


ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ В ДЕЯКИХ СТОХАСТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ФІНАНСОВОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

В. С. Янішевський 

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. Степана Бандери 12, Львів, 79013, Україна

(Отримано 07 жовтня 2020 р.; в остаточному вигляді — 18 лютого 2021 р.; прийнято до друку — 22 лютого 2021 р.;
опубліковано онлайн — 29 березня 2021 р.)

Метод функціонального інтегрування застосовано до вивчення часової залежності відсоткової ставки в стохастичних моделях Мертона і Васічека. Розглянуто спосіб обмеження області зміни стохастичної змінної в моделях із метою одержання додатних значень часової залежності відсоткової ставки. Для цього у функціональних інтегралах область інтегрування обмежується умовою $\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau > 0$. Знайдено вирази для часової залежності відсоткових ставок у моделях, де відсоткова ставка набуває лише додатних значень.

Ключові слова: стохастична модель, модель Мертона, модель Васічека, відсоткова ставка, функціональний інтеграл.

DOI: <https://doi.org/10.30970/jps.25.2801>

ВСТУП

Модель броунівського руху бере свій початок з опису динаміки руху частинок у рідинах, фізичну теорію якого сформулював Айнштейн. По суті, таку саму модель застосував Башельє для опису динаміки цін акцій та інших фінансових показників на ринку цінних паперів. На основі моделі броунівського руху Башельє вивів формулу для ціни опціону. Відтоді стохастичні моделі застосовують у моделюванні стохастичної динаміки волатильності, відсоткових ставок, дохідності облігацій та інших задач фінансової інженерії [1, 2].

Водночас у багатьох стохастичних фінансових моделях виникає неузгодженість між областю зміни стохастичної змінної та відповідного фінансового показника. Цей недолік характерний для моделі Башельє, де ціна акції може набувати від'ємних значень, що не відповідає економічному змісту. Подібна ситуація також наявна у стохастичному моделюванні відсоткових ставок [1–3]. Зокрема, у відомих моделях Мертона (8) і Васічека (9) відсоткова ставка може набувати від'ємних значень. У низці моделей указаний недолік усувають ускладненням моделі Васічека, вводячи множники для стохастичного складника. Так, у моделі Кокса–Інгерсолла–Росса волатильність містить $\sqrt{r(t)}$, що унеможливорює від'ємні розв'язки. У моделі Огдена волатильність пропорційна $r(t)$, відповідно модель стає логнормальною (або моделлю геометричного броунівського руху). Також розглядають модель із волатильністю пропорційною $r(t)^\gamma$ ($\gamma > 0$) і ряд інших [2, 3].

Інший підхід пов'язаний з уведенням певних граничних умов, що обмежують область значень стохастичної змінної [4]. Доволі ефективним методом розв'язання подібних задач є метод функціонального інтегрування [5–7]. Його застосування у фінансових моделях ґрунтується на відомих аналогіях із квантовою механікою та статистичною фізикою. По-

дібно, як пропагатор рівняння Шрединґера, так і густину умовної ймовірності рівняння Фоккера–Планка подано у вигляді функціонального інтеграла (формула Фейнмана–Каца) [8–10]. В еквівалентному підході функціональний інтеграл для заданого стохастичного рівняння будується на основі міри Вінера заміною змінних [6, 11].

У цій праці проаналізовано моделі Мертона й Васічека в методі функціонального інтеграла. Отримано часові залежності відсоткових ставок розв'язанням рівняння часової структури [1]. Для усунення недоліків моделей, пов'язаних із від'ємними значеннями відсоткових ставок, використано обмеження області інтегрування у функціональному інтегралі.

I. ПОВУДОВА ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ІНТЕГРАЛА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ

Як відомо, дисконтування цінового активу $V(t)$ в момент часу $t > t_0$ (у моделі неперервного нарахування відсотків) відбувається за відсотковою ставкою r [1, 2]

$$V_0 = V(t)e^{-r(t-t_0)}. \quad (1)$$

Тут відсоткова ставка r вважається сталою й додатною. Динаміку відсоткової ставки загалом описують за допомогою стохастичного рівняння

$$dr = \mu(r)dt + \sigma(r)dw, \quad (2)$$

де величина dw позначає вінерівський процес [1, 2]. Випадкова величина dw розподілена за нормальним законом із параметрами $\langle dw \rangle = 0$, $\langle (dw)^2 \rangle = dt$. Величини $\mu(r)$, $\sigma(r)$ визначають відповідно дрейф і волатильність процесу, які зазвичай є функціями стохастичної змінної. У цьому разі формула (1) видозмінюється, її порібно усереднити за реалізаціями стохастичною процесу

$$V_0 = V(t) \langle e^{-\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau} \rangle_w, \quad (3)$$



де $\langle \dots \rangle_w$ позначає вказане усереднення. Дисконтний множник в (3) визначає часову залежність відсоткової ставки $\bar{r}(t)$ [1, 2]:

$$P(t, t_0) = \langle e^{-\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau} \rangle_w, \quad \bar{r}(t) = -\frac{\ln P(t, t_0)}{t - t_0}. \quad (4)$$

Для визначення змісту усереднення в (3) розглянемо розбиття часового відрізка $[t_0, t]$ на інтервали за допомогою n точок t_i ($i = 1 \dots n$) і запишемо

$$\langle (\dots) \rangle_w \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\Delta w_i^2}{\Delta t_i}\right) (\dots) \prod_{i=1}^{n+1} \frac{dw_i}{\sqrt{2\pi \Delta t_i}}, \quad (5)$$

де позначено $\Delta w_i = w_i - w_{i-1}$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ($t_{n+1} = t$). Інтегрування в (5) здійснюємо за відомою мірою Вінера [6, 11]. В границі $\max(\Delta t_i) \rightarrow 0$ ($i = 1 \dots n$), $n \rightarrow \infty$ для дисконтного множника в (3) отримуємо функціональний інтеграл за мірою Вінера

$$P(t, t_0) = \int_{w_0} \mathcal{D}w(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\frac{w(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau\right) \times \exp\left(-\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau\right), \quad (6)$$

$$\mathcal{D}w(\tau) = \prod_{\tau=t_0}^t \frac{dw(\tau)}{\sqrt{2\pi d\tau}}. \quad (7)$$

Функціональний інтеграл має зміст також інтеграла за траєкторіями, де траєкторії починаються в точці (t_0, w_0) і проходять через усі можливі точки (t, w) ($w \in \mathbb{R}$, $t > t_0$).

Дальший розгляд проведемо на прикладі моделей Мертона і Васічека, які є одними з простіших і використовуються для моделювання часової динаміки відсоткових ставок [1, 2]:

$$dr = \mu dt + \sigma dw, \quad (8)$$

$$dr = \beta(\mu - r)dt + \sigma dw, \quad (9)$$

де формула (8) задає модель Мертона, а (9) — модель Васічека. Як видно модель Мертона є моделлю звичайного броунівського руху з дрейфом, а модель Васічека у фізичних задачах відома як модель Орнштейна–Уленбека.

Для розрахунку функціонального інтеграла у формулі (6) необхідно підставити розв'язки стохастичних рівнянь (8) і (9). Зокрема, для моделі Мертона знайдемо

$$r(\tau) = r_0 + \mu(\tau - t_0) + \sigma(w(\tau) - w_0), \quad \tau \in [t_0, t]. \quad (10)$$

Для моделі Васічека розв'язок такий [2]:

$$r(\tau) = r_0 e^{-\beta(\tau-t_0)} + \mu(1 - e^{-\beta(\tau-t_0)}) + \sigma \int_{t_0}^{\tau} e^{-\beta(\tau-\tau')} dw(\tau'), \quad \tau \in [t_0, t]. \quad (11)$$

Величина w_0 у виразі (10) позначає значення стохастичної змінної $w(t_0)$ у момент часу t_0 . Після підстановки розв'язків (10), (11) у формулу (6) і обчислення відповідних функціональних інтегралів отримуємо величину $P(t, t_0)$ і часові залежності відсоткових ставок (4) у вказаних моделях (додаток А).

Еквівалентний спосіб обчислення функціонального інтеграла (6) пов'язаний із заміною змінних. В інтегралі за мірою Вінера (6) від змінних $w(\tau)$ перейдемо до змінних $r(\tau)$ ($\tau \in [t_0, t]$). Таку заміну для кожної з моделей виконаємо на основі рівнянь (10) і (16). Для моделі Мертона достатньо визначити dw з рівняння (8) і підставити в підінтегральні вирази. При цьому також з'явиться множник

$$\prod_{\tau=t_0}^t \frac{1}{\sigma}. \quad (12)$$

У результаті для моделі Мертона запишемо функціональний інтеграл

$$P(r, r_0, t - t_0) = \int_{r_0}^r \mathcal{D}r \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^t \left(\frac{dr}{d\tau} - \mu\right)^2 d\tau\right) \times \exp\left(-\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau\right), \quad (13)$$

де позначено

$$\mathcal{D}r = \prod_{\tau=t_0}^t \frac{dr(\tau)}{\sqrt{2\pi\sigma^2 d\tau}}. \quad (14)$$

Дисконтний множник (6) отримуємо інтегруванням за r

$$P(r_0, t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} P(r, r_0, t - t_0) dr. \quad (15)$$

Інтегрування за кінцевою точкою r у (15) виділено окремо. У формулі (15) ми також вказали залежність $P(r_0, t - t_0)$ від початкового значення r_0 і від різниці часів $t - t_0$. Для обчислення функціонального інтеграла (13) використаємо відомі значення [6, 7] й отримуємо результат наведений в додатку А.

Виконаємо подібну заміну змінних у функціональному інтегралі для моделі Васічека. Спочатку проінтегруємо за частинами в останньому доданку розв'язку (11), одержимо:

$$r(\tau) = f_0(\tau) + \sigma w(\tau) - \sigma \beta \int_{t_0}^{\tau} e^{-\beta(\tau-\tau')} w(\tau') d\tau', \quad (16)$$

$$f_0(\tau) = \mu + (r_0 - \mu - \sigma w_0) e^{-\beta(\tau-t_0)}.$$

Розв'язок (16) має вигляд лінійного інтегрального перетворення типу Вольтера, що виражає змінні $r(\tau)$ через $w(\tau)$. Виконаємо також масштабне перетворення $w(\tau) \rightarrow w'(\tau)/\sigma$ в інтегралі, у результаті виникне множник (12). Якобіан заміни змінних в інтегралі визначається ядром інтегрального перетворення (16) [6]

$$K(\tau - \tau') = -\beta e^{-\beta(\tau-\tau')}. \quad (17)$$

Використовуючи відому формулу заміни змінних у функціональному інтегралі [6], отримуємо значення якобіана

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t K(0)d\tau\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\beta(t-t_0)\right). \quad (18)$$

У підсумку, враховуючи (12), (18) і значення dw з рівняння (9), одержимо для моделі Васічека функціональний інтеграл

$$\begin{aligned} P(r, r_0, t-t_0) &= \exp\left(\frac{1}{2}\beta(t-t_0)\right) \int_{r_0}^r \mathcal{D}r \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\int_{t_0}^t \left(\frac{dr}{d\tau} - \beta(\mu - r(\tau))\right)^2 d\tau\right) \\ &\times \exp\left(-\int_{t_0}^t r(\tau)d\tau\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Функціональний інтеграл (19) зводиться до інтегралу для осцилятора для якого відоме значення [5, 7]. Інтегруючи також за r , отримуємо величину $P(r_0, t-t_0)$, що збігається зі знайденою за першим способом (A10).

Як було зазначено, суттєвим недоліком моделей Мертон і Васічека [1] є те, що часові залежності відсоткових ставок (формули (A6) і (A11)) набувають від'ємних значень. Очевидно, це пов'язано з від'ємними значеннями $r(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$ розв'язків рівнянь (11), (10). Оскільки для додатних розв'язків $r(\tau) > 0$ середнє значення завжди менше одиниці

$$\langle e^{-\int_{t_0}^t r(\tau)d\tau} \rangle_w < 1$$

і відповідно величина $\bar{r}(t)$ (4) набуватиме додатніх значень. Для інтегральних представлень (13), (19) це еквівалентно обмеженню областями інтегрування, де змінні набувають лише додатніх значень ($r(\tau) > 0$, $\tau \in [t_0, t]$).

Зауважимо, що функціональні інтеграли (13), (19) без експонентного множника $\exp(-\int_{t_0}^t r(\tau)d\tau)$ визначають густини умовних ймовірностей в моделях Мертон і Васічека (відповідні формули наведені в додатку Б). Густина умовної ймовірності в моделі Васічека для границі $\beta \rightarrow 0$, $\beta\mu \rightarrow \mu'$ прямує до густини умовної ймовірності моделі Мертон, що впливає також із рівнянь (8) і (9). Густина умовних ймовірностей (Б2) і (Б4) задовольняють рівняння Фоккера – Планка [6, 12] для стохастичних рівнянь (8) і (9) і мають напівгрупову властивість

$$K(r, r_0, t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(r, r', t-t')K(r', r_0, t'-t_0)dr'. \quad (20)$$

Властивість (20) лежить в основі побудови функціональних інтегралів у задачах квантової та статистичної механіки [5, 6]. Враховуючи (20) середнє значення у формулах (A6) і (19) запишемо у вигляді багатократного інтеграла

тократного інтеграла

$$\begin{aligned} P(r, r_0, t-t_0) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N+1} K(r_i, r_{i-1}, \Delta t_i) \\ &\times \exp\left(-\sum_{i=1}^n r_i \Delta t_i\right) \prod_{i=1}^N dr_i. \end{aligned} \quad (21)$$

Тут використано розбиття як у формулі (5), і позначено $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, а також $t_{N+1} = t$, $r_{N+1} = r$, а $K(r_i, r_{i-1}, t_i - t_{i-1})$ – густина умовної ймовірності відповідної моделі на інтервалі $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1 \dots N+1$. Функціональні інтеграли (13), (19) отримуємо, виконуючи граничний перехід у формулі (21).

Звідси впливає спосіб введення граничних умов для обмеження допустимих значень випадкової змінної. У формулі (21) необхідно використати густину умовної ймовірності, що відповідає заданим граничним умовам. Проте вирази для густин умовних ймовірностей з граничними умовами містять зазвичай сукупність доданків, що ускладнює представлення (21) у вигляді функціонального інтеграла, який містить експоненту від деякого функціонала змінних інтегрування.

Значимо також, що в задачах квантової механіки розвинуті ефективні способи врахування граничних умов у методі функціонального інтегрування за допомогою точкових взаємодій, які виражаються через δ -функції та похідні від неї [13, 14]. У цьому разі пропагатор рівняння Шредингера, що задовольняє граничні умови, можна виразити через пропагатори без граничних умов. Зокрема для функції Гріна (фур'є-зображення пропагатора за часовою змінною) з граничними умовами побудовані формули, що пов'язують її з функцією Гріна без граничних умов. Ряд результатів, отриманих для функцій Гріна, можна перенести на стохастичні задачі, якщо замість фур'є-зображень розглядати перетворення Лапласа за часовою змінною. Зрозуміло, що для застосування цих методів повинно бути перетворення Лапласа за часовою змінною для функціональних інтегралів

$$P(r, r_0, s) = \int_0^{\infty} P(r, r_0, t)e^{-st}dt. \quad (22)$$

Проте, як видно з (A5), для моделі Мертон зазначеного перетворення Лапласа нема. Для моделі Васічека (19) перетворення Лапласа згідно з (A11) наявне не в усій області параметрів.

Ми розглянемо простий спосіб модифікації моделей (13) і (19) з метою усунення від'ємних значень $\bar{r}(t)$ (4). Для цього у функціональних інтегралах (13), (19) виділимо області інтегрування для яких виконується умова

$$\int_{t_0}^t r(\tau)d\tau > 0. \quad (23)$$

Очевидно, що в цьому разі величина $\bar{r}(t)$ для кожної з моделей набуватиме лише додатніх значень.

А. Модель Мертона з обмеженням

Побудуємо твірну функцію на основі функціонального інтеграла для моделі Мертона (13)

$$P_\alpha(r, r_0, t - t_0) = \int_{r_0}^r \mathcal{D}r \cdot \theta \left(\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \right) \times \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^t \left(\frac{dr}{d\tau} - \mu \right)^2 d\tau - \alpha \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \right). \quad (24)$$

Тут $\theta(x)$ — функція Гевісайда виділяє траєкторії, для яких інтеграл $\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau > 0$. Значення параметра

$\alpha = 0$ визначає міру виділеної області інтегрування, $\alpha = 1$ — змінене середнє значення.

Використаємо таке зображення функції Гевісайда [15]:

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\eta x}}{\eta - i\epsilon} d\eta, \quad \epsilon > 0. \quad (25)$$

Після підстановки у формулу (24) для твірної функції отримаємо

$$P_\alpha(r, r_0, t - t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\eta)}{\eta - i\epsilon} d\eta, \quad (26)$$

де

$$P(\eta) = \int_{r_0}^r \mathcal{D}r \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^t \left(\frac{dr}{d\tau} - \mu \right)^2 d\tau \right) \exp \left(-\rho \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \right), \quad \rho = \alpha - i\eta. \quad (27)$$

Функціональний інтеграл (27) обчислюємо аналогічно, як і у випадку (13), у підсумку маємо

$$P(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (r - r_0 - \mu(t-t_0))^2 \right) \times \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2} (t-t_0)^3 \rho^2 \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \rho (t-t_0) (r + r_0) \right). \quad (28)$$

Обчислення інтегралу за η виконаємо на основі відомої формули (див. [15])

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\eta)}{\eta - i\epsilon} d\eta = \frac{1}{2} P(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{P(\eta) - P(-\eta)}{\eta} d\eta. \quad (29)$$

У результаті для твірної функції (24) одержимо

$$P_\alpha(r, r_0, t - t_0) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)}} \exp \left(-\frac{(r - r_0 - \mu(t-t_0))^2}{2\sigma^2(t-t_0)} \right) \times \exp \left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{24} (t-t_0)^3 - \frac{\alpha(r+r_0)}{2} (t-t_0) \right) \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{6(r+r_0) - \alpha\sigma^2(t-t_0)^2}{2\sqrt{6}\sigma\sqrt{t-t_0}} \right) \right). \quad (30)$$

Інтегруючи (30) за r , знайдемо

$$P_\alpha(r_0, t - t_0) = \frac{1}{2} \exp \left(\frac{1}{6} \alpha^2 \sigma^2 (t-t_0)^3 - \frac{1}{2} \alpha \mu (t-t_0)^2 - \alpha r_0 (t-t_0) \right) \times \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{6r_0 + 3\mu(t-t_0) - 2\alpha\sigma^2(t-t_0)^2}{2\sqrt{6}\sigma\sqrt{t-t_0}} \right) \right). \quad (31)$$

Для $\alpha = 0$ на основі (31) одержимо значення міри області, де задовольняється умова $\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau > 0$. Підставляючи $\alpha = 1$ знайдемо значення середнього (4) для зазначеної області. Переходячи до усереднення за мірою, нормованою на одиницю, отримаємо для середнього

$$P(r_0, t - t_0) = \frac{P_1(r_0, t - t_0)}{P_0(r_0, t - t_0)}, \quad (32)$$

або

$$P(r_0, t - t_0) = \exp \left(\frac{1}{6} \sigma^2 (t-t_0)^3 - \frac{1}{2} \mu (t-t_0)^2 - r_0 (t-t_0) \right) \frac{1 + \operatorname{erf} \left(\frac{6r_0 + 3\mu(t-t_0) - 2\sigma^2(t-t_0)^2}{2\sqrt{6}\sigma\sqrt{t-t_0}} \right)}{1 + \operatorname{erf} \left(\frac{6r_0 + 3\mu(t-t_0)}{2\sqrt{6}\sigma\sqrt{t-t_0}} \right)}. \quad (33)$$

Б. Модель Васічека з обмеженням

У функціональному інтегралі (19) також обмежимо область інтегрування умовою $\int_{t_0}^t r(\tau)d\tau > 0$. Подібно, як в (24), побудуємо твірну функцію для моделі Васічека. Через елементарні перетворення функціональний інтеграл набуде вигляду

$$P_\alpha(r, r_0, t - t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\eta)}{\eta - i\epsilon} d\eta, \quad (34)$$

де

$$P(\eta) = \exp\left(\frac{1}{2}\beta(t - t_0) - \rho\mu(t - t_0)\right) \exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2}(r - r_0)(r + r_0 - 2\mu)\right) \\ \times \int_{r_0 - \mu}^{r - \mu} \mathcal{D}r \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^t \left(\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \beta^2 r(\tau)^2\right) d\tau\right) \exp\left(-\rho \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau\right). \quad (35)$$

Параметр ρ визначений у формулі (27). Функціональний інтеграл має структуру інтеграла для гармонічного осцилятора [5, 7]. Обчисливши функціональний інтеграл (35) на основі формул (34) і (25), знайдемо $P_\alpha(r, r_0, t - t_0)$. Інтегруючи $P_\alpha(r, r_0, t - t_0)$ також за r , для твірної функції отримаємо вираз

$$P_\alpha(r_0, t - t_0) = \frac{1}{2} P_{0\alpha}(r_0, t - t_0) (1 + \operatorname{erf}(f_\alpha(t - t_0))), \quad (36)$$

де множник $P_{0\alpha}(r_0, t - t_0)$ визначений формулою

$$P_{0\alpha}(r_0, t - t_0) = \exp\left(-\alpha(t - t_0)\left(\mu - \frac{\alpha\sigma^2}{2\beta^2}\right)\right) \\ \times \exp\left(-\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{2\beta^2} + \alpha(r_0 - \mu)\right)B(t - t_0) - \frac{\alpha^2\sigma^2}{4\beta}B(t - t_0)^2\right), \quad (37)$$

а також

$$f_\alpha(t - t_0) = f_0(t - t_0) - \frac{\alpha\sigma}{2\beta} \sqrt{2((t - t_0) - B(t - t_0)) - \beta B(t - t_0)^2}, \\ f_0(t - t_0) = \frac{\beta(\mu(t - t_0) + (r_0 - \mu)B(t - t_0))}{\sigma\sqrt{2((t - t_0) - B(t - t_0)) - \beta B(t - t_0)^2}}. \quad (38)$$

Величина $B(\tau)$ визначена у формулі (A8).

Підставляючи значення $\alpha = 1$ у вираз (36) знаходимо $P_1(r_0, t - t_0)$ — середнє для зміненої області інтегрування. Для значення $\alpha = 0$ у (36) знаходимо $P_0(r_0, t - t_0)$ — значення міри зазначеної області інтегрування. Виконуючи нормування міри області на одиницю, знайдемо:

$$P(r_0, t - t_0) = \frac{P_1(r_0, t - t_0)}{P_0(r_0, t - t_0)} = P_V(r_0, t - t_0) \frac{(1 + \operatorname{erf}(f_1(t - t_0)))}{(1 + \operatorname{erf}(f_0(t - t_0)))}, \quad (39)$$

$$P_V(r_0, t - t_0) = \exp\left(- (t - t_0)\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\beta^2}\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2\beta^2} + (r_0 - \mu)\right)B(t - t_0)\right) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\beta}B(t - t_0)^2\right). \quad (40)$$

Тут $P_V(r_0, t - t_0)$ — відповідає моделі Васічека (див. також формулу (A10)), величину $f_1(t - t_0)$ отримуємо з (38) для $\alpha = 1$.

В. Асимптотики часових залежностей відсоткової ставки в моделях

Проаналізуємо характер поведінки величини $\bar{r}(t - t_0)$ (4) для розглянутих моделей. Для моделі Мертона зі зміненою областю інтегрування у функціональному інтегралі (33) отримаємо

$$\bar{r}(t - t_0) = \bar{r}_M(t - t_0) + \Delta\bar{r}(t - t_0), \quad (41)$$

де $\bar{r}_M(t-t_0)$ — значення звичайної моделі Мертона (А6), а величина $\Delta\bar{r}(t-t_0)$ виражає доданок пов'язаний із вказаним обмеженням області інтегрування

$$\begin{aligned} \Delta\bar{r}(t-t_0) &= \frac{1}{t-t_0} \ln \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{6r_0 + 3\mu(t-t_0)}{2\sqrt{6}\sigma\sqrt{t-t_0}} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{t-t_0} \ln \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{6r_0 + 3\mu(t-t_0)}{2\sqrt{6}\sigma\sqrt{t-t_0}} - \frac{\sigma(t-t_0)^{3/2}}{\sqrt{6}} \right) \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Як ми вже вказували, величина $\bar{r}_M(t-t_0)$ набуває від'ємних значень, що є недоліком моделі. Водночас величина $\bar{r}(t-t_0)$ (41) набуває лише додатних значень. Наочно це можна продемонструвати, розглядаючи асимптотику для $t-t_0 \gg 1$. Зокрема, можна показати, що $\bar{r}(t-t_0)$ має такий вигляд:

$$\bar{r}(t-t_0) \approx \frac{3}{8} \frac{(2r_0 + \mu(t-t_0))^2}{\sigma^2(t-t_0)^2} + \frac{3}{2} \frac{\ln(t-t_0)}{t-t_0} \quad (43)$$

і набуває додатних значень. Із виразу (43) випливає також $\bar{r}(t-t_0) \rightarrow \frac{3}{8} \frac{\mu^2}{\sigma^2}$ для $t \rightarrow \infty$. Для моделі Васічека на основі (39) і (40) знайдемо

$$\bar{r}(t-t_0) = \bar{r}_V(t-t_0) + \Delta\bar{r}(t-t_0), \quad (44)$$

де позначено:

$$\bar{r}_V(t-t_0) = \mu - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2\beta^2} + (r_0 - \mu) \right) \frac{B(t-t_0)}{t-t_0} + \frac{\sigma^2}{4\beta} \frac{B(t-t_0)^2}{t-t_0}, \quad (45)$$

$$\Delta\bar{r}(t-t_0) = \frac{1}{t-t_0} \ln \left(1 + \operatorname{erf}(f_0(t-t_0)) \right) - \frac{1}{t-t_0} \ln \left(1 + \operatorname{erf}(f_1(t-t_0)) \right). \quad (46)$$

У формулі $\bar{r}_V(t-t_0)$ задає відоме значення для моделі Васічека, $\Delta\bar{r}(t-t_0)$ задає внесок, пов'язаний з обмеженням області інтегрування у функціональному інтегралі.

Для значень $t-t_0 \ll 1$ отримаємо

$$\bar{r}_V(t-t_0) \approx r_0 + \frac{1}{2}\beta(\mu - r_0)(t-t_0) + \frac{1}{6}(\beta^2(r_0 - \mu) - \sigma^2)(t-t_0)^2. \quad (47)$$

Знаки коефіцієнтів біля степеней $\sim (t-t_0)$ залежать від співвідношення між параметрами моделі. Складник $\Delta\bar{r}(t-t_0)$ для $t-t_0 \ll 1$ містить експонентні доданки $\sim \exp\left(-\frac{3r_0^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right)$ якими нехтуємо.

Основний внесок $\bar{r}_V(t-t_0)$ для $t-t_0 \gg 1$ наведений у формулі (А12), де показано, що $\bar{r}_V(t-t_0)$ набуває від'ємних значень для $\mu < \frac{\sigma^2}{2\beta^2}$. Розгляньмо значення $\Delta\bar{r}(t-t_0)$ для $t-t_0 \gg 1$. Асимптотика $\Delta\bar{r}(t-t_0)$ залежить від співвідношення μ і σ . Зокрема, для $\mu > \frac{\sigma^2}{\beta^2}$ додадуться експонентні доданки $\sim \exp(-\beta(t-t_0))$ якими нехтуємо. Для $\mu < \frac{\sigma^2}{\beta^2}$ отримаємо

$$\Delta\bar{r}(t-t_0) \approx \frac{\beta^2\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} - \mu + \frac{\ln(\beta(t-t_0))}{2(t-t_0)} + \dots \quad (48)$$

Додаючи вирази (А12) і (48), одержимо додатне значення асимптотики.

ВИСНОВКИ

У цій праці розглянуто спосіб обмеження області визначення стохастичних змінних у моделях відсоткових ставок фінансової інженерії в методі функціонального інтеграла. Спосіб проілюстровано на прикладі відомих стохастичних моделей Мертона і Васічека, які використано для опису часової залежності відсоткових ставок. У методі функціонального інтегрування отримані відомі результати для часової залежності в зазначених моделях. Відомо, що ці моделі некоректно описують часову залежність відсоткової ставки, оскільки допускають її від'ємні значення. Для усунення вказаного недоліку область інтегрування у функціональному інтегралі обмежена умовою $\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau > 0$. Знайдено функціональні інтеграли для моделей і визначені часові залежності відсоткових ставок. Розглянуті асимптотики часових залежностей відсоткових ставок для $t-t_0 \ll 1$ та $t-t_0 \gg 1$, які демонструють додатні значення для всіх значень параметрів моделей.

Як відомо, параметри моделей визначають на осно-

ві статистичних даних дохідності цінних паперів. Функціональну форму часової залежності отримуємо на основі моделі, а параметри визначаємо за допомогою певної оптимізаційної процедури, що мінімізує

відхилення теоретичних й експериментальних даних [1, 2]. Знайдені в роботі вирази (41) і (44) дають змогу реалізувати зазначені процедури чисельними способом.

Додаток А:

1. Модель Мертона

Для симетрії запишемо вираз (6) у вигляді:

$$P_M(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_M(w, t - t_0) dw, \quad (A1)$$

$$P_M(w, t - t_0) = \int_{w_0}^w \mathcal{D}w(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\frac{w(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau\right) \exp\left(-\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau\right). \quad (A2)$$

Замість $r(\tau)$ у (A2) підставимо розв'язок (10). Після перетворень для $P_M(w, t - t_0)$ отримаємо вираз

$$\begin{aligned} P_M(w, t - t_0) &= P_0(t - t_0) \int_{w_0}^w \mathcal{D}w(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\frac{w(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\sigma \int_{t_0}^t (w(\tau) - w_0) d\tau\right), \quad (A3) \\ P_0(t - t_0) &= e^{-r_0(t-t_0) - \frac{1}{2}\mu(t-t_0)^2}. \end{aligned}$$

Функціональний інтеграл в (A3) дорівнює [5, 6]

$$\begin{aligned} &\int_{w_0}^w \mathcal{D}w(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\frac{w(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau\right) \exp\left(-\sigma \int_{t_0}^t (w(\tau) - w_0) d\tau\right) \\ &= \int_0^{w-w_0} \mathcal{D}w'(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\frac{w'(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau\right) \exp\left(-\sigma \int_{t_0}^t (w'(\tau)) d\tau\right) \quad (A4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(w-w_0)^2}{t-t_0}\right) \exp\left(-\frac{(w-w_0)}{2}(t-t_0) + \frac{\sigma^2}{24}(t-t_0)^3\right). \end{aligned}$$

Після підстановки (A4) в (A3) та інтегрування за w отримаємо

$$P_M(t - t_0) = e^{-r_0(t-t_0) - \frac{1}{2}\mu(t-t_0)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(t-t_0)^3}. \quad (A5)$$

Відповідно, за формулою (4) знайдемо

$$\bar{r}_M(t) = r_0 + \frac{1}{2}\mu(t-t_0) - \frac{\sigma^2}{6}(t-t_0)^2. \quad (A6)$$

Як видно з (A6) у випадку переважання стохастичного складника процентна ставка $\bar{r}_M(t)$ набуває від'ємних значень.

2. Модель Васічека

Переписімо функціональний інтеграл для моделі Васічека (6) у вигляді (A1) і (A2), як у моделі Мертона. Замість $r(\tau)$ у (6) підставимо розв'язок, знайдений для моделі Васічека (11). Тоді для $P_V(w, t - t_0)$ після ряду перетворень одержимо

$$P_V(w, t - t_0) = P_0(t - t_0) \int_{w_0}^w \mathcal{D}w(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\frac{w(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau\right) \exp\left(-\sigma \int_{t_0}^t B(t - \tau) \frac{dw(\tau)}{d\tau} d\tau\right), \quad (A7)$$

де позначено

$$P_0(t - t_0) = \exp\left(-B(t - t_0)(r_0 - \mu) - \mu(t - t_0)\right), \quad B(\tau) = \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta\tau}\right). \quad (\text{A8})$$

Функціональний інтеграл (A7) легко обчислюємо, у підсумку отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{w_0}^w \mathcal{D}w(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\frac{w(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau\right) \exp\left(-\int_{t_0}^t B(t - \tau) \frac{dw(\tau)}{d\tau} d\tau\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - t_0)}} \exp\left(-\frac{(w - w_0 + \sigma \int_{t_0}^t B(t - \tau) d\tau)^2}{2(t - t_0)}\right) \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} \int_{t_0}^t B(t - \tau)^2 d\tau\right). \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

Після підстановки (A9) у вираз (A7) й обчислення інтеграла за w у (A1) отримаємо для середнього значення в моделі Васічека

$$P_V(t - t_0) = P_0(t - t_0) \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} \int_{t_0}^t B(t - \tau)^2 d\tau\right). \quad (\text{A10})$$

Вираз (A10) збігається з відомим результатом часової структури відсоткової ставки для моделі Васічека [1] (треба врахувати зміну позначень $t \rightarrow T$, $t_0 \rightarrow \tau$). Як прийнято в моделях часової структури відсоткових ставок, час T фіксований, а (A10) розглядається для різних значень τ .

Як ми вже зазначали, величина (A10) в моделі Васічека приводить до від'ємних значень процентної ставки. Це можна продемонструвати для $\sigma^2(t - t_0) \gg 1$, $\beta(t - t_0) \gg 1$, одержимо

$$P_V(t - t_0) \approx e^{-\frac{1}{2}(t - t_0)\left(2\mu - \frac{\sigma^2}{\beta^2}\right) - \left(\frac{3\sigma^2}{4\beta^3} + \frac{r_0 - \mu}{\beta}\right)} \quad (\text{A11})$$

і згідно з формулою (4)

$$\bar{r}_V(t) \approx \mu - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} + \left(\frac{3\sigma^2}{4\beta^3} + \frac{r_0 - \mu}{\beta}\right) \frac{1}{t - t_0}. \quad (\text{A12})$$

Як видно, за умови $\frac{\sigma^2}{2\beta^2} > \mu$ процентна ставка стає від'ємною. Тобто у випадку переважання випадкового складника в рівнянні Васічека модель неправильно відображає динаміку процентної ставки. Зазначимо також, що доданок з β відіграє стабілізувальну роль у стохастичній динаміці порівняно з моделлю Мертона. Як видно з (A12), зі зростанням β роль стохастичного складника зменшується.

Додаток В:

Для моделі Мертона густина умовної ймовірності дорівнює

$$K_M(r, r_0, t - t_0) = \int_{r_0}^r \mathcal{D}r \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^t \left(\frac{dr}{d\tau} - \mu\right)^2 d\tau\right), \quad (\text{B1})$$

що після інтегрування приводить до відомого результату [5, 6]

$$K_M(r, r_0, t - t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t - t_0)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(r - r_0 - \mu(t - t_0))^2}{\sigma^2(t - t_0)}\right). \quad (\text{B2})$$

У моделі Васічека після обчислення інтеграла

$$K_V(r, r_0, t - t_0) = \exp\left(\frac{1}{2}\beta(t - t_0)\right) \int_{r_0}^r \mathcal{D}r \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^t \left(\frac{dr}{d\tau} - \beta(\mu - r(\tau))\right)^2 d\tau\right) \quad (\text{B3})$$

для густини умовної ймовірності отримаємо

$$\begin{aligned} K_V(r, r_0, t - t_0) &= \sqrt{\frac{\beta \exp(\beta(t - t_0))}{2\pi\sigma^2 \sinh(\beta(t - t_0))}} \exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2} ((r - \mu)^2 - (r_0 - \mu)^2)\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2} \frac{((r - \mu)^2 + (r_0 - \mu)^2) \cosh(\beta(t - t_0)) - 2(r - \mu)(r_0 - \mu)}{\sinh(\beta(t - t_0))}\right). \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

Визначивши умовне середнє значення $\langle r \rangle$ у моделі та дисперсії Σ^2 :

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} K_V(r, r_0, t - t_0) r dr = \mu + e^{-\beta(t-t_0)}(r_0 - \mu),$$

$$\Sigma^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta(t-t_0)}),$$

вираз (Б3) запишемо в компактнішому вигляді

$$K_V(r, r_0, t - t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} \exp\left(-\frac{(r - \langle r \rangle)^2}{2\Sigma^2}\right). \quad (\text{Б5})$$

-
- [1] Yuh-Dauh Lyuu, *Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, and Algorithms* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001); <https://doi.org/10.1017/CB09780511546839>.
- [2] N. Privault, *An Elementary Introduction to Stochastic Interest Rate Modeling; 2nd ed.* (World Scientific Publishing, 2012); <https://doi.org/10.1142/8416>.
- [3] D. McInerney, T. Zastawniak, *Stochastic Interest Rates* (Cambridge University Press, Cambridge, 2015); <https://doi.org/10.1017/CB09781139035033>.
- [4] M. Decaps, A. De Scheppe, M. Goovaerts, *Physica A* **342**, 677 (2004); <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.05.035>.
- [5] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets; 5th ed.* (World Scientific Publishing, 2009); <https://doi.org/10.1142/7305>.
- [6] M. Chaichian, A. Demichev, *Path Integrals in Physics. Stochastic Processes and Quantum Mechanics* (CRC Press, Boca Raton, 2001); <https://doi.org/10.1201/9781315273358>.
- [7] M. Chaichian, A. Demichev, *Path Integrals in Physics. QFT, Statistical Physics and Modern Applications* (CRC Press, Boca Raton, 2001); <https://doi.org/10.1201/9781315274607>.
- [8] B. E. Baaquie, *Quantum finance. Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates* (Cambridge University Press, New York, 2004); <https://doi.org/10.1017/CB09780511617577>.
- [9] V. Linetsky, *Comput. Econ.* **11**, 129 (1997); <https://doi.org/10.1023/A:1008658226761>.
- [10] L. F. Blazhyevskiy, V. S. Yanishevsky, *Condens. Matter Phys.* **14**, 2 (2011); <https://doi.org/10.5488/CMP.14.23001>.
- [11] M. Goovaerts, A. De Scheppe, M. Decamps, *J. Comp. Appl. Math.* **164-165**, 337 (2004); <https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.09.006>.
- [12] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences* (Springer, Berlin, 2004).
- [13] C. Grosche, *Ann. Phys.* **2**, 557 (1993); <https://doi.org/10.1002/andp.19935050606>.
- [14] C. Grosche, F. Steiner, *Handbook of Feynman Path Integrals* (Springer, Berlin-Heidelberg, 1998); <https://doi.org/10.1007/BFb0109520>.
- [15] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики* (Физматлит, Москва, 2004).

APPLICATION OF THE PATH INTEGRAL METHOD TO SOME STOCHASTIC MODELS OF FINANCIAL ENGINEERING

V. Yanishevsky

National University "Lvivska Polytechnika",
12, Bandery St., Lviv, UA-79013, Ukraine

The path integral method is applied to investigation of time dependence of interest rate of Merton and Vasicek stochastic models. The path integral is based on Wiener integral by means of variable substitution based on stochastic equations of the models. The results were obtained for term structure of interest rates in Merton and Vasicek models.

The path integral method is applied to the investigation of the time dependence of the interest rate in the Merton and Vasicek stochastic models. The path integral is based on the Wiener integral by means of variable substitution based on stochastic equations of the models. The results were obtained for the term structure of interest rates in the Merton and Vasicek models.

As is known, the drawback of those models is that they allow for negative values of the interest rate. Hence, one should introduce boundary conditions, which limit the stochastic variable domain to positive values. During the construction of the path integral for respective mean values, one needs to

use a transition probability that satisfies those boundary conditions. However, the construction of such path integral for average values, which contains an exponent dependent on some functional of integration variables, is in general a very complicated task.

In the work, an easier approach is used that consists in limiting the integral domain in path integrals for the Merton and Vasicek models. In particular, in path integrals the integral domain is limited using condition $\int_{t_0}^t r(\tau)d\tau > 0$, which is given by the Heaviside step function $\theta(x)$. It is shown that limiting the integral domain in such a way allows us to get rid of negative values of the term structure of interest rates.

The path integrals for the limited integral domain are calculated using the transformation of the Heaviside step function into a complex plane. During the calculation of mean values, a normalization of the measure is applied to a selected domain. As a result, in the models where the interest rate takes only positive values, equations for the term structure of interest rates were obtained. Positive values of interest rates are visually demonstrated by means of asymptotic analysis of their time dependence.

The obtained functional forms of the interest rates dependencies can be used to calibrate models with the help of respective optimization procedures, which minimize deviation of theoretical and experimental values. Expressions found in the work allow one to accomplish the above procedures using numeric methods.

Key words: stochastic model, Merton model, Vasicek model, interest rate, functional integral.