

DOI: <https://doi.org/10.30970/jps.22.1998>

“РІЗДВЯНІ ДИСКУСІЇ 2018”  
(Львів, 11–12 січня 2018 року)

“CHRISTMASS DISCUSSIONS 2018”  
(Lviv, January 11–12, 2018)

11–12 січня 2018 року на кафедрі теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка відбувалися 22-і Різдвяні наукові дискусії. Традиційно предметом обговорення були проблеми фізики твердого тіла, квантової механіки, фазових переходів, статистичної фізики, астрофізики, космології. Усі доповіді викликали зацікавлення аудиторії і спричинили активні дискусії. Нижче подаємо анотації виголошених доповідей.

## СУПЕРСИМЕТРИЧНИЙ КВАНТОВИЙ ОСЦИЛЯТОР В ПАСТЦІ ПЕННІНГА

Ю. Яремко

Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів

Досліджено квантову динаміку заряду зі спіном  $1/2$  в ідеальній пастці Пеннінга. Частинка утримується в робочій камері пристрою електричним полем, що є градієнтом квадрупольного потенціалу

$$e\Phi(\rho, z) = \frac{M}{2}\omega_z^2 \left( -\frac{1}{2}\rho^2 + z^2 \right),$$

та однорідним магнітним полем  $\mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{A}]$ , орієнтованим вздовж осі  $z$ :

$$\frac{e}{c}\mathbf{A} = -\frac{1}{2}M\omega_c(-y, x, 0).$$

Аксіальна частота,  $\omega_z$ , та циклотронна частота,  $\omega_c$ , задовільняють умову утримання:  $2\omega_z^2/\omega_c^2 < 1$ . Завдяки аксіальній симетрії третя компонента повного моменту кількості руху  $J_3 = L_3 + S_3$  та гамільтоніан Дірака комутують. Щоб розв'язати нерелятивістську (основану на рівнянні Паулі) задачу на власні функції та власні значення комутуючих ермітових операторів застосовано суперсиметричну квантову механіку Віттена [1]. Хвильову функцію шукаємо у вигляді

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{\chi(z)}{\sqrt{\rho}} \begin{bmatrix} e^{-i(m+1)\varphi} R_1(\rho) \\ e^{-im\varphi} R_2(\rho) \end{bmatrix},$$

де  $\chi(z)$  — поліном Ерміта. Радіальні частини суперсиметричних партнерів факторизовані сходинковими операторами із суперпотенціалом

$$W(\rho; m) = \rho - \frac{m + 1/2}{\rho}.$$

Знайдено спектри суперсиметричних партнерів. За допомогою стандартної теорії збурень знайдено поправки до нерелятивістського спектра [2].

[1] E. Witten, J. Diff. Geom. **17**, 661 (1982).

[2] Yu. Yaremko, M. Przybylska, A. J. Maciejewski, Int. J. Mass Spectrom. **422**, 13 (2017).

# A CLASS OF EXACT SOLUTIONS OF THE MAXWELL EQUATIONS IN THE KERR FIELD AND THEIR USE FOR DESCRIBING NEW EFFECTS

*V. Pelykh, Yu. Taistra*

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
NAS of Ukraine

The problem of the evolution of test fields in the Kerr space-time background had been substantially solved by Teukolsky, but the Teukolsky radial equation and the Teukolsky angular equation still contain mathematical difficulties of a theoretical and computational character: until recently, solving those equations analytically was considered impossible in terms of known functions, so approximations with a more simple function — spin-weighted spherical harmonics which generalize spheroidal wave functions (when spin is zero) and spin-weighted spherical harmonics (when  $a\omega = 0$ ), Jacobi polynomials, continued fractions, Heun functions were used for the computing, but all the approaches were faced with computational difficulties. As a result, there are quite a few physical consequences of these equations, the most famous of which is Starobinski's prediction of superradiance.

By using the Newman-Penrose method in the spinor form we have found (simultaneously with Jezierski and Smolka but in a different analytical form) an exact general solution and a solution with separated variables which describes a null one-way Maxwell field on the Kerr space-time background in a class of algebraically special solutions and have investigated some of their properties and extracted physical consequences. This general solution generalizes the known solution of Torres in the Minkowski space-time. From the solution with separated variables we deduce the exact formula for the rotation of the plane of polarization (a gravitational analog of the Faraday effect) and a conclusion about the suppression of right-handed electromagnetic waves for all frequencies as well as the expression for phase shift. The latter contains  $\mathbb{C}$  as a partial case  $\mathbb{C}$  the known result in the Schwarzschild case.

## ЗАПЛУТАНІСТЬ І ГЕОМЕТРІЯ КВАНТОВИХ СТАНІВ СИСТЕМИ СПІНІВ ІЗ ДАЛЕКОДІЄЮ

*А. Кузьмак*

Кафедра теоретичної фізики,  
Львівський національний університет імені Івана Франка

Досліджено еволюцію системи  $N$  спінів, що всі взаємодіють. Отримано вираз для еволюції заплутаності одного спіну з рештою спінів залежно від проекції початкового стану. Обчислено метрику многовиду, який містить ці стани. Показано, що він має топологію сфери. Також знайдено залежність заплутаності стану від кривизни многовиду.

## ISING MODEL WITH A POWER-LAW SPIN LENGTH DISTRIBUTION

*B. Berche<sup>1,2</sup>, Yu. Holovatch<sup>2,3</sup>, M. Krasnytska<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup> Institut Jean Lamour, CNRS/UMR 7198, Groupe de Physique Statistique,  
Université de Lorraine, France

<sup>2</sup>  $\mathbb{L}^4$  Collaboration & Doctoral College for the Statistical Physics of Complex Systems,  
Leipzig–Lorraine–Lviv–Coventry

<sup>3</sup> Institute for Condensed Matter Physics, NAS of Ukraine

Considering the critical behaviour on networks, special attention has been paid to the case of scale-free networks, which are characterized by a power law decay of the node degree distribution [1]. It is well established by now that the fundamental features of criticality, scaling and universality have to be reconsidered when a system resides on a scale-free network, see e.g. [2]. In our study we decided to further analyse the combined impact of the two power laws present in the system. To this end, we consider the Ising model with a power-law spin length distribution on a scale-free network. As we show in our study, an interplay of the two power laws governing the systems statistics leads to a rich phase diagram with a variety of phase transitions in different universality classes [3]. We discuss possible applications of the model considered.

[1] R. Albert, A.-L. Barabási, Rev. Mod. Phys. **74**, 47 (2002).

[2] M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna, J. Phys. A **49**, 135001 (2016).

[3] B. Berche, Yu. Holovatch, M. Krasnytska (unpublished).

## LIGHT FROM DARK AGES

*B. Novosyadlyj*<sup>1,2</sup>, *O. Sergijenko*<sup>1</sup>, *V. Shulga*<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Astronomical Observatory of Ivan Franko National University of Lviv

<sup>2</sup>International Center of Future Science of Jilin University, Changchun, P. R. China,

<sup>3</sup>Institute of Radio Astronomy, NAS of Ukraine, Kharkov

The observational and theoretical studies of the structure and composition of the Universe at different scales and epochs, the search for new precise tests for them are an important part of modern cosmology. We analyse the formation of first objects at the end of the cosmological Dark Ages in the multicomponent Universe (dark matter, dark energy, baryonic matter and thermal radiation) and their possible observational manifestations. Before the appearance of the first luminous objects (Population III stars, quasars and first galaxies), the baryonic gas with some primordial molecules content in the dark matter halos can either absorb the background thermal (relic) radiation or radiate in the rotational/vibrational molecular lines [1]. We discuss the possibility of observing them using advanced low frequency radio telescopes.

We also show that the abundance of different molecules at the end of Dark Ages depends on the nature of dark components, especially on the type of dark matter [2]. If the dark matter is warm and consists of decaying or self-annihilating particles, the formation/dissociation of molecules depends on its nature. We discuss the possibility of constraining the warm dark matter parameters (density, mass and lifetime of particles) using the radioastronomical observational data.

[1] S. Lepp, P. C. Stancil, in *The Molecular Astrophysics of Stars and Galaxies*, edited by Thomas W. Hartquist and David A. Williams (Clarendon Press, Oxford, 1998), p. 37.

[2] B. Novosyadlyj, O. Sergijenko, V. Shulga, *Kinem. Phys. Celest. Bodies* **33**, 3 (2017).

## CRITICAL BEHAVIOUR OF TWO-DIMENSIONAL MODELS WITH ISING SPINS IN THE PRESENCE OF LONG-RANGE CORRELATED DISORDER

*M. Dudka*

Institute for Condensed Matter Physics, NAS of Ukraine, Lviv

We consider the critical behaviour of the two-dimensional Ising model and the  $N$ -‘colour’ Ashkin–Teller model in the presence of random defects whose correlations decay with the distance  $r$  as the power-law  $r^{-a}$ . Mapping the problems onto two-dimensional Dirac fermions with a correlated disorder we study the critical properties within the renormalization group approach. Using the two-loop approximation for the Ising model with  $0.995 < a < 2$  we find a new critical behaviour characterized by the correlation length exponent  $\nu \approx 2/a$ . Applying bosonization, we also calculate the averaged square of the spin-spin correlation function and find the corresponding critical exponent  $\eta_2$ .

For the  $N$ -‘colour’ Ashkin-Teller model within one-loop order we show that the “weakly universal” scaling behaviour for  $N = 2$  as well as the first-order phase transition for  $N > 2$  are transformed by the correlated disorder into a continuous phase transition sharing universality class with the previously considered model.

## EXACT SOLUTIONS FOR TWO-BODY PROBLEMS IN 1D DEFORMED SPACE WITH MINIMAL LENGTH

*M. I. Samar, V. M. Tkachuk*

Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv

We reduced the two-body problem to the one-body problem in the general case of deformed Heisenberg algebra leading to a minimal length. The two-body problems with delta and Coulomb-like interactions were solved exactly. We obtained an analytical expression for the energy spectrum for partial cases of the deformation function. The dependence of the energy spectrum on the center-of-mass momentum was found. For the special case of the deformation function, which corresponds to the cut-off procedure in the momentum space it was shown that this dependence is more likely to be observed for identical particles.

The main results of this report were published in [M. I. Samar, V. M. Tkachuk, *J. Math. Phys.* **58**, 122108 (2017)].

## ON THE CROSS-OVER BETWEEN DIFFUSION-LIMITED AND REACTION-LIMITED PARTICLE SYSTEMS

*D. Shapoval<sup>a</sup>, M. Dudka<sup>a</sup>, X. Durang<sup>b</sup>, M. Henkel<sup>c,d</sup>*

<sup>a</sup> Institute of Condensed Matter Physics, NAS of Ukraine, Lviv

<sup>b</sup> Department of Physics, University of Seoul, Republic of Korea

<sup>c</sup> Laboratoire de Physique et Chimie Théoriques (CNRS UMR),  
Université de Lorraine Nancy, France

<sup>d</sup>Centro de Física Teórica e Computacional, Universidade de Lisboa, Portugal

Relaxation phenomena far from equilibrium continue to raise important questions in fundamental and applied research. Diffusion-limited chemical reactions provide test cases of particular interest, since their evolution is dominated by fluctuations on all time and length scales [1]. We consider the coagulation-diffusion process of a single species of particles  $A$ , which can diffuse on an underlying lattice and upon encounter undergo a reaction  $A + A \rightarrow A$ . Describing this process at the mean-field level, which is adequate for a reaction-limited case, one finds  $\rho(t) \sim t^{-1}$  at long times. However, in spatial dimensions  $d \leq 2$ , where the reactions are diffusion-limited, the kinetics of the process is anomalous, since the decay behaviour is different from the mean-field behaviour and rather becomes  $\rho(t) \sim t^{-d/2}$  for  $d < 2$  and  $\rho(t) \sim t^{-1} \ln t$  for  $d = 2$ .

We are interested in the cross-over between the diffusion-limited and reaction-limited extreme cases of simple kinetic models, especially as this cross-over has already been observed experimentally [2]. The change between the diffusion-limited and reaction-limited cooperative behaviour in a reaction-diffusion system is studied through the cross-over of the coagulation-diffusion process between a chain and the Bethe lattice. This model is exactly solvable through the empty-interval method, which can be extended from the chain to the Bethe lattice in the ben-Avraham-Glasser approximation [3]. On the Bethe lattice, the model's behaviour turns out to be equivalent to the behaviour that is expected at the upper critical dimension.

[1] D. C. Mattis, M. L. Glasser, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 979 (1998); D. ben Avraham, S. Havlin, *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[2] J. Allam *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 197401 (2013).

[3] D. ben Avraham, M. L. Glasser, *J. Phys. Condens. Matter* **19**, 065107 (2006).

## ЗАПОВНЕННЯ ПРОГАЛИНИ МІЖ НАДНОВИМИ ТА ЗАЛИШКАМИ НАДНОВИХ. ТРИВИМІРНЕ МАГНІТО-ГІДРОДИНАМІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

*О. Петрук<sup>1</sup>, С. Орландо<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики, Львів

<sup>2</sup>Астрономічна обсерваторія, Палермо

Залишки наднових — дифузні об'єкти, що утворилися внаслідок вибуху зір на кінцевій стадії еволюції. Вони переважно мають досить складну морфологію, неоднорідний розподіл яскравості та негомогенну структуру зоряного викиду. Загальний консенсус, який був сформований на останніх стадіях еволюції попередниці, полягає в тому, що така морфологія залишків може бути наслідком, з одного боку, структури зорі-попередниці та особливостей її вибуху або ж, з іншого боку, формується внаслідок взаємодії ударної хвилі Наднової з неоднорідним навколишнім середовищем. Отож, всевильові спостереження залишків наднових містять закодовану інформацію про фізичні властивості спалаху зорі та її еволюцію в довколишньому просторі. Розшифровка спостережень та моделювання еволюції об'єкта, яке на них ґрунтується, відкриває можливість реконструювати будову зоряного викиду одразу після вибуху, а також структуру середовища та геометрію магнітного поля довкола зорі-попередниці. Ми покажемо, як тривимірні магніто-гідродинамічні моделі еволюції зорі від спалаху наднової до залишку наднової розкривають таємниці двох цікавих об'єктів Cassiopeia A і SN1987A.

## БОЗЕ-КОНДЕНСАЦІЯ ТА/АБО МОДУЛЯЦІЯ “ЗМІЩЕНЬ” У ДВОСТАНОВІЙ МОДЕЛІ БОЗЕ-ХАББАРДА

*І. В. Стасюк, О. В. Величко*

Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів

Вивчено описувані двостановою моделлю Бозе-Габбарда нестійкості в системі квантових частинок щодо появи бозе-конденсату та/або модуляції “зміщень”. Показано, що в системі, залежно від співвідношення між енергією збудженого стану та параметром взаємодії зміщень, виникає стан із модульованим (з подвоєнням періоду ґратки) або однорідним зміщенням частинок.

Проаналізовано умови виникнення фази з бозе-конденсатом. Досліджено поведінку параметрів порядку й побудовано фазові діаграми системи як аналітично (для основного стану), так і числовими методами (за ненульової температури). Установлено, що фаза суперсолід є одним із можливих метастабільних станів, але вона термодинамічно не стійка. Натомість реалізуються фазові переходи між нормальною й модульованою фазами, які можуть бути як 1-го, так і 2-го роду. Фаза з бозе-конденсатом, за її появи, є проміжною між ними.

## ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ В ТЕОРІЇ БОЗЕ-ПОЛЯРОНА

*І. Вакарчук<sup>1</sup>, Г. Паночко<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Кафедра теоретичної фізики,

Львівський національний університет імені Івана Франка,

<sup>2</sup>Природничий коледж, Львівський національний університет імені Івана Франка

Розглянемо сукупність спин-поляризованих невзаємодіючих ферміонів у границі зникаюче малої густини, що перебувають у середовищі бозонів, які взаємодіють. Така модель дає змогу вивчати властивості однієї, зануреної в рідкий гелій домішки методами теорії поля. Використовуючи підхід Попова [V. N. Popov, *Functional Integrals and Collective Excitations* (Cambridge University Press, 1987)], ми обчислюємо функціональні інтеграли у змінних фаза-густина. Щоб дослідити спектр домішки, ми одночастинкову функцію Гріна ферміонів обираємо у вигляді:

$$G(P) = \{i\nu_p + \bar{\mu} - \Sigma(P)\}^{-1}$$

, тут  $P = (\nu_p, \mathbf{p})$  — чотири-вектор,  $\nu_p$  — ферміонна мацубарівська частота,  $\bar{\mu}$  — хімічний потенціал ферміонів. Уся інформація про взаємодію домішки з бозе-системою міститься у власноенергетичній частині  $\Sigma(P)$ . Ми для неї отримали точне діаграмне зображення. І в другому порядку теорії збурень самоузгоджено розрахували енергію занурення та ефективну масу бозе-полярона.

## ДВАДЦЯТЬ РОКІВ ЖУРНАЛУ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ. СПРОБА ЖУРНАЛОМЕТРИЧНОГО АНАЛІЗУ

*Ю. Головач<sup>1</sup>, М. Красницька<sup>1</sup>, О. Мриглод<sup>1</sup>, А. Ровенчак<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Інститут фізики конденсованих систем НАН України Львів, Україна

<sup>2</sup>Кафедра теоретичної фізики,

Львівський національний університет імені Івана Франка

Кількісний аналіз наукової періодики є невід’ємною частиною наукометрії, оскільки саме в масиві публікацій відображено поточні наукові здобутки. Результати вивчення даних про опубліковані роботи можуть бути використані як для глобальних задач на зразок окреслення стану динамічної системи наукового знання, так і для локальних, як-от: моніторингу стану конкретного видання, ретроспективного аналізу його діяльності чи підтримки редакційних рішень. При цьому можна використовувати внутрішні редакційні дані (бібліографічні довідки про надіслані до друку рукописи, терміни їх опрацювання тощо) та інформацію ззовні (про одержані цитування інших робіт, активність користувачів веб-ресурсів, реакцію спільноти і т.п.). На прикладі “Журналу фізичних досліджень” (ЖФД) продемонстровано деякі результати такого кількісного аналізу. Дані про 962 статті, опубліковані в цьому виданні впродовж 20 років його існування, використані для побудови та дослідження низки складних мереж. Картину наукової співпраці відображено у вигляді мережі співавторства: проаналізовано структуру авторських колективів, її динаміку в часі, виявлено найбільш впливових авторів журналу. Детально вивчено географію вчених, що надсилали статті до

друку в ЖФД, як на рівні окремих міст (лише для авторів з України), так і на рівні країн (аналіз міжнародної співпраці). Тематичний профіль видання показано через мережу індексів RACS, що використовуються для характеристики напрямку кожної роботи. Коротко обговорено розподіли цитувань, дані про які одержано з наукометричних сервісів Scopus та Web of Science.

[1] Ю. Головач, М. Красницька, О. Мриглод, А. Ровенчак, Журн. фіз. досл. **21**, 4001 (2017).

## СТІЙКИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОСТІ МАГНІТНОГО ПОЛЯ В ФОТОСФЕРІ СОНЦЯ

*А. Присяжний, М. Стоділка*

Астрономічна обсерваторія,

Львівський національний університет імені Івана Франка

Запропоновано модифікацію класичного методу визначення напруженості магнітного поля за відстанню  $\Delta\lambda_{rb}$  між положеннями піків синього  $b$  і червоного  $r$  крил  $V$ -профілів Стокса магніточутливої спектральної лінії. Для зменшення впливу шумів та коректнішого визначення величини  $\Delta\lambda_{rb}$  спостережувані профілі апроксимовано кривою, яка описується модифікованою базовою функцією *Wave*-вейвлета. Коефіцієнти апроксимаційної функції визначено багатовимірною оптимізацією. Для тестування методу використано синтезовані  $V$ -профілі Стокса спектральної лінії нейтрального заліза  $FeI15648A$ . Профілі розраховано розв'язанням прямої задачі переносу випромінювання. Запропонований підхід стійкіший до впливу шумів, ніж метод прямого вимірювання величини  $\Delta\lambda_{rb}$ , та дозволяє коректніше визначати напруженість магнітного поля для сигналів з високим рівнем шуму.

## THE DARK ENERGY HYDRODYNAMICS

*Yu. Kulnich, B. Novosyadlyj, M. Tsizh*

Astronomical Observatory, Ivan Franko National University of Lviv

We consider dark energy as a continuous medium that is described by the barotropic equation of state  $p \equiv p(\rho)$ . The main features of that component in the dynamical and locally non-homogeneous Universe can be described by the following parameters: i. Energy perturbations — energy density perturbation  $\delta \equiv (\rho - \bar{\rho})/\bar{\rho}$  and pressure perturbation  $\pi \equiv (p - \bar{p})/\bar{p}$ ; ii. State parameters — state of matter  $\omega \equiv \bar{p}/\bar{\rho}$  and dynamic state of matter  $c_a^2 \equiv \dot{\bar{p}}/\dot{\bar{\rho}}$ ; iii. Perturbative parameters — effective speed of sound  $c_s^2 \equiv \Delta p/\Delta \rho$  and its background dependence parameter  $\eta \equiv \bar{\rho}(\partial c_s^2(\rho)/\partial \rho)$ . All of these parameters appear in Euler equations and therefore their quantities must be specified within the dark energy model.

For simplicity we consider the dark energy perturbation on the background of a spherically perturbed spacetime metric

$$ds^2 = e^{\nu(\tau,R)} d\tau^2 - e^{\mu(\tau,R)} a^2(\tau) [dR^2 - R^2 d\Omega^2]. \quad (1)$$

The equation of momentum conservation and the equation of energy density conservation in the background reference frame and in the nonrelativistic approximation are as follows:

$$p' + \frac{1}{2}\nu'(\rho + p) + \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial \tau} [a^4(\rho + p)v] + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} [R^2(\rho + p)v^2] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\bar{\rho}\delta) + 3\frac{\dot{a}}{a}(\bar{\rho}\delta + \bar{p}\pi) + (\rho + p)\frac{1}{2}\dot{\mu} + \frac{1}{a} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} [(\rho + p)R^2 v] = 0, \quad (3)$$

where we have taken into account that energy density and pressure density are perturbed as follows:  $\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$  and  $p = \bar{p}(1 + \pi) = \bar{\omega}\bar{\rho}(1 + c_s^2\delta/\bar{\omega})$  respectively.

For a clearer physical meaning we rewrote equation (2) taking into account (3) in the approximation of first-order perturbations for a static Universe (i.e.  $a = 1$ ,  $\dot{a} = 0$ ,  $r = R$ ):

$$\dot{v} + vv' + \frac{1}{\rho + p} p' = \frac{1}{\rho + p} (\mathcal{F}_{\text{grv}} + \mathcal{F}_{\text{jet}}), \quad (4)$$

where  $\mathcal{F}_{\text{grav}} = -(\rho + p)v'/2$  — is gravity force, and  $\mathcal{F}_{\text{jet}} = -(\rho + p)(\Delta\dot{m}/\Delta m)v = c_s^2(\rho + p)vr^{-2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v)$  — is jet force, the presence of which tells us that the inertial mass  $\Delta m = (\rho + p)\Delta V$ , where  $\Delta V$  is the comoving volume, is not conserved.

We considered stationary ( $\dot{v} = 0$ ) and static ( $v = 0$ ) solutions of Eq. 4 in the static gravity fields of the Schwarzschild black hole and a spherical dark matter halo.

## ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК 1D МОДЕЛІ ПОТТСА З НЕВИДИМИМИ СТАНАМИ: АНАЛІЗ НУЛІВ СТАТИСТИЧНОЇ СУМИ

*П. Сарканич<sup>1,2,3</sup>, Ю. Головач<sup>1,3</sup>, Р. Кенна<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup> Інститут фізики конденсованих систем НАН України Львів, Україна

<sup>2</sup> Дослідницький центр прикладної математики, Університет Ковентрі, Великобританія

<sup>3</sup> L<sup>4</sup>-співпраця і Докторський коледж статистичної фізики складних систем, Ляйпціг–Лорен–Львів–Ковентрі

Модель Поттса з невидимими станами була запропонована кілька років тому для пояснення неузгодженостей між теорією й експериментальним спостереженням фазового переходу зі спонтанним порушенням  $Z_3$  симетрії [1,2]. Вона відрізняється від звичайної моделі Поттса додатковими невидимими станами, у яких спіни не взаємодіють з оточенням. Ми розглянули поведінку такої моделі на одновимірному ланцюжку. За допомогою методу трансфер-матриці ми знайшли точний розв'язок і проаналізували нулі статистичної суми. Додатна кількість невидимих станів не змінює фазового переходу в нулі температур. Натомість ми запропонували два методи зсуву критичної температури в ділянку  $T > 0$ . Один із них — за допомогою комплексного магнітного поля, а інший — за від'ємної кількості невидимих станів [3].

[1] R. Tamura, S. Tanaka, N. Kawashima, Progress Theor. Phys. **124**, 381 (2010).

[2] S. Tanaka, R. Tamura, J. Phys.: Conf. Ser. **320**, 012025 (2011).

[3] P. Sarkanych, Yu. Holovatch, R. Kenna, Phys. Lett. A **381**, 3589 (2017).

## ЛЮМІНЕСЦЕНТНІ ВЛАСТИВОСТІ НАНОЧАСТИНОК $\text{YVO}_4:\text{Bi}^{3+}$ , ОТРИМАНІ ГІДРОТЕРМАЛЬНИМ СИНТЕЗОМ

*Т. Малій, В. Цюмра*

Кафедра експериментальної фізики,

Львівський національний університет імені Івана Франка

На сьогодні для розпізнавання й сепарації біологічних об'єктів в основному використовують біомітки на основі люмінесцентних наноконкомпозитів, що базуються на похідних флуоресцеїну або його аналогів. Органічні люмінесцентні маркери характеризуються високою інтенсивністю свічення, проте мають значне фотовигорання. Тому розробляють маркери на основі неорганічних сполук, які характеризуються значною фотостабільністю та сцинтиляційними параметрами. Сьогодні активно розробляють новітні підходи контрольованої нуклеації люмінесцентних неорганічних солей, оксидів наночастинок і колоїдів, легованих йонами лантанідів, на основі боратів і ванадатів Y, La, Lu і Gd, легованих йонами лантанідів, люмінесценція яких ефективно збуджується в діапазоні 250–370 нм. Такі особливості дадуть змогу досліджувати біологічні об'єкти методами люмінесцентної спектроскопії з використанням скляної оптики.

Оскільки випромінювальні матеріали на основі рідкісно-земельних ортованадатів широко використовують з різною науково-технічною метою, то поліпшення їхніх сцинтиляційних характеристик для використання в біомаркуванні вимагає вивчення різних методик синтезу, а також впливу концентрацій домішок на властивості люмінесценції. Зразки  $\text{YVO}_4:\text{Bi}^{3+}$  з різними концентраціями домішок були отримані за допомогою гідротермального методу, з використанням різних полімерів як темплатів для синтезу. Мікроструктуру й морфологію одержаних наночастинок досліджували за допомогою електронної мікроскопії, рентгенівської дифракції та DLS. Середній розмір зерен для одержаних наночастинок становить 10–20 нм.

Вивчено люмінесцентні властивості наночастинок залежно від концентрації йонів  $\text{Bi}^{3+}$ , а також вплив полімеру на люмінесцентні властивості наночастинок. Уведення йонів вісмуту призводить до зсуву краю збудження в довгохвильову ділянку, а модифікація поверхні — до зростання інтенсивності люмінесценції. Пояснюють особливості в межах екситонної моделі для центрів, що виникають в  $\text{LiYF}_4\text{O}_{12}:\text{Bi}^{3+}$  [1]. Припускається, що край фундаментального поглинання формується поглинанням екситону, локалізованого поблизу йонів вісмуту, а збуджені стани вісмуту розташовані в зоні

провідності. Таке положення енергетичних рівнів підтверджується розрахунками зонної енергетичної структури кристалів  $YVO_4$ ,  $YVO_4:Bi^{3+}$  та  $BiVO_4$  та попередніми модельними висновками щодо структури  $Bi^{3+}$ -центрів [2, 3].

- [1] V. Babin *et al.*, *J. Lumin.* **176**, 324 (2016) .
- [2] P. Boutinaud, *Inorg. Chem.* **52** (10), 6028 (2013).
- [3] R. H. P. Awater, P. Dorenbos, *J. Lumin.* **184**, 221 (2017).

## ЕКЗОТИЧНІ АТОМИ У КВАНТОВАНОМУ ПРОСТОРИ З НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ ТА НЕКОМУТАТИВНІСТЮ ІМПУЛЬСІВ

*Х. Гнатенко*

Кафедра теоретичної фізики,  
Львівський національний університет імені Івана Франка

Досліджено квантований простір з некомутованістю координат та некомутованістю імпульсів

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij},$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij},$$

$$[P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij},$$

де  $\theta_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$  — тензори некомутованісті. Розглянуто ідею побудови тензорів некомутованісті за допомогою додаткових координат та додаткових імпульсів, які описуються сферично-симетричною системою [1].

Вивчено проблему опису руху центра мас системи частинок у сферично-симетричному некомутованому фазовому просторі. Знайдено та досліджено вирази для ефективних тензорів координатної та імпульсної некомутованісті, які відповідають за рух системи частинок у квантованому просторі зі збереженою сферичною симетрією.

Розглянуто вплив квантованості простору на спектр екзотичних атомів, серед них мюонний водень, антипротонний гелій. Показано, що некомутованісті координат та некомутованісті імпульсів мають більший ефект на енергетичні рівні екзотичних атомів порівняно з впливом на спектр атома водню. Зважаючи на це, ми дійшли висновку, що поліпшення точності вимірювання спектра екзотичних атомів дозволяє отримати сильне обмеження на величину кванта простору [2].

- [1] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, *Int. J. Mod. Phys. A* **32**, 1750161 (2017).
- [2] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, arXiv:1711.04527.

## ФОТОСФЕРНІ ДЖЕТИ В СПОКІЙНІЙ АТМОСФЕРІ СОНЦЯ

*М. Стоділка*

Астрономічна обсерваторія, Львівський національний університет імені Івана Франка

Спостереження з високим просторовим розділенням (IMaX/SUNRISE та HINODE) показали наявність джетів у деяких гранулах та міжгранулах у спокійній атмосфері Сонця. Досі не з'ясована причина таких явищ — невідомо, чи це є рух речовини всередині магнітних петель, чи результат перемикавання магнітних полів, чи конвективний колапс. Для дослідження таких дрібномасштабних активних центрів у спокійній атмосфері Сонця ми використали дані 2D -спостережень Сонця з високим просторовим розділенням, отримані на голландському DOT-телескопі в лініях FeI:  $\lambda 5576\text{Å}$  (лінія немагнеточутлива) та в магнеточутливих лініях  $\lambda 6301.5\text{Å}$  та  $\lambda 6302.5\text{Å}$ . Глибини утворення цих ліній охоплюють фотосферні шари атмосфери Сонця. Розв'язком оберненої задачі переносу випромінювання з використанням даних спостережень у немагнеточутливій лінії ми відтворили фізичні умови (температура, тиск, густина, променева швидкість) у неоднорідній атмосфері Сонця; поле горизонтальних швидкостей відтворено подальшим використанням рівнянь гідродинаміки, магнітне поле — за даними в лініях  $\lambda 6301.5\text{Å}$  та  $\lambda 6302.5\text{Å}$ .

Результати відтворення фізичних умов у спокійній фотосфері Сонця виявляють у міжгранульних ділянках компактні дрібномасштабні утворення підвищеної температури, речовина в яких опускається вниз або ж піднімається вгору, причому швидкості руху речовини значно перевищують типові

швидкості для міжгранул; з висотою швидкість спадає. Центри енерговиділення фотосферних джетів локалізовані в шарах середньої фотосфери. Для цих центрів характерні: зміна знака променевої швидкості, збільшення густини речовини, різке зростання надлишкового тиску та температури. У середині джетів локалізоване сильне магнітне поле (переважно вертикальне), в околі джетів — слабе магнітне поле такої ж полярності. В околі фотосферних джетів магнітних укралень протилежної полярності не виявлено. З часом унаслідок перемикування силових ліній однакової полярності структура магнітного поля змінюється, що спричиняє виділення енергії й утворення інтенсивних вертикальних потоків речовини. Проаналізовано горизонтальні швидкості поблизу таких активних центрів — показано, що джети виникають у місцях стикання інтенсивних горизонтальних потоків замагніченої плазми. Досліджено вплив магнітного поля на фізичні умови в джетах. Побудовано моделі спостережуваних дрібномасштабних активних центрів спокійної фотосфери Сонця.

## NETWORK METRICS OF THE COSMIC WEB OF GADGET2 COSMOLOGICAL $N$ -BODY SIMULATION

*M. TsiZh*

Astronomical Observatory, Ivan Franko National University of Lviv

In my work I explore the results of GADGET2 cosmological  $N$ -body simulation using the methods of complex network theory. The simulation contained  $512^3$  identical particles which represented dark matter in the volume of  $200^3 h^3 \text{ Mpc}^3$ ; the cosmological parameters of this simulated universe are as follows: the normalized Hubble parameter  $h = 0.68$ , the density parameters  $\Omega_m = 0.31$  and  $\Omega_\Lambda = 0.69$ , the power spectrum index  $n_s = 0.96$ , and  $\sigma_8 = 0.82$ . This data was generated and used by the authors of [?] to compare 12 different algorithms for defining large-scale structures, that are applied to halo distribution data. These algorithms categorize each of the halos (which are the nodes in our network) as one of the four types of structures: voids, filaments, sheets or knots (superclusters). I used the results of the CLASSIC and Multi-Stream Web Analysis (MSWA) classification algorithms.

When building the network, two halos are said to be connected when the distance between them is smaller than the specified linking length (1...2 Mpc in my case). Only part of the entire volume was taken, where the number of nodes is up to 10 000. After computing the network metrics for each node (degree centrality, betweenness centrality, closeness centrality and the clustering coefficient) I've found Pearson's correlation parameters for each type of the network metric with the type of structure that the node belongs to. The results have shown that some network metrics (the degree of node for example) are correlated with the type of structure to which the halo belongs. I have also studied how the values of these network metrics are distributed for the populations of halos of different types of structures. The obtained network metrics distributions of the halo populations of different types of structures are considerably dissimilar.

[1] N. I. Libeskind *et al.*, Mon. Not. Roy. Soc. **473**, 1195 (2018).

## SENSIBILISATION OF THE $\text{Gd}^{3+}$ LUMINESCENCE IN BORATE GLASSES BY SILVER IMPURITY

*B.V. Padlyak<sup>1,2</sup>, T.B. Padlyak<sup>2</sup>, A. Drzewiecki<sup>1</sup>, V.T. Adamiv<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>University of Zielona Góra, Institute of Physics, Division of Spectroscopy of Functional Materials, Zielona Góra, Poland <sup>2</sup>Vlokh Institute of Physical Optics, Department of Optical Materials, Lviv

The  $\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7:\text{Gd}$ ,  $\text{CaB}_4\text{O}_7:\text{Gd}$ ,  $\text{LiCaBO}_3:\text{Gd}$ , and  $\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7:\text{Gd,Ag}$  glasses of high optical quality, obtained by standard glass technology, have been investigated by electron paramagnetic resonance (EPR) and optical spectroscopy at room temperature (RT). The Gd impurity was added in the raw materials as  $\text{Gd}_2\text{O}_3$  in the amounts 0.5 and 1.0 mol. %. The Ag impurity was introduced into the  $\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$  glass composition as  $\text{AgNO}_3$  and as highly dispersed metallic Ag in the amount 2.0 mol. %. In all Gd-doped glasses EPR U-spectrum of the  $\text{Gd}^{3+}$  ( $^8\text{S}_{7/2}$ ,  $4f^7$ ) ions was observed that is typical for glasses and practically independent of the basic glass composition. In the  $\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7:\text{Ag}$  glass at RT a broad complex signal was observed that is a superposition of paramagnetic  $\text{Ag}^{2+}$  ( $4d^9$ ) and  $\text{Ag}^0$  ( $4d^{10} 5s^1$ ) centres. In Gd-doped glasses under excitation at 273 nm a weak UV emission line at 311 nm was observed that was attributed to the  $^6\text{P}_{7/2} \rightarrow ^8\text{S}_{7/2}$  intraconfiguration  $4f - 4f$  transition of the  $\text{Gd}^{3+}$  ions. In the luminescence excitation spectrum of the  $\text{CaB}_4\text{O}_7:\text{Gd}$  glass, characteristic groups of lines were observed, which correspond to the  $^8\text{S}_{7/2} \rightarrow ^6\text{I}_J$ ,  $^6\text{D}_J$  transitions of the  $\text{Gd}^{3+}$  ions. The significant ( $\sim 100$  times) increasing of the peak

intensity of the  $Gd^{3+}$  emission line at 311 nm in the  $Li_2B_4O_7:Gd,Ag$  glass has been explained by energy transfer from  $Ag^+$  ( $4d^{10}$ ) to  $Gd^{3+}$  ( $4f^7$ ) upon excitation at 273 nm that is resonant for  $4d^{10} \rightarrow 4d^9 5s^1$  ( $^1S_0 \rightarrow ^1D_2$ ) and  $^8S_{7/2} \rightarrow ^6I_J$  transitions of the  $Ag^+$  and  $Gd^{3+}$  ions, respectively. The luminescence kinetics of the  $Gd^{3+}$  emission line at 311 nm in the  $CaB_4O_7:Gd$  ( $Gd_2O_3 - 1.0$  mol. %) and  $Li_2B_4O_7:Gd,Ag$  ( $Gd_2O_3 - 1.0$  mol. %,  $AgNO_3 - 2.0$  mol. %) glasses is satisfactorily described by the single exponential decay with lifetimes  $\sim 3.2$  ms and  $\sim 4.1$  ms, respectively. The obtained results show that the borate glasses co-activated by  $Gd^{3+}$  and  $Ag^+$  can be promising materials for effective UVB light sources (working wavelength 311 nm,  $^6P_{7/2} \rightarrow ^8S_{7/2}$  channel) for biomedical applications (phototherapy lamps).

## ЕЛЕКТРОСТАТИЧНА ВЗАЄМОДІЯ ДВОАТОМНИХ ПОЛЯРНИХ МОЛЕКУЛ ІЗ МЕТАЛЕВИМИ КЛАСТЕРАМИ

*Г. Понеділок*

Національний університет "Львівська політехніка"

Досліджено внески класичних електростатичних ефектів у задачі про взаємодію дипольних нейтральних молекул з плоскими поверхнями простих металів та металевими кластерами сферичної форми. Застосовано метод дзеркального зображення. Розраховано точні вирази для сили електростатичної взаємодії між молекулою та металевою поверхнею для довільних відстаней молекули від металевої поверхні та довільних просторових орієнтацій дипольного моменту щодо поверхні. Знайдено точні аналітичні вирази для потенціальної енергії диполя поблизу плоскої поверхні та провідної сфери. У набліженні точкового диполя (далекі відстані центра дипольної молекули від поверхні) відтворено відомі вирази. Розраховано також внески від електростатичних взаємодій в ефективну опосередковану енергію взаємодії двох дипольних молекул, розташованих поблизу плоскої або сферичної провідних поверхонь.

## EXACT SOLUTION OF THE GENERALIZED DIRAC OSCILLATOR

*H. P. Laba<sup>1</sup>, V. M. Tkachuk<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Lviv Polytechnic National University,

<sup>2</sup>Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv

We study a charged generalized Dirac oscillator in a scalar potential. Conditions for an exact solution of the eigenvalue problem are found. The eigenvalue equation for a generalized Dirac oscillator is reduced to supersymmetric quantum mechanics (SUSY QM). Using SUSY QM the eigenvalue problem can be solved exactly. Examples of eigenvalue problems are presented.

## ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА ІЗ СИНГУЛЯРНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ ТА ТОЧКОВІ ВЗАЄМОДІЇ

*Ю. Д. Головатий*

Кафедра диференціальних рівнянь,

Львівський національний університет імені Івана Франка

Оператори Шредингера з потенціалами, які є узагальненими функціями з точковими носіями, активно вивчають від середини минулого століття. Такі оператори часто називають операторами з точковими взаємодіями. Моделі, оперті на концепцію точкових взаємодій, виявилися досить ефективними, бо адекватно описують квантовомеханічні процеси й одночасно дозволяють суттєво спростити обчислення. Проте не кожне диференціальне рівняння з узагальненими функціями в коефіцієнтах має математичний сенс. Першопричиною цього є проблема множення узагальнених функцій. Наприклад, рівняння  $-y'' + (\alpha\delta'(x) + \beta\delta(x))y = k^2y$ , у якому стала  $\alpha$  відмінна від нуля, не має жодного розв'язку на дійсній осі (у сенсі узагальнених функцій), окрім нульового. Тут  $\delta$  – функція Дірака. У доповіді йтиметься про дві сім'ї операторів Шредингера з локальними сингулярними збуреннями, кожна з яких пов'язана з регуляризациєю згаданого вище рівняння. Ми досліджували рівномірну резольвентну збіжність двопараметричної сім'ї операторів Шредингера, коли додатні параметри  $\varepsilon$  та  $\nu$  прямують до нуля,

$$S_{\varepsilon,\nu} = -\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon^{-2}\Phi(\varepsilon^{-1}x) + \nu^{-1}\Psi(\nu^{-1}x), \quad \text{dom } S_{\varepsilon,\nu} = W_2^2(\mathbb{R}),$$

де  $\Phi$  і  $\Psi$  — дійсні інтегровні функції з компактними носіями. Також вивчали питання збіжності сім'ї операторів Шредингера зі збуреннями рангу 2:

$$T_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon^{-3}Q_\varepsilon + \varepsilon^{-1}q(\varepsilon^{-1}x), \quad \text{dom } T_\varepsilon = W_2^2(\mathbb{R}),$$

де оператор  $Q_\varepsilon$  діє в просторі  $L_2(\mathbb{R})$  і має вигляд

$$(Q_\varepsilon v)(x) = f(\varepsilon^{-1}x) \int_{\mathbb{R}} g(\varepsilon^{-1}t)v(t) dt + g(\varepsilon^{-1}x) \int_{\mathbb{R}} f(\varepsilon^{-1}t)v(t) dt.$$

Функції  $f$  та  $g$  належать  $L_2(\mathbb{R})$ , мають компактні носії та є лінійно незалежними.

Аналіз операторів  $S_{\varepsilon,\nu}$  та  $T_\varepsilon$  дає декілька якісно різних випадків граничної поведінки залежно від властивостей функцій  $\Psi$ ,  $\Phi$ ,  $f$ ,  $g$  та  $q$ , що формують збурення.

- [1] Yu. Golovaty, R. Hryniv, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 155204 (2010).
- [2] Yu. Golovaty, Methods Funct. Anal. Topology **18**, No 3, 243 (2012).
- [3] Yu. Golovaty, ІЕОТ **75**, Iss. 3, 341 (2013).
- [4] Yu. Golovaty, R. Hryniv, Proc. R. Soc. Edinb. A. **143**, 791 (2013).