64].

Аналізуючи задачу взаємної фазової синхронізації N СМНО, "зовнішню силу" S_i в рівнянні (1) будемо вважати пов'язаною тільки з впливом на i-й СМНО всіх інших наноосциляторів. Іншими механізмами впливу (шуми, зовнішні мікрохвильові сиґнали тощо) для спрощення будемо нехтувати. З урахуванням цих припущень рівняння (1) набуває вигляду [45]:

$$\frac{dc_i}{dt} + \mathrm{i}\omega_i(p_i)c_i + \Gamma_{\text{eff},i}(p_i)c_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \Omega_{ij}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta_{ij}} c_j\,, \qquad (2)$$

де Ω_{ij} — амплітуда коефіцієнта зв'язку між i-м і j-м наноосциляторами, ζ_{ij} — фаза цього коефіцієнта зв'язку; індекс j змінюється в тих самих межах, що й індекс i з урахуванням додаткової вимоги $j \neq i$.

Отримана система рівнянь (2) є замкненою. У випадку незв'язаних СМНО ($\Omega_{ij} = 0$) її розв'язком є

$$c_{0i}(t) = \sqrt{p_{0i}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_{0i}}\,, \qquad (3)$$

де $\phi_{0i} \equiv \phi_{0i}(t) = \omega_{0i}(p_{0i})t + \varphi_{0i}$, p_{0i} і $\omega_{0i}(p_{0i})$ — безрозмірна потужність та циклічна частота коливань намагніченості для деякого рівноважного стану i-го СМНО, φ_{0i} — початкова фаза коливань. Зазначимо, що вираз (3) виявляється досить точним навіть для нерівноважних коливань намагніченості за умови, що ці коливання збуджені струмом, величина якого лише трохи перевищує поріг збудження коливань (отже, такі коливання можна вважати малими).

B. Модель потужність–фаза

У випадку слабко зв'язаних наноосциляторів ($|\Omega_{ij}| \ll |\omega_{i,j}(p_{i,j})|$) розв'язок системи (2) близький до (3). Його можна записати так:

$$c_i \approx \sqrt{p_{0i}}\,[1+\rho_i]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_i}\,, \qquad (4)$$

що вперше зроблено в [43] і потім використано в [9,45]. Тут $\rho_i \equiv \rho_i(t) = (p_i(t) - p_{0i})/2p_{0i}$ — малі відхилення безрозмірної потужності коливань намагніченості $p_i(t)$ від її рівноважного значення p_{0i}, $\phi_i \equiv \phi_i(t)$ — фаза коливань намагніченості в i-му СМНО.

Підставляючи вираз (4) у (2) та розкладаючи в ряд циклічну частоту $\omega_i(p_i)$ та ефективний параметр дисипації $\Gamma_{\text{eff},i}(p_i)$ як $\omega_i(p_i) \approx \omega_i(p_{0i}) + 2p_{0i}N_i\rho_i$, $\Gamma_{\text{eff},i}(p_i) \approx \Gamma_{\text{eff},i}(p_{0i}) + 2p_{0i}G_i\rho_i$, $N_i = d\omega_i(p_{0i})/dp_i$, $G_i = d\Gamma_{\text{eff},i}(p_{0i})/dp_i$, можна отримати комплексні рівняння для змінних $\rho_{i,j}$ та $\phi_{i,j}$. Ці рівняння, використовуючи лінійне наближення (враховуються лише доданки першого порядку мализни $\sim \Omega_{ij}$ або $\rho_{i,j}$), можна записати так:

$$\frac{d\rho_i}{dt} + 2p_{0i}G_i\rho_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \Omega_{ij}\sqrt{\frac{p_{0j}}{p_{0i}}}\cos(\zeta_{ij}+\phi_j-\phi_i),$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} - \omega_{0i} - 2p_{0i}N_i\rho_i = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \Omega_{ij}\sqrt{\frac{p_{0j}}{p_{0i}}}\sin(\zeta_{ij}+\phi_j-\phi_i)\,. \qquad (5)$$

Ця модель називається моделлю "потужність–фаза". Вона враховує зміни як потужності $\rho_i(t)$, так і фази $\phi_i(t)$ коливань намагніченості у СМНО. Межі застосування цієї моделі: $|\rho_i(t)| \ll 1$, тобто вона є коректною за невеликого рівня флуктуацій потужності (коли керувальний струм лише трохи більший за пороговий струм). Ця умова зазвичай виконується для більшості експериментів з СМНО.

C. Фазова модель

Модель "потужність–фаза" можна додатково спростити введенням "ефективної" фази коливань намагніченості $\Phi_i \equiv \Phi_i(t)$ [45]:

$$\Phi_i(t) = \phi_i(t) + \nu_i\rho_i(t)\,, \qquad (6)$$

де $\nu_i = N_i/G_i$ — безрозмірний нелінійний зсув частоти. "Ефективна" фаза Φ_i є розв'язком рівняння

$$\frac{d\Phi_i}{dt} - \omega_{0i} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \lambda_{ij}\sin\left(\Phi_j - \Phi_i + \beta_{ij}\right)\,, \qquad (7)$$

де $\lambda_{ij} = \Omega_{ij}\sqrt{p_{0j}/p_{0i}}\sqrt{1+\nu_i^2}$ — нормована амплітуда коефіцієнта зв'язку j-го СМНО з i-м, $\beta_{ij} = \zeta_{ij} - \arctan\nu_i$ — нормована фаза зв'язку. Фазова модель (7) є широко вживаною в теорії автоґенераторів і коректною за умови $|\nu_i\rho_i(t)| \ll 1$. Під час синхронізації осциляторів зовнішнім сиґналом вона переходить у модель Адлера [65], а для взаємної фазової синхронізації осциляторів її зазвичай називають модифікованою моделлю Курамото [59].

Подальше спрощення фазової моделі (7) можна виконати за допомогою наближення ґлобального зв'язку. Згідно з цим наближенням, кожен СМНО взаємодіє з деяким усередненим мікрохвильовим сиґналом, що створюється всіма взаємодіючими наноосциляторами. Відповідно, нормовані амплітуда та фаза коефіцієнта зв'язку є сталими величинами: $\lambda_{ij} = \Lambda/N$, $\beta_{ij} = \beta$. З урахуванням зроблених наближень модельне рівняння (7) набуває остаточного вигляду:

$$\frac{d\Phi_i}{dt} - \omega_{0i} = \frac{\Lambda}{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \sin\left(\Phi_j - \Phi_i + \beta\right)\,. \qquad (8)$$

Наближення ґлобального зв'язку добре описує систему зв'язаних осциляторів у тому випадку, коли взаємодія осциляторів симетрична [48, 59]: для двох осциляторів, для трьох осциляторів, розташованих у

вершинах рівностороннього трикутника, для великої кількості осциляторів, що розташовані на однаковій відстані один від одного тощо.

III. ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМНОЇ ФАЗОВОЇ СИНХРОНІЗАЦІЇ СМНО

A. Числова модель

Аналіз взаємної фазової синхронізації N зв'язаних СМНО базувався на числовому розв'язанні системи рівнянь (8) для заданих значень нормованої амплітуди Λ та нормованої фази β сиґналу зв'язку, відомих власних частот СМНО $f_{0i} = \omega_{0i}/2\pi$ та значень "ефективних" фаз коливань намагніченості $\Phi_i(0)$ у початковий момент часу $t = 0$. Розв'язуючи систему (8) на проміжку часу $[0; T]$, отримали часові залежності "ефективних" фаз $\Phi_i(t)$.

В експериментах власні частоти f_{0i} окремих осциляторів у масиві СМНО відрізняються через неможливість технологічного виготовлення ідентичних наноструктур [30, 31, 34, 36, 38, 39]. Тому частоти коливань f_{0i} у системі (8) зручно розглядати як випадкові величини, розподілені навколо деякого середнього значення $f_0 = \langle f_{0i} \rangle$ за певним законом розподілу $P(f_{0i})$ (для спрощення будемо вважати, що цей розподіл є однаковим для всіх СМНО); тут і далі $\langle x \rangle$ позначає середнє значення величини x. У статті проаналізовано найбільш типовий випадок, коли розподіл власних частот наноосциляторів є нормальним (ґауссівським):

$$P(f_{0i}) = \frac{1}{\Delta f \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{f_{0i} - f_0}{\Delta f} \right)^2 \right\}, \qquad (9)$$

де Δf — середньоквадратичне відхилення частот f_{0i} від їхнього середнього значення f_0.

Попередні дослідження, які ми провели, показали, що вибір різних розподілів частот наноосциляторів (розглядали випадки рівномірного розподілу, нормального розподілу та розподілу Лоренца) не приводить до якісної зміни динаміки системи з N СМНО. Зміна вигляду та/або параметрів розподілу частот наноосциляторів спричиняє лише зміну границь ділянки синхронізації наноосциляторів (до звуження або розширення цієї ділянки). Причому встановлено, що для типових систем кількох наноосциляторів із параметрами, що можуть бути легко реалізовані експериментально, ці зміни незначні (поріг синхронізації змінюється лише на 10–20%). З урахуванням цього у статті наведено результати лише для нормального розподілу частот наноосциляторів, який прийнято вважати найближчим до розподілу частот у реальних системах із багатьма СМНО [31, 38, 39].

Початкові "ефективні" фази коливань намагніченості різних СМНО $\Phi_i(0)$ також потрібно розглядати як випадкові величини. У цій праці вважаємо, що початкові фази наноосциляторів $\Phi_i(0)$ розподілені рівномірно на проміжку $[0; 2\pi]$.

Для визначення стану системи з N СМНО (є синхронізація чи її немає) за розрахованими часовими залежностями "ефективних" фаз $\Phi_i(t)$ обчислювали комплексний параметр порядку системи $r(t)$ [48]:

$$r(t) = R(t)\, e^{i\Psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e^{i\Phi_i(t)}. \qquad (10)$$

Його модуль $R(t) = |r(t)|$ характеризує відносну кількість синхронізованих СМНО (за ідеальної синхронізації $R(t) \to 1$), а зміна його фази $\Psi(t)$ визначає циклічну частоту синхронізованих коливань $d\Psi/dt$.

У випадку, коли коливання намагніченості є несинхронізованими, тобто коли різниця фаз $\Phi_i(t) - \Phi_j(t)$ не стала для $\forall i \neq j$, величина $R(t)$ також змінюється. Зазначимо, що незначні зміни $R(t)$ можуть відбуватися навіть у квазісинхронізованому стані за умови, що сталою є не миттєва різниця "ефективних" фаз, $\Phi_i(t) - \Phi_j(t)$, а різниця фаз, усереднена протягом деякого періоду часу, наприклад, протягом характерного періоду коливань $1/f_0$ [48]. На практиці невеликі зміни $R(t)$ також можуть бути викликані наявністю похибок числового розрахунку. Враховуючи це, для надійного визначення стану системи потрібно використовувати критерій $\Delta R < \Delta R_0$, де ΔR — середньоквадратичне відхилення величини $R(t)$ на часовому проміжку $[t_0; t_0 + \Delta t]$, на якому ведеться спостереження за станом системи, ΔR_0 — наперед задане значення, що визначає якість синхронізації [48, 66]. Очевидно, що тривалість проміжку часу Δt треба обирати не менше ніж $1/f_0$, а вибір занадто малих або, навпаки, занадто великих значень ΔR_0 може призвести до незадовільного опису стану системи [48, 66]. Нижче процеси фазової синхронізації розглядатимуться для значень ΔR_0 від нуля (ідеальна синхронізація, використовується для порівняння з теорією) до $\Delta R_0 = 0.5$.

Процедура числового аналізу взаємної фазової синхронізації N СМНО полягала в такому:

1. Задавали вихідні параметри задачі: середню частоту СМНО f_0, середньоквадратичне відхилення частот СМНО Δf, нормовану амплітуду зв'язку Λ та нормовану фазу зв'язку β. Для аналізу поведінки системи в координатах $(\Lambda; \beta)$ вважали, що $\Lambda = 2\pi\xi f_0$, де безрозмірний параметр ξ змінюється в межах від 0 до 1 з кроком 0.01, а β змінюється в межах від 0 до 2π з кроком $2\pi/100$. Під час аналізу впливу технологічного розкиду параметрів СМНО на ефективність їх синхронізації розглядали випадок, коли величина розкиду частот Δf змінювалась від $f_0/100$ до $f_0/10$ з кроком $f_0/100$.

2. Для заданих величин f_0, Δf ґенерували вектор власних частот СМНО f_{0i}, $i = \overline{1, N}$, згідно з розподілом (9), а також вектор початкових фаз $\Phi_i(0)$, розподілених рівномірно на проміжку $[0; 2\pi]$.

3. Використовуючи визначені раніше величини, числовими методами розв'язували систему рівнянь (8) на проміжку часу $[0; T]$, де $T = 100/f_0$. Відтак, використовуючи розраховані залежності $\Phi_i(t)$, обчислювали, згідно з (10), часову залежність комплексного параметра порядку $r(t)$.

4. За відомою залежністю $r(t)$ розраховували середнє значення $R = \langle R(t) \rangle$ і потім середньоквадратичне відхилення ΔR на проміжку часу $[90/f_0; 100/f_0]$. Вважали, що для цього проміжку система вже перебуває в рівноважному (або майже рівноважному) стані.

5. Згідно з рекомендаціями авторів [66, 67], для одержання статистично обґрунтованих результатів числовий аналіз (кроки від другого до четвертого включно) проводили для 200 реалізацій, після чого отримані результати (ΔR) усереднювали.

B. Два СМНО

Задачу взаємної фазової синхронізації двох СМНО з детермінованими параметрами теоретично проаналізовано в [9, 45], а для СМНО з випадковими власними параметрами розглянуто в [67, 68].

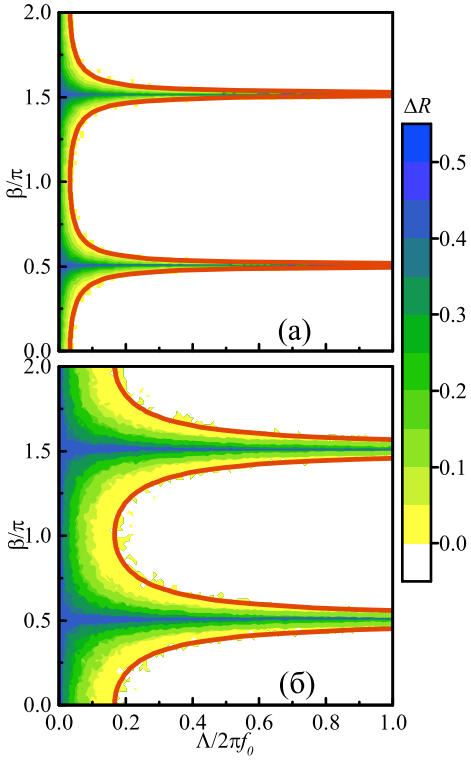

Рис. 1. (Кольоровий онлайн) Діаграми стану системи 2-х СМНО в координатах: безрозмірна амплітуда $\Lambda/2\pi f_0$ — нормована фаза β/π коефіцієнта зв'язку між наноосциляторами за різної величини технологічного розкиду їх власних частот: (а) $\Delta f = 100$ МГц; (б) $\Delta f = 500$ МГц. Області, що відповідають різним станам системи (ΔR), забарвлені різними кольорами. Суцільні червоні криві — теоретичні залежності, розраховані згідно з [9, 45]. $f_0 = 10$ ГГц.

На рис. 1 зображено типові результати числового моделювання, отримані для системи з $f_0 = 10$ ГГц, $\Delta f = 100$ МГц (а) та $\Delta f = 500$ МГц (б). Видно, що синхронізація двох СМНО є найбільш ефективною, коли нормована амплітуда коефіцієнта зв'язку $\Lambda = 2\pi\xi f_0$ більша за розкид власних циклічних частот наноосциляторів $2\pi\Delta f$ (тобто $\xi > \Delta f/f_0$), а нормована фаза коефіцієнта зв'язку β відрізняється від $(2k-1)\pi/2$, де $k \in \mathbb{N}$. Умова $\xi = \Lambda/2\pi f_0 > \Delta f/f_0$ визначає поріг появи синхронізації Λ_{th}; Λ_{th} — мінімальне значення Λ, за якого спостерігається синхронізація при $\beta = 0$. Отримані результати якісно, а для малого технологічного розкиду параметрів ($\Delta f = 100$ МГц, рис. 1,а) і кількісно відповідають відомим теоретичним [9, 45] (див. суцільні червоні криві на рис. 1,а) і числовим оцінкам [51]. Ділянки білого кольору на діаграмах відповідають синхронізованому стану системи ($\Delta R \approx 0$), тоді, як ділянки, забарвлені іншими кольорами, відповідають різним значенням середньоквадратичного відхилення модуля комплексного параметра порядку ΔR. З рис. 1 видно, що діаграми є симетричними щодо прямої $\beta = \pi$. Враховуючи це, діаграми стану системи в координатах $(\Lambda; \beta)$ можна наводити лише для значень $\beta \in [0; \pi]$.

C. Три СМНО

На рис. 2 зображено типові результати числового моделювання, отримані для системи трьох СМНО з такими параметрами: $f_0 = 10$ ГГц, (а) $\Delta f = 100$ МГц, (б) $\Delta f = 250$ МГц, (в) $\Delta f = 350$ МГц та (г) $\Delta f = 500$ МГц. Очевидно, що всі основні риси синхронізації СМНО, вказані вище для системи двох наноосциляторів, спостерігаються й для системи трьох СМНО. Водночас, для системи трьох наноосциляторів з'являється декілька якісно нових особливостей процесу синхронізації.

По-перше, видно, що на відміну від діаграми для двох СМНО, діаграма для трьох наноосциляторів перестає бути симетричною щодо прямої $\beta = \pi/2$ (хоча її симетрія щодо прямої $\beta = \pi$ зберігається). Це є свідченням існування різних механізмів взаємодії між наноосциляторами: якщо $0 \le \beta < \pi/2$, то зв'язок між СМНО приводить до зближення їхніх частот, а якщо $\pi/2 < \beta < \pi$, то відбувається їх розштовхування. Відповідно, ефективність синхронізації СМНО в другому випадку є помітно меншою, що добре відповідає числовим оцінкам [51], отриманим для великої кількості наноосциляторів.

По-друге, зі збільшенням кількості наноосциляторів із двох до трьох границя області ідеальної синхронізації (особливо при $\beta > \pi/4$) помітно розмивається, навіть для малого технологічного розкиду параметрів $\Delta f = 100$ МГц (див. рис. 1,а та 2,а). Наші детальні числові дослідження показали, що причини цього такі: (i) для системи трьох СМНО вже стає можливим явище часткової синхронізації, коли утворюється кластерний стан системи, за якого лише два наноосцилятори з трьох виявляються синхронізованими; (ii) з'являється можливість зникнення такого кластера з утворенням нового (наприклад, спочатку були синхронізовані наноосцилятори 1 і 2, а потім — 2 і 3); (iii) в окремих випадках спостерігалась осцилююча поведінка стану системи, коли один із наноосциляторів періодично синхронізувався з достатньо стійким кластером, до якого входили два інші СМНО, а потім вихо-

див із цього синхронізованого стану; (iv) відомо, що система трьох осциляторів уже може проявляти хаотичну поведінку [48], ознаки чого також були спостережені у нашому числовому експерименті; (v) нарешті, наявний розкид експериментальних точок на рис. 2 частково пов'язаний з незначною похибкою числових обчислень (менше 5% за нашими оцінками). Указані чинники приводять до появи помітних змін ΔR, що погіршує якість синхронізації для досить великої фазової затримки сиґналу зв'язку $\beta \geq \pi/4$. Також ці фактори заважають надійному визначенню стану, в якому перебуває система трьох СМНО, тому для перевірки коректності отриманих числових результатів доцільно розглянути спектри коливань СМНО за різних величин нормованої амплітуди Λ і фази β сиґналу зв'язку.

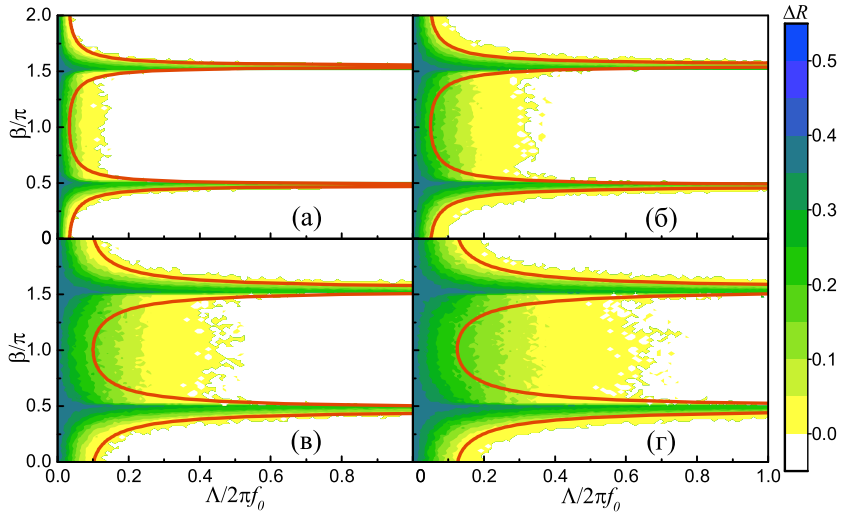

Рис. 2. (Кольоровий онлайн). Діаграми стану системи 3-х СМНО в координатах $(\Lambda/2\pi f_0; \beta/\pi)$: (а) $\Delta f = 100$ МГц; (б) $\Delta f = 250$ МГц; (в) $\Delta f = 350$ МГц; (г) $\Delta f = 500$ МГц. Області, що відповідають різним станам системи (ΔR), забарвлені різними кольорами. Суцільні червоні криві — теоретичні залежності, розраховані згідно з [9,45]. $f_0 = 10$ ГГц.

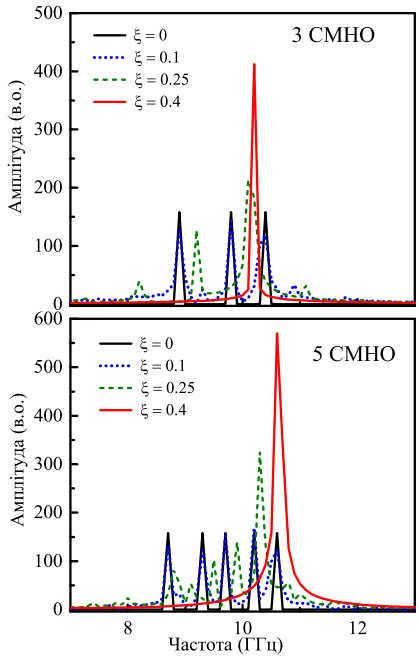

Рис. 3. (Кольоровий онлайн). Типові спектри коливань систем 3-х та 5-ти СМНО за нормованої фази зв'язку $\beta/\pi = 0.2$ і різних величин безрозмірної амплітуди зв'язку між наноосциляторами $\xi = \Lambda/2\pi f_0$: $\xi = 0$ (невзаємодіючі СМНО, чорна крива); $\xi = 0.1$ (синя крива); $\xi = 0.25$ (зелена крива); $\xi = 0.4$ (синхронізований стан, червона крива). $f_0 = 10$ ГГц.

Типовий вигляд спектрів коливань системи трьох СМНО для $f_0 = 10$ ГГц, $\beta = 0.2\pi$ і різних значень Λ показано на рис. 3. Суцільною чорною лінією зображено спектри невзаємодіючих СМНО ($\Lambda = 0$) з випадково обраними власними частотами $f_{01} = 8.9$ ГГц, $f_{02} = 9.8$ ГГц, $f_{03} = 10.4$ ГГц. Коли нормована амплітуда зв'язку між наноосциляторами досягає значення $\Lambda = 0.1 \cdot 2\pi f_0$, спектр коливань системи зазнає помітних спотворень (синя крива на рис. 3), що добре видно на прикладі третього наноосцилятора. Із подальшим зростанням Λ до $\Lambda = 0.25 \cdot 2\pi f_0$ значні зміни спектра системи порівняно зі спектром невзаємодіючих СМНО спостерігаються вже для всіх трьох наноосциляторів (зелена крива). Нарешті, за нормованої амплітуди зв'язку $\Lambda = 0.4 \cdot 2\pi f_0$ усі три наноосцилятори перебувають у синхронізованому стані з частотою коливань $f = 10.2$ ГГц (червона крива). Отже, аналіз спектрів коливань системи підтверджує коректність отриманих діаграм $\Delta R(\Lambda, \beta)$.

Зазначені вище якісно нові риси поведінки системи трьох СМНО проявляються контрастніше відповідно до того, як збільшується величина технологічного розкиду частот наноосциляторів Δf. Зокрема, помітно зростає поріг синхронізації Λ_{th}, за якого спостерігається синхронізація при $\beta = 0$, розширюється область значень β поблизу від $\beta = \pi/2$, коли синхронізація неможлива або неефективна. Водночас, порівняння отриманих числових даних із результатами відомих теоретичних праць [9, 45] за цих умов стає до-

волі неоднозначним, оскільки в них не враховано існування кластерного або хаотичного стану системи й пов'язаних із цим ефектів (таке порівняння виявляється справедливим лише для ідеалізованого випадку $\beta = 0$).

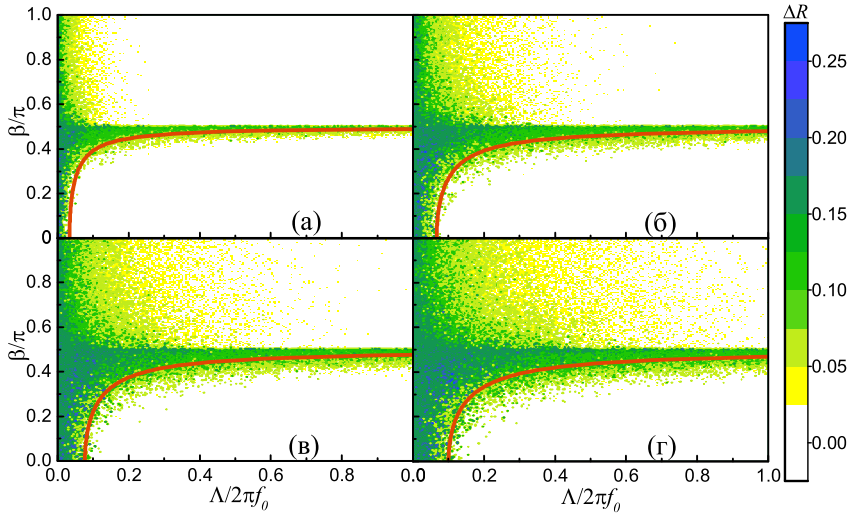

Рис. 4. (Кольоровий онлайн). Діаграми стану системи 5-х СМНО в координатах $(\Lambda/2\pi f_0; \beta/\pi)$: (а) $\Delta f = 100$ МГц; (б) $\Delta f = 250$ МГц; (в) $\Delta f = 350$ МГц; (г) $\Delta f = 500$ МГц. Області, що відповідають різним станам системи (ΔR), забарвлені різними кольорами. Суцільні червоні криві — теоретичні залежності, розраховані згідно з [9,45].

D. П'ять, десять та двадцять СМНО

Ураховуючи специфіку синхронізації багатьох СМНО, розглянутих у підрозділі III C на прикладі трьох наноосциляторів, аналіз процесів синхронізації $N > 3$ СМНО доволі складний, проте, фактично, виконується за одним й тим же алґоритмом незалежно від кількості СМНО N.

Результати моделювання для п'яти СМНО з технологічним розкидом частот (а) $\Delta f = 100$ МГц, (б) $\Delta f = 250$ МГц, (в) $\Delta f = 350$ МГц і (г) $\Delta f = 500$ МГц показані на рис. 4. Видно, що поведінка системи п'яти СМНО якісно близька до поведінки системи трьох СМНО, оскільки в цьому випадку не з'являється ніяких нових ефектів, що помітно впливали б на синхронізацію наноосциляторів. Водночас, бачимо, що границі області синхронізації для п'яти СМНО виявляються значно більш розмитими, нечіткими, ніж для системи трьох СМНО. Це свідчить про те, що вплив факторів (i)–(iv), перелічених у розділі III C, стає суттєвішим, а значить, для отримання стійкої синхронізації СМНО необхідно збільшувати амплітуду зв'язку між наноосциляторами Λ зі збереженням малого значення фази зв'язку β. Цей висновок також підтверджується спектрами коливань системи, зображеними на рис. 3.

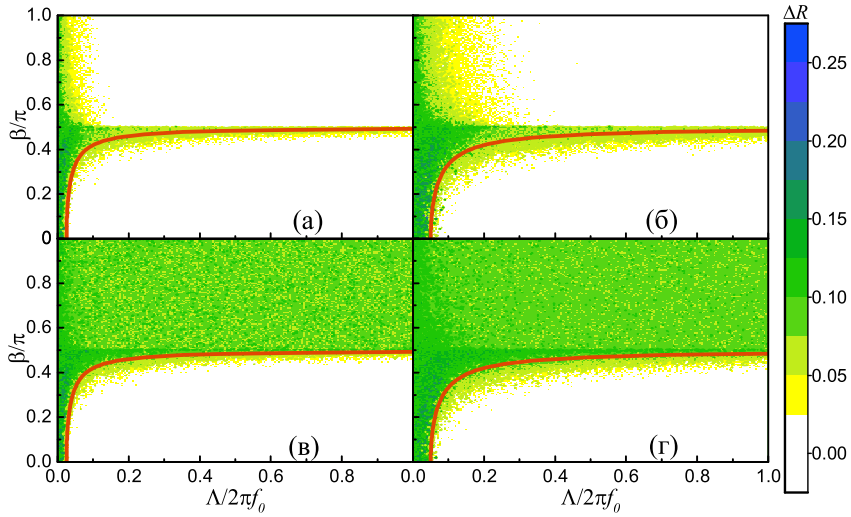

Рис. 5. (Кольоровий онлайн). Діаграми стану системи 10 СМНО (а, б) та 20 СМНО (в, г) в координатах $(\Lambda/2\pi f_0; \beta/\pi)$: (а, в) $\Delta f = 100$ МГц; (б, г) $\Delta f = 250$ МГц. Області, що відповідають різним станам системи (ΔR), забарвлені різними кольорами. Суцільні червоні криві — теоретичні залежності, розраховані згідно з [9,45]. $f_0 = 10$ ГГц.

Поведінка десяти (рис. 5а,б) та двадцяти (рис. 5в,г) взаємодіючих СМНО має якісно той же характер, що й для трьох та п'яти СМНО. Проте з рис. 5 видно, що за рахунок механізму відштовхування частот СМНО за $\beta > \pi/2$ їх синхронізація стає або малоефективною (для 10 СМНО), або вже неможливою (20 СМНО) за малих значень $\Lambda \gtrsim \Lambda_{\rm th}$. Зазначимо, що цей випадок підтверджується аналізом спектрів коливань відповідних масивів СМНО.

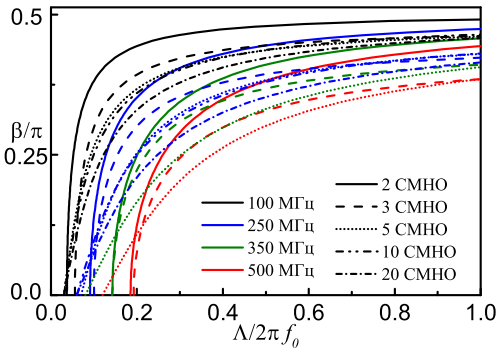

Рис. 6. (Кольоровий онлайн). Криві, що відповідають границі синхронізованого стану системи N СМНО у координатах $(\Lambda/2\pi f_0; \beta/\pi)$: $\Delta f = 100$ МГц (чорні криві), $\Delta f = 250$ МГц (сині криві), $\Delta f = 350$ МГц (зелені криві), $\Delta f = 500$ МГц (червоні криві), розраховані для різної кількості СМНО: $N = 2$ (суцільні криві), $N = 3$ (штрихові криві), $N = 5$ (пунктирні криві), $N = 10$ (подвійні штрихові криві), $N = 20$ (подвійні штрих-пунктирні криві). В області під кривими синхронізація СМНО є ґарантовною і стійкою. $f_0 = 10$ ГГц.

Також звернімо увагу на той факт, що зі збільшенням кількості наноосциляторів від $N = 20$ до $N = 100$ якісних змін у поведінці масиву СМНО спостережено не було. Водночас установлено, що для систем із кількістю СМНО $N > 100$ використана числова модель може бути недостатньо ефективною за рахунок помітного збільшення часу розрахунку та/або похибки розрахунку. Це може свідчити про необхідність удосконалення використаної числової моделі для кількості наноосциляторів $N > 100$.

Для числової оцінки ефективності синхронізації від 2-х до 20-и СМНО зручно використовувати рис. 6, де наведено залежності в координатах $(\Lambda; \beta)$, що відповідають стійкій синхронізації системи N СМНО, виходячи з раніше отриманих даних числового розрахунку. Область під кожною кривою на рис. 6 є областю, у якій синхронізація СМНО стійка і відбувається завжди (зазначимо, що це правильно в межах похибки числового розрахунку). Криві розраховані для різної величини технологічного розкиду параметрів: $\Delta f = 100$ МГц (чорні криві), $\Delta f = 250$ МГц (сині криві), $\Delta f = 350$ МГц (зелені криві), $\Delta f = 500$ МГц (червоні криві) і різної кількості СМНО: $N = 2$ (суцільні криві), $N = 3$ (штрихові криві), $N = 5$ (пунктирні криві), $N = 10$ (подвійні штрихові криві), $N = 20$ (подвійні штрих-пунктирні криві).

IV. ВИСНОВКИ

Узагальнено модель взаємної фазової синхронізації СМНО в наближенні ґлобального зв'язку на випадок довільної кількості наноосциляторів із випадковими власними параметрами. З використанням цієї моделі, проведено числовий аналіз процесів взаємної фазової синхронізації для 2-х, 3-х, 5-и, 10-и та 20-и СМНО для різних величин технологічного розкиду їхніх власних параметрів і встановлено, що синхронізація СМНО є найефективнішою, коли нормована амплітуда коефіцієнта зв'язку Λ перевищує певне порогове значення, а нормована фаза коефіцієнта зв'язку β є досить малою. Проілюстровано, що за рахунок технологічного розкиду параметрів СМНО область їх ґарантованої стійкої синхронізації помітно звужується порівняно з теоретичними оцінками, причому ці відмінності теорії та числового експерименту найбільш очевидні для великої кількості наноосциляторів з великим розкидом параметрів. Розраховано діаграму стану в координатах $(\Lambda; \beta)$ для стійкої синхронізації $N = \{2; 3; 5; 10; 20\}$ СМНО, яка може бути корисною під час розробки, створення чи оптимізації практичних мікрохвильових пристроїв з масивами синхронізованих СМНО.

Публікація містить результати досліджень, проведених за ґрантом Президента України за конкурсним проектом Ф74/150-2017 та Ф78, та результати досліджень, здійснених за ґрантової підтримки за конкурсним проектом Ф76/63-2017 Державного фонду фундаментальних досліджень України. Робота над публікацією була також виконана за підтримки НДР 16БФ052-01 та 18БФ052-01М Київського національного університету імені Тараса Шевченка та ґранту 7Ф ВЦП НАН України.

[1] S. I. Kiselev *et al.*, Nature **425**, 380 (2003).
[2] I. N. Krivorotov *et al.*, Science **307**, 228 (2005).
[3] V. S. Pribiag *et al.*, Nature Phys. **3**, 498 (2007).
[4] A. Dussaux *et al.*, Nature Commun. **1**, 8 (2010).
[5] Zh. Zeng *et al.*, Sci. Rep. **3**, 1426 (2013).
[6] N. Locatelli, V. Cros, J. Grollier, Nature Mater. **13**, 11 (2014).
[7] J. C. Slonczewski, J. Magn. Magn. Mater. **159**, L1 (1996).
[8] L. Berger, Phys. Rev. B **54**, 9353 (1996).
[9] A. Slavin, V. Tiberkevich, IEEE Trans. Magn. **45**, 1875 (2009).
[10] O. Prokopenko *et al.*, IEEE Magn. Lett. **2**, 3000104 (2011).
[11] O. Prokopenko, Ukr. J. Phys. **60**, 104 (2015).
[12] A. A. Tulapurkar *et al.*, Nature **438**, 339 (2005).
[13] O. V. Prokopenko *et al.*, in *Magnonics: From Fundamentals to Applications. Topics in Applied Physics. Vol.*

125, edited by S. O. Demokritov, A. N. Slavin (Springer-Verlag, Berlin, 2013), p. 143.
[14] O. V. Prokopenko, A. N. Slavin, Low Temp. Phys. **41**, 353 (2015).
[15] B. Fang *et al.*, Nature Commun. **7**, 11259 (2016).
[16] D. D. Tang, Yu. J. Lee, *Magnetic Memory. Fundamentals and Technology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
[17] H. S. Choi *et al.*, Sci. Rep. **4**, 5486 (2014).
[18] S. Tamaru *et al.*, Sci. Rep. **5**, 18134 (2015).
[19] V. S. Tiberkevich, R. S. Khymyn, H. X. Tang, A. N. Slavin, Sci. Rep. **4**, 3873 (2014).
[20] G. Khalsa, M. D. Stiles, J. Grollier, Appl. Phys. Lett. **106**, 242402 (2015).
[21] G. D. Fuchs *et al.*, Appl. Phys. Lett. **86**, 152509 (2005).
[22] G. E. Rowlands, I. N. Krivorotov, Phys. Rev. B **86**, 094425 (2012).
[23] T. Moriyama *et al.*, Phys. Rev. B **86**, 060411(R) (2012).
[24] O. V. Prokopenko *et al.*, J. Appl. Phys. **114**, 173904 (2013).
[25] J. A. Katine, E. E. Fullerton, J. Magn. Magn. Mater. **320**, 1217 (2008).
[26] T. J. Silva, W. H. Rippard, J. Magn. Magn. Mater. **320**, 1260 (2008).
[27] V. S. Tiberkevich, A. N. Slavin, J.-V. Kim, Phys. Rev. B **78**, 092401 (2008).
[28] O. Prokopenko *et al.*, Appl. Phys. Lett. **99**, 032507 (2011).
[29] O. V. Prokopenko *et al.*, IEEE Trans. Magn. **48**, 3807 (2012).
[30] S. Kaka *et al.*, Nature **437**, 389 (2005).
[31] F. B. Mancoff, N. D. Rizzo, B. N. Engel, S. Tehrani, Nature **437**, 393 (2005).
[32] B. Georges *et al.*, Phys. Rev. Lett. **101**, 017201 (2008).
[33] A. Ruotolo *et al.*, Nature Nanotech. **4**, 528 (2009).
[34] S. Sani *et al.*, Nature Commun. **4**, 3731 (2013).
[35] A. Hamadeh *et al.*, Appl. Phys. Lett. **104**, 022408 (2014).
[36] A. Houshang *et al.*, Nature Nanotech. **11**, 280 (2016).
[37] D. Li, Y. Zhou, C. Zhou, B. Hu, Phys. Rev. B **82**, 140407 (2010).
[38] W. Rippard, M. Pufall, S. Russek, Phys. Rev. B **74**, 224409 (2006).
[39] J. Persson, Y. Zhou, J. Akerman, J. Appl. Phys. **101**, 09A503 (2007).
[40] A. N. Slavin, V. S. Tiberkevich, Phys. Rev. B **72**, 092407 (2005).
[41] A. N. Slavin, V. S. Tiberkevich, Phys. Rev. B **74**, 104401 (2006).
[42] B. Georges, J. Grollier, V. Cros, A. Fert, Appl. Phys. Lett. **92**, 232504 (2008).
[43] O. Prokopenko, V. Tyberkevych, A. Slavin, in *Proceedings of the Europe International Magnetics Conference "Intermag 2008"*, (Madrid, Spain, 2008), p. 682.
[44] R. Bonin *et al.*, J. Phys.: Conf. Series. **200**, 042005 (2010).
[45] O. Prokopenko, Radio Electron. Comput. Sci. Control **2**, 11 (2010).
[46] A. Pikovsky, Phys. Rev. E **88**, 032812 (2013).
[47] A. A. Mitrofanov, A. R. Safin, N. N. Udalov, Tech. Phys. Lett. **40**, 571 (2014).
[48] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: a Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
[49] A. A. Awad *et al.*, Nature Phys. **13**, 292 (2017).
[50] J. Grollier, V. Cros, A. Fert, Phys. Rev. B **73**, 060409(R) (2006).
[51] V. Tiberkevich, A. Slavin, E. Bankowski, G. Gerhart, Appl. Phys. Lett. **95**, 262505 (2009).
[52] M. Carpentieri *et al.*, Adv. Cond. Matter Phys. **2012**, 951976 (2012).
[53] D. V. Berkov, Phys. Rev. B. **87**, 014406 (2013).
[54] B. Subash, V. K. Chandrasekar, M. Lakshmanan, Europhys. Lett. **102**, 17010 (2013).
[55] T. Kendziorczyk, S. O. Demokritov, T. Kuhn, Phys. Rev. B. **90**, 054414 (2014).
[56] C. Sanid, S. Murugesh, J. Phys. D: Appl. Phys. **47**, 065005 (2014).
[57] S. Erokhin, D. Berkov, Phys. Rev. B. **89**, 144421 (2014).
[58] A. D. Belanovsky *et al.*, Appl. Phys. Lett. **103**, 122405 (2013).
[59] J. A. Acebrón *et al.*, Rev. Mod. Phys. **77**, 137 (2005).
[60] O. Posth *et al.*, J. Phys. D: Appl. Phys. **42**, 035003 (2009).
[61] Г. М. Младенов, В. М. Спивак, Е. Г. Колева, А. В. Богдан, *Наноэлектроника. Кн. 1. Введение в наноэлектронные технологии* ("АВЕРС", Киев–София, 2010).
[62] C. Boone *et al.*, Phys. Rev. B **79**, 140404(R) (2009).
[63] E. Iacocca, O. Heinonen, P. K. Muduli, J. Åkerman, Phys. Rev. B **89**, 054402 (2014).
[64] F. Sanches *et al.*, Phys. Rev. B **89**, 140410(R) (2014).
[65] R. Adler, Proc. IRE **34**, 351 (1946).
[66] J. Swift, S. Strogatz, and K. Wiesenfeld, Phys. D **55**, 239 (1992).
[67] O. R. Sulymenko, O. V. Prokopenko, in *II International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering "YSF–2016"* (Kharkiv, 2016), p. 136.
[68] O. R. Sulymenko, O. V. Prokopenko, in *9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves "MSMWT2016"* (Kharkiv, 2016), p. E–14.

MUTUAL PHASE-LOCKING OF SPIN-TORQUE NANO-OSCILLATORS TAKING INTO ACCOUNT THE TECHNOLOGICAL SPREAD OF THEIR EIGEN PARAMETERS

O. R. Sulymenko, O. V. Prokopenko
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Faculty of Radio Physics, Electronics and Computer Systems, 64/13, Volodymyrska St., Kyiv, UA–01601, Ukraine,
e-mail: olgasulymenko@gmail.com, oleksandr.prokopenko@gmail.com

Spin-torque nano-oscillators (STNOs) could be promising base elements for the electronics of the future; however, their technical characteristics including output microwave signal power and linewidth, phase noise and frequency stability must be improved before they are used in practical applications. The most promising way to enhance these STNOs' parameters and obtain the most efficient microwave STNO-based devices is to synchronize the nano-oscillators, which could result in an increase in their output power, a reduction of their linewidth and phase noise, an increase in the generated signal stability, etc. However, the synchronization of the STNOs is difficult due to their strong nonlinearity and non-isochronism and the limitations of their manufacturing technology, which at present time is characterized by a quite large spread of STNOs' eigen parameters. In this work, a numerical model of the mutual synchronization of an arbitrary number of weakly-coupled STNOs taking into account the technological spread of STNOs' parameters is presented. The use of this model for the case of two, three, five, ten, and twenty STNOs having various technological spreads of the oscillators' parameters is demonstrated. The obtained results could be important for the development and optimization of microwave devices based on phase-locked STNO arrays.