JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 23, No. 3 (2019) 3709(6 p.)

МЕТОД ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ІНТЕҐРУВАННЯ В ТЕОРІЇ ДВОЩІЛИННОЇ НАДПРОВІДНОСТІ

А. М. Шутовський, $\boxed{\text{А. В. Свідзинський}}$, В. Є. Сахнюк, О. Ю. Пастух
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки,
проспект Волі, 13, Луцьк, 43000, Україна

(Отримано 30 жовтня 2018 р.; в остаточному вигляді — 27 травня 2019 р.)

Застосовано метод функціонального інтеґрування в теорії двощілинної надпровідності у вигляді способу параметризації складних операторних функцій. Побудоване зображення статистичної суми двощілинного надпровідника у формі функціонального інтеґрала відкриває широкі можливості для певної наближеної схеми. Сформульовано теорію середнього поля, яка допомагає полегшити обчислення термодинамічних величин.

Ключові слова: двощілинний надпровідник, упорядкована експонента, статистична сума, термодинамічний потенціал, середнє поле.

DOI: https://doi.org/10.30970/jps.23.3709

PACS number(s): 74.70.Ad, 03.65.Db

I. ВСТУП

Побудувавши зображення ядра еволюційного оператора у формі функціонального інтеґрала [1–4], Річард Файнман дав, по суті, нове математичне формулювання квантової механіки. Привабливою рисою отриманої функціональної квадратури було те, що вона виявилася точним розв'язком рівняння Шредингера. Метод функціонального інтеґрування швидко набув популярності серед широкого загалу фізиків-теоретиків, які усвідомили, що мають справу з дуже потужним математичним інструментом. Не встоявши перед непереборною спокусою поширювати серйозні речі на інші розділи теоретичної фізики, наполегливі теоретики почали застосовувати функціональне інтеґрування у квантовій теорії поля і статистичній фізиці [5]. З розвитком мікроскопічної теорії надпровідності виникла потреба в побудові функціональних інтеґралів і в цій галузі знань. У роботах [6–8] побудовано зображення статистичної суми однощілинного надпровідника у формі функціонального інтеґрала. Функціональний інтеґрал у теорії надпровідності був, фактично, способом параметризації складних операторних функцій. Це допомогло зобразити експоненту від чотириферміонного оператора через експоненту від білінійної операторної форми, з якою значно легше працювати. Сучасний огляд застосування методу функціонального інтеґрування в різних напрямках фізичних досліджень можна знайти в [9]. У цій роботі поставлено за мету поширити метод функціонального інтеґрування на двощілиннний надпровідник з двома параметрами впорядкування [10, 11] і подати його статистичну суму у формі функціонального інтеґрала. Початком активних досліджень таких надпровідників стало відкриття двох енерґетичних щілин у бінарній сполуці MgB_2 [12] з критичною температурою $T_c = 39$ K, яка є найвищою серед надпровідників з фононним механізмом спарювання електронів. Дослідженню властивостей цієї сполуки присвячені численні праці [13–20]. Фактично навколо цієї сполуки й формується розуміння двощілинної надпровідності. Однак після відкриття надпровідності в надпровідниках на основі заліза [21] акцент дещо змістився в дослідженнях цих нових матеріалів, які сформували один з найпріорітетніших напрямів у фізиці твердого тіла [22]. Надпровідники на основі заліза є дво- або навіть багатозонними надпровідниками, властивості яких у деяких аспектах суттєво відрізняються від MgB_2, що є наслідком відмінності в поверхнях Фермі та структурах енерґетичних щілин. Існують й інші матеріали, дослідження яких приводять до висновку про наявність двох і більше енерґетичних щілин. Це добре відомі надпровідники $NbSe_2$, NbS_2, купрати, борокарбіти та ін., докладніший опис цього питання подано в огляді [23].

Для опису властивостей двозонних надпровідників застосовують різні моделі. Найперше термодинамічні та транспортні властивості двозонних надпровідників описано на основі теорії БКШ [14–16]. Ефективною виявилась сеперабельна модель [24], яку можна розглядати як анізотропну однозонну модель або двозонну модель з двома сферичними поверхнями Фермі. Анізотропні ефекти в однозонних матеріалах та ефекти в матеріалах з двома енерґетичними щілинами приводять до однакової незвичайної поведінки в цій моделі. Поблизу критичної температури двозонні надпровідники досліджують на основі теорії Ґінзбурґа–Ландау [25]. Складніші випадки, включаючи наявність магнітного поля чи несферичні поверхні Фермі, можуть бути досліджені за допомогою квазікласичного спрощення функцій Ґріна, тобто знаходженням розв'язку рівняння Айленберґера [26], а за наявності немагнітних домішок високої концентрації — рівняння Узаделя [27]. Колективні збудження, пов'язані з флуктуаціями відносної фази двох конденсатів, у двозонному надпровіднику досліджували в [28], використовуючи наближення ефективної дії.

II. СТАТИСТИЧНА СУМА ДВОЩІЛИННОГО НАДПРОВІДНИКА

Гамільтоніан розгляданої системи можна записати в такому вигляді:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}. \tag{1}$$

Перший доданок правої частини формули (1) описує систему вільних електронів

$$\hat{H}_0 = \sum_{l,\sigma} \int d\mathbf{r}\, \hat{\psi}^+_{l,\sigma}(\mathbf{r})\, \hat{\varepsilon}_l(\hat{\mathbf{p}})\, \hat{\psi}_{l,\sigma}(\mathbf{r}). \tag{2}$$

У формулі (2) наявний так званий індекс зони l, який може набувати значень 1 та 2, бо надпровідність є двощілинною. Оператор

$$\hat{\varepsilon}_l(\hat{\mathbf{p}}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_l} - \mu$$

містить ефективні маси m_l та хімічний потенціал μ.

Другий доданок правої частини формули (1) описує ефективне притягання між електронами, внаслідок чого оператор $\hat{H}_{\text{int}}$ повинен мати таку математичну структуру:

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\sum_{l} \int d\mathbf{r}\, \hat{A}^+_l(\mathbf{r})\, \hat{A}_l(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Щоб забезпечити взаємодію між зонами, перепишімо оператор (3), використовуючи позначення

$$\hat{A}_l(\mathbf{r}) = \sum_{l'} a_{l,l'} \hat{M}_{l'}(\mathbf{r}). \tag{4}$$

Вважаючи сталі $a_{l,l'}$ дійсними, можна одразу записати, що

$$\hat{A}^+_l(\mathbf{r}) = \sum_{l'} a_{l,l'} \hat{M}^+_{l'}(\mathbf{r}). \tag{5}$$

Підставляючи оператори (4) та (5) у формулу (3), отримуємо такий вираз:

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\sum_{l,l'} g_{l,l'} \int d\mathbf{r}\, \hat{M}^+_l(\mathbf{r})\, \hat{M}_{l'}(\mathbf{r}). \tag{6}$$

У формулі (6)

$$g_{l,l'} = \sum_{l''} a_{l'',l} a_{l'',l'}. \tag{7}$$

З формули (7) одразу видно, що $g_{l,l'} = g_{l',l}$. Така властивість є ознакою рівноправності обох зон. Сталі $g_{l,l'}$ називають константами зв'язку. Якщо

$$\hat{M}_l(\mathbf{r}) = \hat{\psi}_{l,\downarrow}(\mathbf{r})\, \hat{\psi}_{l,\uparrow}(\mathbf{r}),$$

то можна отримати оператор ефективної взаємодії [29]

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\sum_{l,l'} g_{l,l'} \int d\mathbf{r}\, \hat{\psi}^+_{l,\uparrow}(\mathbf{r})\, \hat{\psi}^+_{l,\downarrow}(\mathbf{r})\, \hat{\psi}_{l',\downarrow}(\mathbf{r})\, \hat{\psi}_{l',\uparrow}(\mathbf{r}). \tag{8}$$

Статистичну суму двощілинного надпровідника обчислюють за такою формулою:

$$Z = \mathrm{Sp}\left(e^{-\beta \hat{H}_0} T_\tau \exp\left(-\int_0^\beta \hat{H}_{\text{int}}(\tau)\, d\tau \right) \right). \tag{9}$$

Означення (9) містить так звану впорядковану експоненту

$$T_\tau \exp\left(-\int_0^\beta \hat{H}_{\text{int}}(\tau)\, d\tau \right) = \lim_{n\to+\infty} \left[e^{-\hat{H}_{\text{int}}(\tau_n)\Delta\tau} e^{-\hat{H}_{\text{int}}(\tau_{n-1})\Delta\tau} \cdot \ldots \cdot e^{-\hat{H}_{\text{int}}(\tau_k)\Delta\tau} \cdot \ldots \cdot e^{-\hat{H}_{\text{int}}(\tau_2)\Delta\tau} e^{-\hat{H}_{\text{int}}(\tau_1)\Delta\tau} \right]. \tag{10}$$

У формулі (10) використано такі позначення: $\tau_k = k\frac{\beta}{n}$ і $\Delta\tau = \frac{\beta}{n}$. Формули (9) і (10) містять операторну функцію

$$\hat{H}_{\text{int}}(\tau) = e^{\tau \hat{H}_0} \hat{H}_{\text{int}} e^{-\tau \hat{H}_0}. \tag{11}$$

Змінна величина τ називається уявним часом. Залежність від уявного часу всіх інших операторів у цій роботі аналогічна до залежності (11). Для побудови методу функціонального інтеґрування доцільно перейти до імпульсного зображення. Отже, можна записати, що

$$\begin{aligned} \hat{A}_l(\mathbf{r},\tau) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{A}_l(\mathbf{p},\tau)\, e^{i\mathbf{pr}}, \\ \hat{A}^+_l(\mathbf{r},\tau) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{A}^+_l(\mathbf{p},\tau)\, e^{-i\mathbf{pr}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Тоді виходить, що

$$\hat{H}_{\text{int}}(\tau) = -\sum_{l,\mathbf{p}} \hat{A}^+_l(\mathbf{p},\tau)\, \hat{A}_l(\mathbf{p},\tau). \tag{13}$$

Беручи до уваги (13), стає одразу зрозуміло, що потрібно розглядати експоненти виду

$$e^{-\hat{H}_{\rm int}(\tau_k)\Delta\tau} = \exp\left(\Delta\tau \sum_{l,\mathbf{p}} \hat{A}_l^+(\mathbf{p},\tau_k)\,\hat{A}_l(\mathbf{p},\tau_k)\right). \tag{14}$$

Функціональний інтеґрал будуватимемо на основі такої параметризації:

$$e^{\hat{A}\hat{B}} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\eta\, e^{-\xi^2-\eta^2} e^{(\xi+i\eta)\hat{A}} e^{(\xi-i\eta)\hat{B}}}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\eta\, e^{-\xi^2-\eta^2}} + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\left(\hat{A}\hat{B}\right)^m - \left(\hat{A}\right)^m\left(\hat{B}\right)^m}{m!}. \tag{15}$$

Пристосовуючи параметризацію (15) до цієї задачі, потрібно покласти

$$\hat{A} = \sqrt{\Delta\tau}\hat{A}_l^+(\mathbf{p},\tau_k)\,, \quad \hat{B} = \sqrt{\Delta\tau}\hat{A}_l(\mathbf{p},\tau_k)\,.$$

Також доцільно буде виконати заміну змінних інтеґрування в (15) за такими формулами:

$$\xi + i\eta = \sqrt{\Delta\tau}\zeta_l(\mathbf{p},\tau_k)\,, \quad \xi - i\eta = \sqrt{\Delta\tau}\zeta_l^*(\mathbf{p},\tau_k)\,.$$

У такому разі відразу стає зрозуміло, що комутатор $\left[(\xi+i\eta)\hat{A},(\xi-i\eta)\hat{B}\right]_-$ пропорційний нескінченно малій величині $(\Delta\tau)^2$. Тоді можна вважати, що

$$e^{(\xi+i\eta)\hat{A}} e^{(\xi-i\eta)\hat{B}} \cong e^{(\xi+i\eta)\hat{A}+(\xi-i\eta)\hat{B}}.$$

Доданок $\sum\limits_{m=2}^{+\infty}\frac{(\hat{A}\hat{B})^m-(\hat{A})^m(\hat{B})^m}{m!}$ міститиме доданки, які пропорційні $(\Delta\tau)^2$, $(\Delta\tau)^3$ і так далі. Це означає, що цей доданок можна відкинути. Наведені вище міркування дозволяють суттєво перетворити праву частину рівняння (10), унаслідок чого можна отримати такий результат:

$$T_\tau \exp\left(-\int\limits_0^\beta \hat{H}_{\rm int}(\tau)\,d\tau\right) = \frac{\int D\zeta_1 \int D\zeta_1^* \int D\zeta_2 \int D\zeta_2^* \exp\left(-\int\limits_0^\beta E(\tau)\,d\tau\right) T_\tau \exp\left(-\int\limits_0^\beta \hat{H}_Q(\tau)\,d\tau\right)}{\int D\zeta_1 \int D\zeta_1^* \int D\zeta_2 \int D\zeta_2^* \exp\left(-\int\limits_0^\beta E(\tau)\,d\tau\right)}. \tag{16}$$

Функціональний інтеґрал (16) містить такі позначення:

$$\begin{aligned}
&E(\tau) = \sum_{l,\mathbf{p}} |\zeta_l(\mathbf{p},\tau)|^2,\\
&\hat{H}_Q(\tau) = -\sum_{l,\mathbf{p}}\Big[\zeta_l(\mathbf{p},\tau)\,\hat{A}_l^+(\mathbf{p},\tau) + \zeta_l^*(\mathbf{p},\tau)\,\hat{A}_l(\mathbf{p},\tau)\Big].\\
&\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n\prod_{\mathbf{p}} d\zeta_l(\mathbf{p},\tau_k) \equiv D\zeta_l,\\
&\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n\prod_{\mathbf{p}} d\zeta_l^*(\mathbf{p},\tau_k) \equiv D\zeta_l^*.
\end{aligned} \tag{17}$$

Беручи до уваги параметризацію впорядкованої експоненти (16), формулу (9) можна переписати в такому вигляді:

$$Z = \frac{\int D\zeta_1 \int D\zeta_1^* \int D\zeta_2 \int D\zeta_2^* \exp\left(-\int\limits_0^\beta E(\tau)\,d\tau\right) \mathrm{Sp}\left(e^{-\beta\hat{H}_0}\hat{S}_Q(\beta)\right)}{\int D\zeta_1 \int D\zeta_1^* \int D\zeta_2 \int D\zeta_2^* \exp\left(-\int\limits_0^\beta E(\tau)\,d\tau\right)}. \tag{18}$$

У формулі (18) фігурує матриця $\hat{S}_Q(\beta) = T_\tau \exp\left(-\int\limits_0^\beta \hat{H}_Q(\tau)\, d\tau\right)$. З формули (18) видно, що задача про обчислення статистичної суми двощілинного надпровідника розбивається на дві послідовні задачі:

1) спочатку потрібно обчислити функціонал $\mathrm{Sp}\left(e^{-\beta \hat{H}_0} \hat{S}_Q(\beta)\right)$, який можна трактувати як статистичну суму системи вільних електронів, що перебувають у полі комплексних джерел електронних пар $\zeta_l(\mathbf{p}, \tau)$;

2) обчислений у першому пункті функціонал потрібно усереднити по простору джерел електронних пар з Ґауссівським розподілом $\exp\left(-\sum\limits_{l,\mathbf{p}} \int\limits_0^\beta d\tau\, |\zeta_l(\mathbf{p}, \tau)|^2\right)$. У мікроскопічній теорії надпровідності прийнято запроваджувати функціонал

$$\Omega_{\mathrm{B}}[\zeta_l, \zeta_l^*] = -\frac{1}{\beta} \ln \mathrm{Sp}\left(e^{-\beta \hat{H}_0} T_\tau \exp\left(-\int\limits_0^\beta \hat{H}_Q(\tau)\, d\tau\right)\right). \tag{19}$$

Індекс B поставлено на честь Миколи Боголюбова, який уперше ввів його. Доцільно буде також запровадити функціонал

$$\begin{aligned}\Omega[\zeta_l, \zeta_l^*] &= \frac{1}{\beta} \sum_{l,\mathbf{p}} \int\limits_0^\beta d\tau\, |\zeta_l(\mathbf{p}, \tau)|^2 \\ &- \frac{1}{\beta} \ln \mathrm{Sp}\left(e^{-\beta \hat{H}_0} T_\tau \exp\left(\sum_{l,\mathbf{p}} \int\limits_0^\beta d\tau \left[\zeta_l(\mathbf{p}, \tau) \hat{A}_l^+(\mathbf{p}, \tau) + \zeta_l^*(\mathbf{p}, \tau) \hat{A}_l(\mathbf{p}, \tau)\right]\right)\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Тоді формула (18) матиме такий вигляд:

$$Z = \frac{\int D\zeta_1 \int D\zeta_1^* \int D\zeta_2 \int D\zeta_2^* \exp\left(-\beta \Omega[\zeta_l, \zeta_l^*]\right)}{\int D\zeta_1 \int D\zeta_1^* \int D\zeta_2 \int D\zeta_2^* \exp\left(-\int\limits_0^\beta E(\tau)\, d\tau\right)}. \tag{21}$$

III. НАБЛИЖЕННЯ СЕРЕДНЬОГО ПОЛЯ

Розглядаючи чисельник формули (21), можна легко зробити висновок про те, що найбільший внесок в інтеґрал даватимуть саме ті функціональні змінні, які відповідають мінімумові функціонала (20). Це означає, що його потрібно дослідити на мінімум. Але спочатку варто виконати перетворення Фур'є за такими формулами:

$$\begin{aligned}\zeta_l(\mathbf{r}, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \zeta_l(\mathbf{p}, \tau)\, e^{i\mathbf{pr}}, \\ \zeta_l^*(\mathbf{r}, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \zeta_l^*(\mathbf{p}, \tau)\, e^{-i\mathbf{pr}}.\end{aligned} \tag{22}$$

Використовуючи (12) і (22), функції (17) можна переписати так:

$$E(\tau) = \sum_l \int d\mathbf{r}\, |\zeta_l(\mathbf{r}, \tau)|^2, \hat{H}_Q(\tau) = -\sum_l \int d\mathbf{r} \left[\zeta_l(\mathbf{r}, \tau) \hat{A}_l^+(\mathbf{r}, \tau) + \zeta_l^*(\mathbf{r}, \tau) \hat{A}_l(\mathbf{r}, \tau)\right]. \tag{23}$$

Тоді функціонал (20) матиме такий вигляд:

$$\Omega[\zeta_l, \zeta_l^*] = \frac{1}{\beta} \sum_l \int\limits_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r}\, |\zeta_l(\mathbf{r}, \tau)|^2 - \frac{1}{\beta} \ln \mathrm{Sp}\left(e^{-\beta \hat{H}_0} T_\tau \exp\left(\sum_l \int\limits_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r} \left[\zeta_l(\mathbf{r}, \tau) \hat{A}_l^+(\mathbf{r}, \tau) + e.c.\right]\right)\right). \tag{24}$$

Для дослідження функціонала (24) зручно запроваджувати функцію

$$\zeta_l(\mathbf{r}, \tau; \lambda) = \sum_{l'} a_{l,l'} \Delta_{l'}(\mathbf{r}, \tau) + \lambda \left[\zeta_l(\mathbf{r}, \tau) - \sum_{l'} a_{l,l'} \Delta_{l'}(\mathbf{r}, \tau)\right]. \tag{25}$$

Функція (25) містить параметр λ, який можна вважати дійсним. До того ж запроваджено функції $\Delta_l(\mathbf{r},\tau)$, яких раніше не було. Їх можна дібрати так, щоб вони робили функціонал (24) мінімальним. Тобто це і є шукані функціональні змінні. Для дальших обчислень варто розглянути допоміжну функцію

$$\Omega(\lambda)=\frac{1}{\beta}\sum_l\int\limits_0^\beta d\tau\int d\mathbf{r}\left|\zeta_l(\mathbf{r},\tau;\lambda)\right|^2-\frac{1}{\beta}\ln\mathrm{Sp}\left(e^{-\beta\hat{H}_0}T_\tau\exp\left(\sum_l\int\limits_0^\beta d\tau\int d\mathbf{r}\left[\zeta_l(\mathbf{r},\tau;\lambda)\hat{A}_l^+(\mathbf{r},\tau)+e.c.\right]\right)\right). \quad (26)$$

Використовуючи функцію (26), функціонал (24) можна подати у вигляді розкладу

$$\Omega\left[\zeta_l,\zeta_l^*\right]=\Omega(0)+\lim_{\lambda\to0}\frac{d\Omega(\lambda)}{d\lambda}+\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to0}\frac{d^2\Omega(\lambda)}{d\lambda^2}+... \quad (27)$$

У розкладі (27)

$$\Omega(0)=\frac{1}{\beta}\sum_{l,l'}g_{l,l'}\int\limits_0^\beta d\tau\int d\mathbf{r}\Delta_l^*(\mathbf{r},\tau)\Delta_{l'}(\mathbf{r},\tau)$$
$$-\frac{1}{\beta}\ln\mathrm{Sp}\left(e^{-\beta\hat{H}_0}T_\tau\exp\left(\sum_{l,l'}g_{l,l'}\int\limits_0^\beta d\tau\int d\mathbf{r}\Delta_l^*(\mathbf{r},\tau)\hat{M}_{l'}(\mathbf{r},\tau)+e.c.\right)\right). \quad (28)$$

Функції $\Delta_l(\mathbf{r},\tau)$ мають бути такими, щоб виконувалася умова

$$\lim_{\lambda\to0}\frac{d\Omega(\lambda)}{d\lambda}=0. \quad (29)$$

Умова (29) виконуватиметься тоді і тільки тоді, коли функції $\Delta_l(\mathbf{r},\tau)$ будуть розв'язками таких інтеґральних рівнянь:

$$\Delta_l^*(\mathbf{r},\tau)=\frac{\mathrm{Sp}\left(e^{-\beta\hat{H}_0}\hat{M}_l^+(\mathbf{r},\tau)T_\tau\exp\left(\sum\limits_{l,l'}g_{l,l'}\int\limits_0^\beta d\tau\int d\mathbf{r}\Delta_l^*(\mathbf{r},\tau)\hat{M}_{l'}(\mathbf{r},\tau)+e.c.\right)\right)}{\mathrm{Sp}\left(e^{-\beta\hat{H}_0}T_\tau\exp\left(\sum\limits_{l,l'}g_{l,l'}\int\limits_0^\beta d\tau\int d\mathbf{r}\Delta_l^*(\mathbf{r},\tau)\hat{M}_{l'}(\mathbf{r},\tau)+e.c.\right)\right)}. \quad (30)$$

У правій частині рівняння (30) маємо, фактично, усереднення. Тому цілком логічно називати функції $\Delta_l(\mathbf{r},\tau)$ середнім полем. А величину (28) треба трактувати як термодинамічний потенціал у наближенні середнього поля.

IV. ВИСНОВКИ

Застосовуючи метод функціонального інтеґрування в теорії двощілинної надпровідності, ми побачили, що задача про обчислення статистичної суми двощілинного надпровідника, фактично, розбивається на дві послідовні задачі: задачу про обчислення статистичної суми системи вільних електронів, які перебувають у полі комплексних джерел електронних пар, та задачу про усереднення отриманого результату в просторі комплексних джерел електронних пар з Ґаусcівським розподілом. Ця обставина дозволила застосувати так зване наближення середнього поля, яке значно спрощує всю дальшу побудову теорії двощілинної надпровідності. Наближення середнього поля в застосуванні до надпровідності виявилося доволі ефективним. Однак, як відомо з опису одніщілинних надпровідників, для уточнення результатів, одержаних в рамках наближення середнього поля, виникає потреба виходу за межі цього наближення. На нашу думку, найбільш адекватним математичним апаратом, що дозволяє уточнити результати мікроскопічної теорії надпровідності і врахувати флуктуаційні ефекти, є метод функціонального інтеґрування, описаний у нашій роботі для двощілинних надпровідників. Врахування флуктуаційних ефектів в однощілинних надпровідниках та відповідний аналіз докладно викладено в монографії [8]. Предметом наступних досліджень буде розкриття фізичного змісту середнього поля. Для виконання цього завдання буде побудовано формалізм функцій Ґріна, які значно полегшують обчислення всіх необхідних фізичних величин.

[1] R. P. Feynman, *Feynman's Thesis – A New Approach to Quantum Theory*, edited by L. M. Brown (World Scientific, 2005 [1942/1948]).
[2] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948); `https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367`.
[3] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York,1965).
[4] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, D. F. Styer, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (Dover Publications, Mineola, NY, 2010).
[5] V. Popov, *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics* (Springer, 1983).
[6] А. В. Свидзинский, *Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости* (Наука, Москва, 1982).
[7] А. В. Свідзинський, *Математичні методи теоретичної фізики. У 2-х т.* (Ін-т теорет. фізики ім. М. М. Боголюбова, Київ, 2009).
[8] А. В. Свідзинський, *Мікроскопічна теорія надпровідності: монографія* (ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, 2011).
[9] Ю. Ю. Лобанов, Вестн. Рос. ун-ту дружбы народов. Сер: мат., информат., физ. **4**, 75 (2008).
[10] V. A. Moskalenko, Fiz. Met. Metallogr. **8**, 503 (1959).
[11] H. Suhl, B. T. Matthias, L. R. Walker, Phys. Rev. Lett. **3**, 552 (1959); `https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.3.552`.
[12] J. Nagamatsu *et al.*, Nature **410**, 63 (2001); `https://doi.org/10.1038/35065039`.
[13] A. A. Golubov *et al.*, J. Phys.: Condens. Matter **14**, 1353 (2002); `https://doi.org/10.1088/0953-8984/14/6/320`.
[14] A. Brinkman *et al.*, Phys. Rev. B **65**, 180517 (2002); `https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.180517`.
[15] I. I. Mazin*et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 107002 (2002); `https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.107002`.
[16] A. Nakai, M. Ichioka, K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn **71**, 23 (2002); `https://doi.org/10.1143/jpsj.71.23`.
[17] P. Miranovic, K. Machida, V. G. Kogan, J. Phys. Soc. Jpn **72**, 221 (2003); `https://doi.org/10.1143/JPSJ.72.221`.
[18] T. Dahm, N. Schopohl, Phys. Rev. Lett. **91**, 017001 (2003);
`https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.017001`;
T. Dahm, S. Graser, N. Schopohl, Physica C **408–410**, 336 (2004); `https://doi.org/10.1016/j.physc.2004.02.152`.
[19] A. Gurevich, Phys. Rev. B **67**, 184515 (2003); `https://doi.org/10.1103/PhysRevB.67.184515`.
[20] A. A. Golubov, A. E. Koshelev, Phys. Rev. Lett. **92**, 107008 (2004);
`https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.107008`.
[21] Y. Kamihara, *et al.*, J. Am. Chem. Soc. **130**, 3296 (2008); `https://doi.org/10.1021/ja800073m`.
[22] A. A. Kordyuk, Low Temp. Phys. **38**, 1119 (2012); `https://doi.org/10.1063/1.4752092`.
[23] M. Zehetmayer, Supercond. Sci. Technol. **26**, 043001 (2013);
`https://doi.org/10.1088/0953-2048/26/4/043001`.
[24] M. Zehetmayer, H. W. Weber, E. Schachinger, J. Low Temp. Phys. **133**, 407 (2003); `https://doi.org/10.1023/A:102620402`.
[25] I. N. Askerzade, Phys.-Uspekhi **49**, 1003 (2006); `https://doi.org/10.1070/PU2006v049n10ABEH006055`.
[26] Y Nagai, H. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn **85**, 074707 (2016); `https://doi.org/10.7566/JPSJ.85.074707`.
[27] K. D. Usadel, Phys. Rev. Lett. **25**, 507 (1970); `https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.25.507`.
[28] S. Sharapov, V.Gusynin, H. Beck, Eur. Phys. J. B **30**, 45 (2002); `https://doi.org/10.1140/epjb/e2002-00356-9`.
[29] M. E. Zhitomirsky, V.-H. Dao, Phys. Rev. B **69**, 054508 (2004); `https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.054508`.

THE FUNCTIONAL INTEGRATION METHOD IN THE TWO BAND SUPERCONDUCTIVITY THEORY

A. Shutovskyi, A. Svidzinskyi, V. Sakhnyuk, O. Pastukh

Lesya Ukrainka Eastern European National University, 13, Voli Ave., Lutsk, UA–43000, Ukraine

Applying the thermodynamic perturbation theory, an evolution operator of a superconducting system can mathematically be expressed as a product of two multipliers. The first multiplier can physically be interpreted as an evolution operator describing a system of free electrons. The second multiplier is the so called ordered exponential containing the operator of the pairing interaction. In the theory of superconductivity, an ordered exponential is usually considered as a product of exponentials. This fact helps to consider a functional integral as a way to parameterize complex operator functions. To represent an ordered exponential in the form of a functional integral, the generalized Poisson parametrization was used. By substituting the obtained parametrization of an ordered exponential into a definition of the partition function, the partition function representation of a superconductor with two energy gaps was successfully constructed. During the construction of the mentioned representation, the operators in the momentum representation were taken. To calculate the partition function of a two band superconductor, the mean field theory was formulated. The thermodynamic potential in the mean field approximation was also introduced. The mean field is a name of two complex functions dependent on the so called band indices, spatial coordinates and the so called imaginary time. Each of the mentioned complex functions is also introduced as a solution of an integral equation.