




МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ТЕОРІЇ ОБЕРТОВИХ ВИРОДЖЕНИХ КАРЛИКІВ

М. Ваврух , С. Смеречинський , Д. Дзіковський 
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Кирила і Мефодія, 8, Львів, 79005, Україна
e-mail: mavvruk@gmail.com

(Отримано 26 жовтня 2021 р.; в остаточному вигляді — 18 січня 2022 р.; прийнято до друку — 22 лютого 2022 р.;
опубліковано онлайн — 29 березня 2022 р.)

Запропоновано новий аналітичний підхід до розрахунку характеристик масивних вироджених карликів з осьовим обертанням на основі моделі Чандрасекара. Особливістю нашого підходу є одночасне використання диференціальної та інтегральної форм рівняння рівноваги. У безрозмірному вигляді диференціальне рівняння рівноваги є сильно нелінійним неоднорідним рівнянням другого порядку в частинних похідних, у якому фігурують два безрозмірні параметри — параметр релятивізму в центрі зорі x_0 і безрозмірна кутова швидкість Ω . У внутрішній ділянці карлика обертання враховуємо як збурення в лінійному наближенні за Ω^2 . У периферійній ділянці обертання вважаємо основним чинником. Використання інтегрального рівняння забезпечує коректний розрахунок сталих інтегрування. На основі розв'язку рівняння рівноваги розраховано масу карлика, момент інерції відносно осі обертання, екваторіальний та полярний радіуси, прискорення вільного падіння на екваторі в ділянці $1 \leq x_0 \leq 24$, $0 \leq \Omega < \Omega_{\max}(x_0)$. Уперше розраховано повну енергію карлика як функцію цих параметрів. Екстраполяцією обчислено максимальні значення $\Omega_{\max}(x_0)$, а також спостережувану кутову швидкість $\omega_{\max}(x_0)$. Розглянуту модель узагальнено врахуванням міжчастинкових кулонівських взаємодій. Подано приклади використання одержаних результатів. Показано, що характеристики спостережуваних масивних карликів не суперечать розрахованим значенням для моделі з твердотільним обертанням за врахування взаємодій.

Ключові слова: вироджені карлики, осьове обертання, рівняння механічної рівноваги, параметр релятивізму, міжчастинкові взаємодії.

DOI: <https://doi.org/10.30970/jps.26.1902>

I. ВСТУП

Згідно зі сучасними спостереженнями вироджені карлики належать до найчисленніших типів зір у Всесвіті. Вони відзначаються великою різноманітністю характеристик, що є наслідком впливу різних чинників на формування їхньої структури та механізму еволюції. Через 11 років після Адамсового відкриття карлика в подвійній системі Сіріуса [1] Фаулер запропонував електрон-ядерну модель структури карлика, згідно з якою стійкість цих зір зумовлена квантовим ефектом — виродженням електронної підсистеми. Уперше використавши статистику Фермі і розглядаючи електронну підсистему як нерелятивістський ідеальний електронний газ, Фаулер довів, що за низьких температур тиск електронної підсистеми слабко залежить від температури й визначається концентрацією електронів [2]. Чандрасекар узагальнив цю модель, описуючи абсолютно вироджений електронний газ у межах спеціальної теорії відносності з рівнянням стану [3]

$$P(\mathbf{r}) = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3h^3} \mathcal{F}(x(\mathbf{r})), \quad (1)$$

$$\mathcal{F}(x) = x(2x^2 - 3)\sqrt{1 + x^2} + 3 \ln[x + \sqrt{1 + x^2}],$$

де m_0 — маса електрона, c — швидкість світла, $x(\mathbf{r}) =$

$\hbar(m_0 c)^{-1}(3\pi^2 n_e(\mathbf{r}))^{1/3}$ — локальне значення параметра релятивізму, $n_e(\mathbf{r})$ — концентрація електронів. У моделі Чандрасекара (ідеальний повністю вироджений електронний газ + підсистема статичних ядер) густину речовини зручно визначати через концентрацію електронів

$$\rho(\mathbf{r}) = n_e(\mathbf{r})\{m_0 + m_u \mu_e\} \cong \frac{m_u \mu_e}{3\pi^2} \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^3 (x(\mathbf{r}))^3, \quad (2)$$

де m_u — атомна одиниця маси, $\mu_e = \langle A/Z \rangle$ — усереднене значення відношення масового числа до заряду ядра. Модель статична, у ній відсутнє випромінювання та еволюційні процеси. У моделі фігурують два безрозмірні параметри: параметр релятивізму в центрі зорі $x_0 \equiv x(0)$ і параметр μ_e . Розподіл речовини визначаємо рівнянням рівноваги (див. [3, 4])

$$\nabla P(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})\nabla \Phi_{\text{grav}}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

де $\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{r})$ — гравітаційний потенціал, створений розподілом $\rho(\mathbf{r})$. Модель має сферичну симетрію, а теплові ефекти, осьове обертання, міжчастинкові кулонівські взаємодії та магнітні поля не беремо до уваги. Переходом до безрозмірних змінних $\xi = r/\lambda(x_0)$, $y(\xi|x_0) = \varepsilon_0^{-1}\{[1 + x^2(\mathbf{r})]^{1/2} - 1\}$, $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon(x_0) = [1 + x_0^2]^{1/2} - 1$, вибравши масштаб довжини $\lambda(x_0)$ з умови

$$\frac{32\pi^2 G}{3(hc)^3} \{m_u \mu_e m_0 c^2 \lambda(x_0) \varepsilon(x_0)\}^2 = 1 \quad (4)$$



одержуємо звичайне однопараметричне диференціальне рівняння другого порядку

$$\Delta_\xi y(\xi) = -\left\{y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0}y(\xi)\right\}^{3/2}, \quad \Delta_\xi = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d}{d\xi}, \quad (5)$$

у якому $y(\xi) \equiv y(\xi|x_0)$, $y(0) = 1$, а регулярним розв'язкам відповідає умова $dy(\xi)/d\xi = 0$ за $\xi = 0$. Рівняння (5) розв'язуємо чисельним методом. З умови $y(\xi) = 0$ знаходимо безрозмірний радіус карлика $\xi_1(x_0)$, а безрозмірну масу визначаємо виразом

$$\mathcal{M}(x_0) = \int_0^{\xi_1(x_0)} \left\{y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0}y(\xi)\right\}^{3/2} \xi^2 d\xi. \quad (6)$$

У результаті маса й радіус карлика є такими функціями параметрів моделі:

$$M(x_0, \mu_e) = \frac{M_0}{\mu_e^2} \mathcal{M}(x_0), \quad R(x_0, \mu_e) = \frac{R_0}{\mu_e} \frac{\xi_1(x_0)}{\varepsilon_0(x_0)}, \quad (7)$$

де масштаби маси й довжини — комбінації універсальних сталих,

$$M_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_u^2} \approx 2.88665 \dots M_\odot, \quad (8)$$

$$R_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{h^3}{cG}\right)^{1/2} \frac{1}{m_0 m_u} \approx 1.11623 \cdot 10^{-2} \dots R_\odot,$$

а $\lambda(x_0) = R_0(\varepsilon_0(x_0)\mu_e)^{-1}$. Характер залежності маси та радіуса від параметра релятивізму визначають асимптотики

$$\mathcal{M}(x_0) = \begin{cases} x_0^{3/2} & \text{при } x_0 \ll 1, \\ 2.01824 & \text{при } x_0 \gg 1; \end{cases} \quad (9)$$

$$\frac{\xi_1(x_0)}{\varepsilon_0(x_0)} = \begin{cases} x_0^{-1/2} & \text{при } x_0 \ll 1, \\ x_0^{-1} & \text{при } x_0 \gg 1. \end{cases}$$

Звідси випливають два основні висновки теорії Чандрасекара — обмеження на максимальну масу карлика ($M(x_0, \mu_e) \leq M_{\max} = 5.76M_\odot/\mu_e^2$) та специфічне співвідношення маса–радіус ($M(x_0, \mu_e) \rightarrow M_{\max}, R(x_0, \mu_e) \rightarrow 0$ при $x_0 \gg 1$; $M(x_0, \mu_e) \cdot (R(x_0, \mu_e))^3 = \text{const}$ при $x_0 \ll 1$). Підставляючи спостережувані значення мас і радіусів карликів замість $M(x_0, \mu_e)$ та $R(x_0, \mu_e)$ у вирази (7), можна оцінити параметри x_0 і μ_e для конкретних карликів у межах моделі Чандрасекара. Використовуючи значення мас і радіусів із каталогів [5–7], ми виявили, що більшість карликів із невисокими ефективними температурами відповідають значенням параметра релятивізму з ділянки $0.7 \leq x_0 \leq 1.6$ [8]. Звідси випливає, що стан речовини в цих карликах є на межі релятивістського виродження, це карлики з малими та проміжними значеннями мас. Середнє статистичне значення їхньої маси близьке до $0.6M_\odot$, а карлики з масами $M > 1.1M_\odot$ трапляються рідко [9]. Середня статистична маса більшості карликів, що є компонентами подвійних систем, менша за відповідну величину

для польових. Проте невелика частина карликів подвійних систем ($\approx 1\%$) має маси, більші за $1.2M_\odot$, а маси деяких із них близькі до межі Чандрасекара. Двадцятьом карликам із каталогу [10], які мають маси $0.43303 \leq M/M_0 \leq 0.49129$ та ефективні температури $10^4 \text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 10^5 \text{ K}$, відповідають значення параметра релятивізму з ділянки $4.9257 \leq x_0 \leq 9.5720$. Оскільки масивних карликів вважають попередниками наднових Ia та повторних нових, то дослідження їхніх характеристик — актуальне завдання в контексті космологічних проблем.

Протягом останніх трьох десятиліть в околицях Сонця відкрито тисячі вироджених карликів різних спектральних класів із малими та проміжними масами, з різними радіусами, світностями та ефективними температурами. Їхній розподіл на площині маса–радіус не відповідає моделі Чандрасекара. Як показано в нашій роботі [11], цей розподіл можна розглядати як неперервну послідовність кривих маса–радіус, кожна з яких описує сім'ю карликів із близькими ефективними температурами. Коректний розрахунок внутрішньої структури й характеристик вироджених карликів, інтерпретація спостережуваних даних вимагають узагальнення моделі Фаулера–Чандрасекара врахуванням таких чинників, як відхилення від абсолютного виродження електронної підсистеми, міжчастинкових кулонівських взаємодій, осьового обертання, ефектів загальної теорії відносності (ЗТВ), просторової неоднорідності хімічного вмісту, магнітних полів, а також термодинамічних процесів, які впливають на еволюцію карликів. Серед названих факторів є конкурентні, вплив яких призводить до взаємно протилежних наслідків, що вимагає їх одночасного врахування. Зазвичай вплив перелічених чинників невеликий, що дозволяє враховувати їх методами теорії збурень. Про актуальність досліджень вироджених карликів свідчать публікації останніх років, що стосуються спостережень карликів зі швидким осьовим обертанням у подвійних системах [12–14].

Побудова теорії вироджених карликів відбувалась узагальненням політропної теорії нормальних зір [15, 16]. Рівняння стану (1) асимптотично близьке до рівняння політропи $P(\mathbf{r}) = K[\rho(\mathbf{r})]^{1+1/n}$ зі сталими параметрами K і n , адже

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 2x^4 - 2x^2 + \dots & \text{при } x \gg 1, \\ \frac{8}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \dots & \text{при } x \ll 1. \end{cases} \quad (10)$$

Тому моделям вироджених карликів відповідають політропи з індексами $1.5 \leq n \leq 3$.

Розподіл речовини в моделі зорі з осьовим обертанням визначається рівнянням рівноваги [17, 18]

$$\nabla P(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})\{\nabla\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{r}) + \nabla\Phi_c(\mathbf{r})\}, \quad (11)$$

де $\Phi_c(\mathbf{r})$ — відцентровий потенціал. У випадку обертання зі сталою кутовою швидкістю ω у сферичній системі координат, вісь Oz якої збігається з віссю обертання,

$$\Phi_c(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta = -\frac{\omega^2}{3} r^2 \{1 - P_2(t)\}, \quad (12)$$

де θ — полярний кут, $t = \cos \theta$, $P_2(t)$ — поліном Лежандра. У випадку зорі-політропи в безрозмірних змінних $\xi = r/\lambda_n$, $Y(\xi, \theta|n) = [\rho(\mathbf{r})/\rho_c]^{1/n}$ (де $\rho_c \equiv \rho(0)$) рівняння (11) стає безрозмірним диференціальним рівнянням другого порядку в частинних похідних

$$\Delta_{\xi, \theta} Y(\xi, \theta|n) = \Omega^2 - [Y(\xi, \theta|n)]^n, \quad (13)$$

якщо масштаб λ_n і безрозмірна кутова швидкість Ω визначені співвідношеннями

$$K(1+n) = 4\pi G \lambda_n^2 \rho_c^{1-1/n}, \quad \Omega = \omega(2\pi G \rho_c)^{-1/2}. \quad (14)$$

Рівняння (11) описує й розподіл речовини в моделі виродженого карлика. У моделі Чандрасекара з осьовим обертанням у змінних

$$\xi = r/\lambda(x_0), \quad Y(\xi, \theta|x_0) = \varepsilon_0^{-1} \left\{ \sqrt{1+x^2(\mathbf{r})} - 1 \right\} \quad (15)$$

рівняння рівноваги набуває вигляду

$$\Delta_{\xi, \theta} Y(\xi, \theta|x_0) = \Omega^2 - \left\{ [Y(\xi, \theta|x_0)]^2 + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta|x_0) \right\}^{3/2}, \quad (16)$$

де

$$\Omega^2 = 2\omega^2 \lambda_{(x_0)}^2 \frac{m_u \mu_e}{m_0 c^2 \varepsilon_0}, \quad (17)$$

а $\lambda(x_0)$ визначено співвідношенням (4). За наявності осьової симетрії оператор Лапласа

$$\Delta_{\xi, \theta} = \Delta_{\xi} + \frac{1}{\xi^2} \Delta_{\theta}, \quad \Delta_{\xi} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \quad (18)$$

$$\Delta_{\theta} = \frac{\partial}{\partial t} (1-t^2) \frac{\partial}{\partial t}, \quad t = \cos \theta.$$

Рівняння (13) і (16) близькі за своєю структурою. Згідно з означенням $Y(0, \theta|n) = 1$, $Y(0, \theta|x_0) = 1$, а їхні регулярні розв'язки задовольняють умови

$$\frac{\partial}{\partial \xi} Y(\xi, \theta|n) = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} Y(\xi, \theta|x_0) = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (19)$$

Як рівняння (16), так і (13) за $n \neq 0$ або 1 є нелінійними неоднорідними рівняннями. Мілн [17] запропонував лінеаризувати рівняння (13) відносно параметра Ω^2 підстановкою

$$Y(\xi, \theta|n) = y_n(\xi) + \Omega^2 \left\{ \psi_{n,0}(\xi) + \sum_{l \geq 1} a_{2l}(n) \psi_{n,2l}(\xi) P_{2l}(t) \right\}, \quad (20)$$

де $y_n(\xi)$ — функція Емдена, що задовольняє рівняння (13) за $\Omega = 0$, $a_{2l}(n)$ — сталі інтегрування, $P_{2l}(t)$ — поліноми Лежандра. Лінійні рівняння для функцій $\psi_{n,0}(\xi)$ і $\psi_{n,2l}(\xi)$ одержуємо внаслідок підстановки виразу (20) у рівняння (13) за збереження доданків, пропорційних Ω^2 :

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi} \psi_{n,0}(\xi) &= 1 - n y_n^{n-1}(\xi) \psi_{n,0}(\xi), \\ \Delta_{\xi} \psi_{n,2}(\xi) &= \left\{ \frac{6}{\xi^2} - n y_n^{n-1}(\xi) \right\} \psi_{n,2}(\xi). \end{aligned} \quad (21)$$

У практичних розрахунках використано наближення $a_{2l}(n) = 0$ за $l \geq 2$. Згідно з означенням $y_n(\xi)$ функції $\psi_{n,0}(\xi)$ і $\psi_{n,2}(\xi)$ задовольняють нульові граничні умови: $\psi_{n,0}(0) = \psi_{n,2}(0) = 0$, $d\psi_{n,0}(\xi)/d\xi = d\psi_{n,2}(\xi)/d\xi = 0$ при $\xi = 0$. Розв'язки рівнянь (21) знаходили чисельним інтегруванням, хоча в частковому випадку $n = 1$ вони мають аналітичні розв'язки,

$$y_1(\xi) = j_0(\xi), \quad \psi_{1,0}(\xi) = 1 - j_0(\xi), \quad \psi_{2,0}(\xi) = j_2(\xi), \quad (22)$$

де $j_0(\xi)$, $j_2(\xi)$ — сферичні функції Бесселя першого роду [19].

Інтегруючи рівняння (11), у випадку політропи з індексом n одержуємо співвідношення

$$\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{r}) = -\Phi_c(\mathbf{r}) - K(1+n) \rho^{1/n}(\mathbf{r}) + \text{const}. \quad (23)$$

Сталу можна визначити, покладаючи в рівнянні (23) $\mathbf{r} = 0$. У безрозмірних змінних співвідношення (23) набуває вигляду

$$\Phi_n(\xi, \theta) - \Phi_n(0, 0) = 1 - Y(\xi, \theta|n) + \frac{\Omega^2 \xi^2}{6} (1 - P_2(t)), \quad (24)$$

де $\Phi_n(\xi, \theta)$ є безрозмірним гравітаційним потенціалом,

$$\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho_c \lambda_n^2 \Phi_n(\xi, \theta). \quad (25)$$

Співвідношення (24) можна використати для наближеного знаходження сталої інтегрування $a_2(n)$. Розклад (20) має сенс у ділянці $\xi \leq \xi_1(n)$, де $\xi_1(n)$ — корінь рівняння $y_n(\xi) = 0$. Оскільки розподіл густини в політропі з обертанням має приблизно еліпсоїдальний характер, то невідомий потенціал $\Phi_n(\xi, \theta)$ в околі сфери радіуса $\xi_1(n)$ можна наближено записати у формі мультипольного розкладу

$$\Phi_n(\xi, \theta) = \text{const} - \frac{g_0}{\xi} - \frac{g_2}{\xi^3} P_2(t) + \dots \quad (26)$$

З умови неперервності потенціалу на сфері радіуса $\xi_1(n)$ одержуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{g_2}{\xi_1^3} &= \frac{\Omega^2 \xi_1^2}{6} + a_2(n) \Omega^2 \psi_{n,2}(\xi_1), \\ -3 \frac{g_2}{\xi_1^4} &= \frac{\Omega^2 \xi_1}{3} + a_2(n) \Omega^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \psi_{n,2}(\xi_1), \end{aligned} \quad (27)$$

з якої знаходимо, що

$$a_2(n) = -\frac{5}{6} \xi_1^2 \left\{ 3\psi_{n,2}(\xi_1) + \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \psi_{n,2}(\xi_1) \right\}^{-1}. \quad (28)$$

Знайдений вираз для $a_2(n)$ визначає розв'язок рівняння рівноваги в ділянці $0 \leq \xi \leq \xi_1(n)$. Для наближеного знаходження розподілу густини за межами цієї ділянки вираз (20) екстраполювався в лінійному наближенні на ділянку $\xi > \xi_1(n)$. Цей спосіб визначення сталої $a_2(n)$ є традиційним наближенням у теорії зоряної поверхні. Фактично за способом Мілна-Чандрасекара визначення сталої інтегрування

$a_2(n)$ проводиться без урахування периферійної ділянки політропи, тому що розклад (26) справедливий лише за межами сфери, радіус якої дорівнює великій півосі еліпсоїда обертання [20].

У роботі [21] запропоновано спосіб опису периферійної ділянки, що ґрунтувався на умові неперервності самого розв'язку рівняння рівноваги, а не гравітаційного потенціалу. В ділянці $0 \leq \xi \leq \xi_f$ використано вираз (20) за $a_{2l}(n) = 0$ для $l \geq 2$, а за межами цієї сфери — розв'язок рівняння

$$\Delta_{\xi, \theta} Y_{II}(\xi, \theta|n) = \Omega^2, \quad (29)$$

який вибираю у вигляді, подібному до розкладу (26):

$$Y_{II}(\xi, \theta|n) = \frac{\Omega^2 \xi^2}{6} (1 - P_2(t)) + (\nu_0 + \nu_1 \Omega^2) + \frac{1}{\xi} (\lambda_0 + \lambda_1 \Omega^2) + \frac{\Omega^2}{\xi^3} b_2 P_2(t), \quad (30)$$

у якому $\nu_0, \nu_1, \lambda_0, \lambda_1, b_2$ — сталі. Їх визначали з умови “зшивання” на сфері радіуса ξ_f ,

$$Y(\xi, \theta|n) = Y_{II}(\xi, \theta|n), \quad \frac{\partial}{\partial \xi} Y(\xi, \theta|n) = \frac{\partial}{\partial \xi} Y_{II}(\xi, \theta|n)$$

$$\text{при } \xi = \xi_f. \quad (31)$$

Прийнято, що $\xi_f < \xi_1(n)$, а ξ_f вважали підгінним параметром і визначали з умови, щоб обчислені значення для полярного й екваторіального радіусів якнайменше відхилялись від результатів роботи [22], у якій виконано інтегрування рівняння рівноваги чисельним методом. Крім радіусів політроп (як функцій індекса n і кутової швидкості), інших характеристик не розраховували. Варто зазначити, що загальний розв'язок рівняння (29) має структуру

$$Y_{II}(\xi, \theta|n) = \frac{\Omega^2 \xi^2}{6} (1 - P_2(t)) + \sum_{l \geq 0} P_{2l}(t) \{ c_{2l} \xi^{2l} + b_{2l} \xi^{-1-2l} \}, \quad (32)$$

але у формулі (30) члени типу $c_{2l} \xi^{2l} P_{2l}(t)$ відсутні. Підхід роботи [21] був використаний для наближеного розрахунку мас і радіусів вироджених карликів із твердотільним обертанням [23].

Вище розглянуто спосіб використання співвідношення (24) для наближеного визначення сталої інтегрування. Але це співвідношення є точним — це інтегральна форма рівняння рівноваги (13),

$$Y(\xi, \theta|n) = \frac{\Omega^2 \xi^2}{6} (1 - P_2(t)) + \frac{1}{4\pi} \int [Y(\xi', \theta'|n)]^n Q(\xi, \xi') d\xi', \quad (33)$$

у якому фігурує ядро

$$Q(\xi, \xi') = |\xi - \xi'|^{-1} - (\xi')^{-1}, \quad (34)$$

а інтегруємо за об'ємом політропи. У наших роботах [24, 25] запропоновано використовувати це рівняння для визначення сталих інтегрування $a_{2l}(n)$ у розкладах (20). Підставляючи розклади (20) у рівняння (33), одержуємо систему неоднорідних лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення набору сталих $a_{2l}(n)$. Коефіцієнти, що фігурують у цих рівняннях, визначаємо самоузгоджено, одночасно із визначенням елементів поверхні політропи. Це дозволяє враховувати більшу кількість членів у розкладах (20), (32) і підвищує точність розрахунків.

У минулому столітті опубліковано праці, що стосуються характеристик вироджених карликів і ґрунтуються на використанні моделі Чандрасекара за наявності обертання [22, 26]. Метою більшості з них було намагання довести можливість існування вироджених карликів із масами, більшими за межу Чандрасекара. Теорія Чандрасекара ґрунтується на ідеальній електрон-ядерній моделі без урахування кулонівських взаємодій, а їх урахування спричиняє зменшення внутрішнього тиску й тому понижує межу Чандрасекара. Осьове обертання та міжчастинкові взаємодії — конкурентні чинники. І якщо кутова швидкість для цього карлика може змінюватись у широких межах, то міжчастинкові взаємодії — сталий фактор.

Із теорії обертаних політроп відомо, що за $n = 0$ ексцентриситет еліпсоїда за твердотільного обертання є двозначною функцією кутової швидкості [27]. У зв'язку з цим можуть реалізуватися два режими обертання: з невеликими ексцентриситетами, коли швидкість обертання Ω змінюється в ділянці $0 \leq \Omega \leq 0.47\dots$, або ж з ексцентриситетами, близькими до одиниці, за малих кутових швидкостей. У першому випадку утворюються еліпсоїдальні структури, у другому — структури дискового типу. Цей факт — підстава для побудови моделей із диференціальним обертанням, за якого кутова швидкість є монотонно спадною функцією віддалі від осі обертання [26]. Недавно відкриті вироджені карлики з дуже високою кутовою швидкістю обертання (з періодом $20 \div 40$ с), імовірно, обертаються як тверде тіло [12–14].

За наявності великого обсягу спостережуваних даних щодо мас, світностей, радіусів та кутових швидкостей карликів актуальним є вибір адекватних моделей, у межах яких розраховані характеристики відповідали б спостережуваним даним. А також визначення термодинамічного стану речовини та параметрів моделей для конкретних карликів. А це вимагає розрахунку характеристик карликів із високою точністю.

Метою нашої роботи є розрахунок характеристик моделі холодного виродженого карлика, яка враховує два конкурентні чинники — твердотільне осьове обертання й міжчастинкові кулонівські взаємодії. Ця модель відповідає реальному карлику, у яких процес нейтронізації малоімовірний. Ми ставимо за мету виявити також, чи характеристики спостережуваних карликів не суперечать використаній моделі. У методичному плані наш аналітичний підхід відрізняється від інших робіт способом визначення сталих інтегрування за допомогою інтегральної форми рівняння

рівноваги, що дає змогу підвищити точність розрахунків. Ми використовуємо розклади типу (20), (32) до $P_4(t)$ включно, у зв'язку з цим точність одержаних результатів у всій ділянці зміни кутової швидкості $0 \leq \Omega \leq \Omega_{\max}(x_0)$ відповідає роботі [22], у якій здійснено чисельне інтегрування рівняння рівноваги для моделі з твердотільним обертанням для декількох значень параметра релятивізму з ділянки $0.5 \leq x_0 \leq 6.25$.

Розділи II–V нашої роботи присвячені моделі з осьовим обертанням. У Додатку подано таблиці розрахованих характеристик як функцій параметрів x_0 і Ω . У розділі VI показано, як змінюються характеристики карликів з обертанням під впливом міжчастин-

кових взаємодій. Обговорення результатів і висновки викладено в розділі VII.

II. ЛІНЕАРИЗАЦІЯ РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ

У цьому розділі розглянемо наближені розв'язки рівняння (16), що описує рівновагу карлика в моделі з твердотільним обертанням без міжчастинкових взаємодій. Згідно з методом Мілна [17], розв'язок рівняння у внутрішній ділянці ($0 \leq \xi \leq \xi_1(x_0)$) запишемо у вигляді розкладу

$$Y_I(\xi, \theta|x_0) = y(\xi|x_0) + \Omega^2 \left\{ \psi_0(\xi|x_0) + \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t) \psi_{2l}(\xi|x_0) \right\}, \quad (35)$$

де $y(\xi|x_0)$ — розв'язок рівняння (5), $a_{2l}(x_0)$ — сталі інтегрування, $P_{2l}(t)$ — поліном Лежандра порядку $2l$ від змінної $t = \cos \theta$. Підстановкою виразу (35) у рівняння (16) у лінійному наближенні за Ω^2 одержуємо звичайні диференціальні рівняння для функцій $\psi_0(\xi|x_0)$, $\psi_{2l}(\xi|x_0)$:

$$\Delta_\xi \psi_0(\xi|x_0) = 1 - \Phi(\xi|x_0) \psi_0(\xi|x_0), \quad (36)$$

$$\Delta_\xi \psi_{2l}(\xi|x_0) = \left\{ \frac{2(2l+1)}{\xi^2} - \Phi(\xi|x_0) \right\} \psi_{2l}(\xi|x_0), \quad l \geq 1,$$

де

$$\Phi(\xi|x_0) = 3 \left\{ y(\xi|x_0) + \frac{1}{\varepsilon_0} \right\} \left\{ y^2(\xi|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|x_0) \right\}^{1/2}. \quad (37)$$

Функція $\psi_0(\xi|x_0)$ має асимптотику $\xi^2/6 + \dots$ за $\xi \ll 1$, а асимптотика функції $\psi_{2l}(\xi|x_0)$ у цій ділянці збігається з асимптотикою сферичної функції Бесселя першого роду порядку $2l$: $\psi_{2l}(\xi|x_0) \Rightarrow j_{2l}(\xi\beta) + \dots$, де $\beta = \Phi^{1/2}(0|x_0)$. Тому під час числового інтегрування рівнянь (36) ми використовуємо нормування

$$\psi_{2l}(\xi|x_0) \Rightarrow \{(4l+1)!!\}^{-1} \xi^{2l} + \dots \quad \text{при } \xi \ll 1. \quad (38)$$

На рис. 1 зображена функція $y(\xi|x_0)$, а на рис. 2–3 подано функції $\psi_0(\xi|x_0)$, $\psi_2(\xi|x_0)$, $\psi_4(\xi|x_0)$ для різних значень x_0 . У ділянці периферії ($\xi > \xi_1(x_0)$), де $Y(\xi, \theta|x_0) \ll 1$, розв'язки рівняння (16) близькі до розв'язків рівняння (29), що записуємо у вигляді розкладів (32), а саме

$$Y_{II}(\xi, \theta|x_0) = \frac{\Omega^2 \xi^2}{6} \left(1 - P_2(t) \right) + \Omega^2 \sum_{l=0}^2 c_{2l}(x_0) \xi^{2l} P_{2l}(t) + \Omega^2 \sum_{l=0}^2 \frac{b_{2l}(x_0)}{\xi^{1+2l}} P_{2l}(t), \quad (39)$$

де фігурують сталі інтегрування $c_{2l}(x_0)$ і $b_{2l}(x_0)$, які можна знайти з умов зшивання

$$Y_I(\xi, \theta|x_0) = Y_{II}(\xi, \theta|x_0), \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} Y_I(\xi, \theta|x_0) = \frac{\partial}{\partial \xi} Y_{II}(\xi, \theta|x_0)$$

за $\xi = \xi_1(x_0)$ за відомими сталими $a_{2l}(x_0)$, прирівнюючи коефіцієнти за однакових поліномів $P_{2l}(t)$. На відміну від праць [21, 23], ми явно враховуємо доданки, пропорційні до $P_4(t)$, і не використовуємо жодних підгінних параметрів.

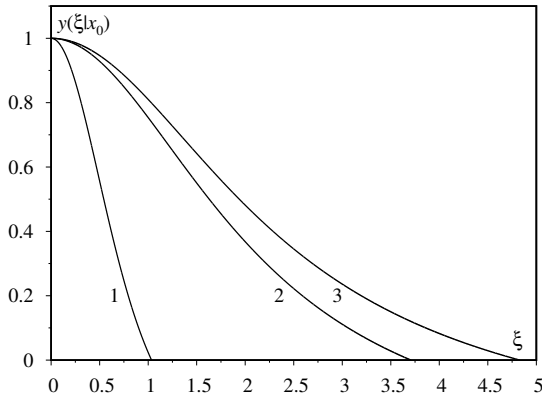


Рис. 1. Розв'язки рівняння (5), одержані числовим інтегруванням. Крива 1 відповідає $x_0 = 1$, крива 2 — $x_0 = 5$, крива 3 — $x_0 = 10$

Fig. 1. The solutions of equation (5), obtained numerically. Curve 1 corresponds to $x_0 = 1$, curve 2 — $x_0 = 5$, curve 3 — $x_0 = 10$

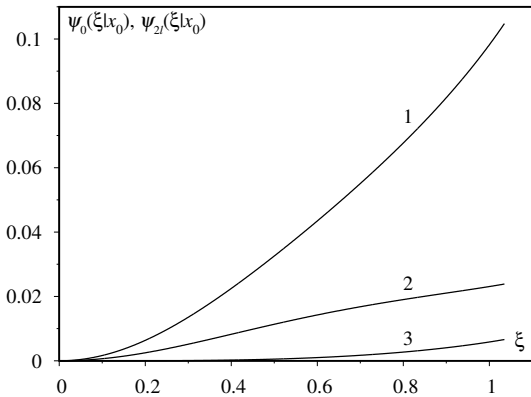


Рис. 2. Функції $\psi_0(\xi|x_0)$ (крива 1), $\psi_2(\xi|x_0)$ (крива 2), $\psi_4(\xi|x_0) \cdot 10$ (крива 3) за $x_0 = 1$

Fig. 2. Functions $\psi_0(\xi|x_0)$ (curve 1), $\psi_2(\xi|x_0)$ (curve 2), $\psi_4(\xi|x_0) \cdot 10$ (curve 3) at $x_0 = 1$

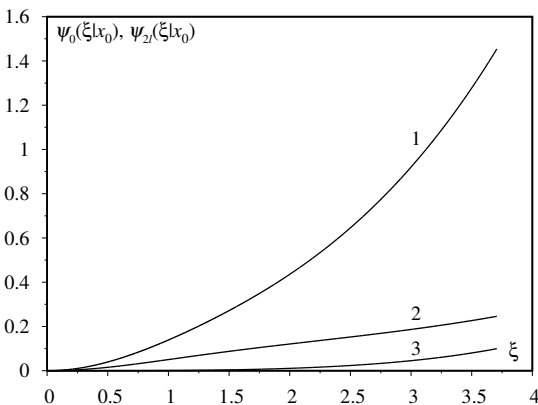


Рис. 3. Функції $\psi_0(\xi|x_0)$ (крива 1), $\psi_2(\xi|x_0)$ (крива 2), $\psi_4(\xi|x_0)$ (крива 3) при $x_0 = 5$

Fig. 3. Functions $\psi_0(\xi|x_0)$ (curve 1), $\psi_2(\xi|x_0)$ (curve 2), $\psi_4(\xi|x_0)$ (curve 3) at $x_0 = 5$

III. ВИЗНАЧЕННЯ СТАЛИХ ІНТЕГРУВАННЯ

Як і в роботах [24, 25] для обертових політроп, для знаходження сталих $a_{2l}(x_0)$ використаємо інтегральну форму рівняння рівноваги

$$Y_I(\xi, \theta|x_0) = 1 + \frac{\xi^2 \Omega^2}{6} (1 - P_2(t)) \quad (41)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{V_I} Q(\xi, \xi') \left\{ Y_I^2(\xi', \theta'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y_I(\xi', \theta'|x_0) \right\}^{3/2} d\xi'$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{V_{II}} Q(\xi, \xi') \left\{ Y_{II}^2(\xi', \theta'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y_{II}(\xi', \theta'|x_0) \right\}^{3/2} d\xi'$$

з ядром (34). Рівняння (41) еквівалентне рівнянню (16), при цьому V_I позначає об'єм внутрішньої частини, а V_{II} — об'єм периферії, інтегруємо за змінними (ξ', θ') за об'ємом зорі. Ділянка V_I є частиною об'єму обертового карлика, що всередині сфери Чандрасекара, а ділянка V_{II} — частина карлика, що за межами цієї сфери. Густина речовини в ділянці V_{II} мала, що дозволяє знехтувати інтегралом за V_{II} у рівнянні (41), який має порядок Ω^3 .

Підставляючи розв'язок (35) у рівняння (41) і нехтуючи при цьому другим інтегральним доданком, у лінійному наближенні за Ω^2 одержуємо рівність

$$y(\xi|x_0) + \Omega^2 \left\{ \psi_0(\xi|x_0) + \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t) \psi_{2l}(\xi|x_0) \right\}$$

$$= 1 + \frac{\xi^2 \Omega^2}{6} (1 - P_2(t)) + \frac{1}{4\pi} \int_{V_I} Q(\xi, \xi') \quad (42)$$

$$\times \left\{ \left[y^2(\xi'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi'|x_0) \right]^{3/2} + \Omega^2 \Phi(\xi'|x_0) \left[\psi_0(\xi'|x_0) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t') \psi_{2l}(\xi'|x_0) \right] \right\} d\xi'.$$

Інтегруємо за змінними (ξ', θ') по незаштрихованій ділянці рис. 4. При цьому $\xi_0(t')$ — рівняння поверхні карлика, $\xi_1(x_0)$ — радіус сфери Чандрасекара, $\xi_e(x_0)$ — екваторіальна відстань, а $\xi_p(x_0)$ — полярна. Ділянка V_I означена співвідношеннями

$$0 \leq \xi' \leq \xi_0(t') \text{ при } 1 \geq t' \geq t(x_0), \quad t(x_0) = \cos \theta(x_0), \quad (43)$$

$$0 \leq \xi' \leq \xi_1(x_0) \text{ при } 0 \leq t' \leq t(x_0),$$

де полярний кут $\theta(x_0)$ визначаємо перетином сфери Чандрасекара й поверхні $\xi_0(t')$, що близька до поверхні еліпсоїда обертання, тому

$$\xi_p(x_0) \{1 - e^2(x_0)[1 - t^2(x_0)]\}^{-1/2} \cong \xi_1(x_0), \quad (44)$$

де $e(x_0)$ — ексцентриситет еліпсоїда. Величини $\xi_e(x_0)$, $\xi_p(x_0)$ і $e(x_0)$ залежать від кутової швидкості Ω . Для

означеності наведемо також нерівність, що визначає ділянку V_{II} (затемненої):

$$\xi_1(x_0) \leq \xi' \leq \xi_0(t') \text{ при } 0 \leq t' \leq t(x_0). \quad (45)$$

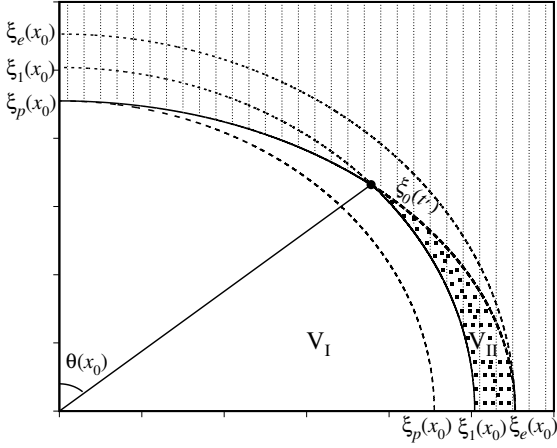


Рис. 4. Схематичне зображення четвертої частини меридіонального перетину карлика: V_I обмежена суцільною кривою та осями координат, V_{II} знаходиться між суцільною кривою та жирною пунктирною кривою

Fig. 4. Schematic representation of quarter part of the meridional section of white dwarf: V_I bounded by a solid curve and coordinate axes, V_{II} is located between a solid curve and a bold dotted line

Для спрощення рівності (42) ми використовуємо рівняння для $y(\xi|x_0)$ в інтегральній формі

$$y(\xi|x_0) = 1 + \int_0^\xi \left\{ \frac{(\xi')^2}{\xi} - \xi' \right\} \times \left\{ y^2(\xi'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi'|x_0) \right\}^{3/2} d\xi', \quad (46)$$

а також інтегральну форму рівняння для функції $\psi_0(\xi|x_0)$,

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi|x_0) &= -\frac{1}{4\pi} \int Q(\xi, \xi') \{1 - \Phi(\xi'|x_0)\psi_0(\xi'|x_0)\} d\xi' \\ &= -\int_0^\xi \left\{ \frac{(\xi')^2}{\xi} - \xi' \right\} \{1 - \Phi(\xi'|x_0)\psi_0(\xi'|x_0)\} d\xi', \end{aligned} \quad (47)$$

$$0 \leq \xi \leq \xi_1(x_0).$$

Далі розгляньмо розрахунок інтеграла

$$T(\xi, \theta|x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_I} Q(\xi, \xi') \left\{ y^2(\xi'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi'|x_0) \right\}^{3/2} d\xi', \quad (48)$$

який фігурує в правій частині рівності (42). Розкладаючи ядро $Q(\xi, \xi')$ за поліномами Лежандра, для ділянки $0 \leq \xi \leq \xi_p(x_0)$ одержуємо значення

$$T_1(\xi, \theta|x_0) = y(\xi|x_0) - 1 - A(\xi, \theta|x_0),$$

$$A(\xi, \theta|x_0) = \sum_{l \geq 1} \xi^{2l} P_{2l}(t) L_{2l}(x_0), \quad (49)$$

$$L_{2l}(x_0) = \int_{t(x_0)}^1 P_{2l}(t') dt' \int_{\xi_0(t')}^{\xi_1(x_0)} (\xi')^{1-2l} \left\{ y^2(\xi'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi'|x_0) \right\}^{3/2} d\xi'.$$

Для ділянки $\xi_p(x_0) \leq \xi \leq \xi_1(x_0)$

$$\begin{aligned} T_2(\xi, \theta|x_0) &= y(\xi|x_0) - 1 - A(\xi, \theta|x_0) \int_{t(x_0)}^1 dt' \int_{\xi_0(t')}^\xi \left\{ y^2(\xi'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi'|x_0) \right\}^{3/2} \left\{ \frac{(\xi')^2}{\xi} - \xi' \right\} d\xi' \\ &\quad - \sum_{l \geq 1} P_{2l}(t) \int_t^1 P_{2l}(t') dt' \int_{\xi_0(t')}^\xi \left\{ y^2(\xi'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi'|x_0) \right\}^{3/2} \left\{ (\xi')^{4l+1} - \xi^{4l+1} \right\} \xi^{-1-2l} (\xi')^{1-2l} d\xi'. \end{aligned} \quad (50)$$

При цьому $t > t(x_0)$, тому $1-t \sim \Omega^2$, $\xi_1(x_0) - \xi_0(t') \sim \Omega^2$, $\xi' - \xi_1(x_0) \sim \Omega^2$, через те обидва інтегральні доданки у формулі (50) є малими, пропорційними до Ω^6 . Це підстава для того, щоб знехтувати ними й використовувати наближення

$$T(\xi, \theta|x_0) \simeq y(\xi|x_0) - 1 - A(\xi, \theta|x_0) \quad (51)$$

у всій ділянці V_I . Інтеграл

$$\frac{1}{4\pi} \int_{V_I} Q(\xi, \xi') \Phi(\xi'|x_0) \psi_0(\xi'|x_0) d\xi' \quad (52)$$

з формули (42) запишемо у вигляді

$$\frac{1}{4\pi} \int_{V_1} Q(\xi, \xi') d\xi' - \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} Q(\xi, \xi') \{1 - \Phi(\xi'|x_0)\psi_0(\xi'|x_0)\} d\xi'. \quad (53)$$

Перший доданок формули (53) дорівнює $-\{v(\xi|x_0) - v(0|x_0)\}$, де $v(\xi|x_0)$ є безрозмірним гравітаційним потенціалом у точці з радіус-вектором ξ всередині ділянки V_1 , створеним однорідним розподілом речовини одиничної густини, а $v(0|x_0)$ – такий же потенціал на початку координат. Цю величину легко розрахувати:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{V_1} Q(\xi, \xi') d\xi' = -\frac{\xi^2}{6} - \frac{1}{2} \sum_{l \geq 1} P_{2l}(t) \xi^{2l} I_{2l}(x_0), \quad (54)$$

де

$$I_2(x_0) = -2 \int_{t(x_0)}^1 P_2(t') \{\ln \xi_0(t') - \ln \xi_1(x_0)\} dt', \quad (55)$$

$$I_{2l}(x_0) = (l-1)^{-1} \int_{t(x_0)}^1 P_{2l}(t') \{[\xi_0(t')]^{2-2l} - [\xi_1(x_0)]^{2-2l}\} dt'$$

за $l \geq 2$. Другий доданок формули (53) дорівнює

$$\psi_0(\xi|x_0) - \sum_{l \geq 1} P_{2l}(t) \xi^{2l} D_{2l}(x_0), \quad (56)$$

$$D_{2l}(x_0) = \int_{t(x_0)}^1 dt' P_{2l}(t') \int_{\xi_0(t')}^{\xi_1(x_0)} (\xi')^{1-2l} \{\Delta_{\xi'} \psi_0(\xi'|x_0)\} dt'.$$

Співвідношення (46)–(56) дозволяють записати рівність (42) так:

$$\sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t) \psi_{2l}(\xi|x_0) = -\frac{\xi^2}{6} P_2(t) - \sum_{l \geq 1} P_{2l}(t) \xi^{2l} \left\{ \frac{1}{2} I_{2l}(x_0) + \frac{L_{2l}(x_0)}{\Omega^2} + D_{2l}(x_0) \right\} + \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} Q(\xi, \xi') \Phi(\xi'|x_0) \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t') \psi_{2l}(\xi'|x_0) d\xi'. \quad (57)$$

Знову розкладаючи ядро в ряди за поліномами Лежандра, інтеграл з рівняння (57) зобразимо у вигляді

$$\sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t) \frac{1}{4l+1} \left\{ \xi^{1-2l} \int_0^\xi (\xi')^{2+2l} F_{2l}(\xi'|x_0) d\xi' + \xi^{2l} \int_\xi^{\xi_1(x_0)} (\xi')^{1-2l} F_{2l}(\xi'|x_0) d\xi' \right\} - \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t) \xi^{2l} \int_{t(x_0)}^1 P_{2l}^2(t') dt' \int_{\xi_0(t')}^{\xi_1(x_0)} (\xi')^{1-2l} F_{2l}(\xi'|x_0) d\xi' - \sum_{l, m \geq 1} (1 - \delta_{l,m}) a_{2l}(x_0) P_{2m}(t) \xi^{2m} S_{2l, 2m}(x_0). \quad (58)$$

Тут уведено позначення

$$F_{2l}(\xi|x_0) \equiv \Phi(\xi|x_0)\psi_{2l}(\xi|x_0) = \frac{2l(l+1)}{\xi^2} \psi_{2l}(\xi|x_0) - \Delta_\xi \psi_{2l}(\xi|x_0) \quad (59)$$

згідно з рівнянням для функції $\psi_{2l}(\xi|x_0)$, а також

$$S_{2l, 2m}(x_0) = \int_{t(x_0)}^1 P_{2l}(t') P_{2m}(t') dt' \int_{\xi_0(t')}^{\xi_1(x_0)} (\xi')^{1-2m} F_{2l}(\xi'|x_0) d\xi'. \quad (60)$$

Інтегруючи частинами за змінною ξ' , суму перших двох рядів формули (58) можна записати так:

$$\sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t) \psi_{2l}(\xi|x_0) - \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t) \xi^{2l} S_{2l, 2l}(x_0), \quad (61)$$

де

$$\begin{aligned}
 S_{2l,2l}(x_0) &= (4l + 1)^{-1} \xi_1^{-2l} \left\{ (2l + 1)\psi_{2l}(\xi_1|x_0) + \xi_1 \frac{d\psi_{2l}(\xi_1|x_0)}{d\xi_1} \right\} \\
 &+ \int_{t(x_0)}^1 P_{2l}^2(t) \left\{ \xi_0^{-2l} \left[(2l + 1)\psi_{2l}(\xi_0|x_0) + \xi_0 \frac{d\psi_{2l}(\xi_0|x_0)}{d\xi_0} \right] \right. \\
 &\left. - \xi_1^{-2l} \left[(2l + 1)\psi_{2l}(\xi_1|x_0) + \xi_1 \frac{d\psi_{2l}(\xi_1|x_0)}{d\xi_1} \right] \right\} dt,
 \end{aligned} \tag{62}$$

при цьому $\xi_1 \equiv \xi_1(x_0)$, $\xi_0 \equiv \xi_0(t')$. Підставляючи одержаний вираз у рівняння (57), бачимо, що в ньому члени типу $a_{2l}(x_0)P_{2l}(t)\psi_{2l}(\xi|x_0)$ взаємно скорочуються і це рівняння набуває такої форми:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{l \geq 1} P_{2l}(t)\xi^{2l} \left\{ a_{2l}(x_0)S_{2l,2l}(x_0) + \sum_{m \geq 1} (1 - \delta_{m,l})a_{2m}(x_0)S_{2m,2l}(x_0) \right\} \\
 &= -\frac{\xi^2}{6} P_2(t) - \sum_{l \geq 1} P_{2l}(t)\xi^{2l} \left\{ \frac{I_{2l}(x_0)}{2} + \frac{L_{2l}(x_0)}{\Omega^2} + D_{2l}(x_0) \right\}.
 \end{aligned} \tag{63}$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових добутків $P_{2l}(t)\xi^{2l}$ у лівій і правій частинах цієї рівності, одержуємо систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь для сталих інтегрування $a_{2l}(x_0)$:

$$\begin{aligned}
 a_2(x_0)S_{2,2}(x_0) + \sum_{m \geq 2} a_{2m}(x_0)S_{2m,2}(x_0) &= -\frac{1}{6} \left(1 + 3I_2(x_0) \right) - \frac{L_2(x_0)}{\Omega^2} - D_2(x_0), \\
 a_{2l}(x_0)S_{2l,2l}(x_0) + \sum_{m \geq 1} a_{2m}(x_0)(1 - \delta_{m,l})S_{2m,2l}(x_0) &= -\frac{I_{2l}(x_0)}{2} - \frac{L_{2l}(x_0)}{\Omega^2} - D_{2l}(x_0),
 \end{aligned} \tag{64}$$

за $l \geq 2$.

За відомими сталими $a_{2l}(x_0)$ з умов зшивання (40) знаходимо вирази для сталих інтегрування, що фігурують у функції $Y_{II}(\xi, \theta|x_0)$:

$$\begin{aligned}
 c_0(x_0) &= \left\{ \psi_0(\xi_1|x_0) + \xi_1 \psi'_0(\xi_1|x_0) \right\} - \frac{\xi_1^2}{2} + \xi_1 \frac{y'(\xi_1|x_0)}{\Omega^2}, \\
 b_0(x_0) &= \xi_1 \left\{ \psi_0(\xi_1|x_0) - \frac{\xi_1^2}{6} - c_0(x_0) \right\}, \\
 c_2(x_0) &= \frac{1}{6} + \frac{a_2(x_0)}{5\xi_1^2} \left\{ 3\psi_2(\xi_1|x_0) + \xi_1 \psi'_2(\xi_1|x_0) \right\}, \\
 b_2(x_0) &= \xi_1^3 \left\{ a_2(x_0)\psi_2(\xi_1|x_0) + \frac{\xi_1^2}{6} - \xi_1^2 c_2(x_0) \right\}, \\
 c_4(x_0) &= \frac{a_4(x_0)}{9\xi_1^4} \left\{ 5\psi_4(\xi_1|x_0) + \xi_1 \psi'_4(\xi_1|x_0) \right\}, \\
 b_4(x_0) &= \xi_1^5 \left\{ a_4(x_0)\psi_4(\xi_1|x_0) - c_4(x_0)\xi_1^4 \right\}, \quad \xi_1 \equiv \xi_1(x_0), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{65}$$

Фактично системи рівнянь (64) і (65) не є незалежними, бо коефіцієнти $S_{2l,2l}(x_0)$, $S_{2m,2l}(x_0)$, $L_{2l}(x_0)$, $D_{2l}(x_0)$ та $I_{2l}(x_0)$ ($l \geq 1$) залежать від форми поверхні карлика $\xi_0(t)$, яку визначаємо функціями $Y_I(\xi, \theta|x_0)$ і

$Y_{II}(\xi, \theta|x_0)$. Тому систему (64), (65) розв'язуємо ітераційним методом. У нульовому наближенні за поверхню обертового карлика приймаємо сферу Чандрасекара ($\xi_0(t) = \xi_1(x_0)$). У цьому наближенні тільки коефіцієнти $S_{2l,2l}(x_0)$ відмінні від нуля, а сталу $a_2^{(0)}(x_0)$ визначаємо виразом

$$\begin{aligned}
 a_2^{(0)}(x_0) &= -\{6S_{2,2}(x_0)\}^{-1} \\
 &= -\frac{5}{6} \xi_1^2(x_0) \left\{ 3\psi_2(\xi_1|x_0) + \xi_1 \psi'_2(\xi_1|x_0) \right\}^{-1}
 \end{aligned} \tag{66}$$

і не залежить від кутової швидкості. Усі інші сталі $a_{2l}^{(0)}(x_0)$ за $l \geq 2$ дорівнюють нулеві. Таке наближення відповідає наближенню Мілна-Чандрасекара в теорії політроп і придатне для малих кутових швидкостей. Із системи (65) знаходимо відмінні від нуля сталі $c_0^{(0)}(x_0)$, $b_0^{(0)}(x_0)$, $c_2^{(0)}(x_0)$, $b_2^{(0)}(x_0)$. Знайдені сталі визначають нульове наближення функцій $Y_I^{(0)}(\xi, \theta|x_0)$ і $Y_{II}^{(0)}(\xi, \theta|x_0)$. Оскільки поверхня обертового карлика близька до поверхні еліпсоїда обертання, то в наступній ітерації за $\xi_0(t)$ приймемо поверхню такого еліпсоїда, а його полярний та екваторіальний радіуси визначимо з умов $Y_I^{(0)}(\xi, 0|x_0) = 0$ та $Y_{II}^{(0)}(\xi, \pi/2|x_0) = 0$ відповідно. У такому наближенні коефіцієнти $I_{2l}(x_0)$, $L_{2l}(x_0)$, $D_{2l}(x_0)$ та $S_{2m,2l}(x_0)$ за $l \geq 1$ вже відмінні від нуля, а коефіцієнти $S_{2l,2l}(x_0)$ уточнюються. Із системи

(64) знаходимо сталі $a_2^{(1)}(x_0)$, $a_4^{(1)}(x_0)$, ..., що дає змогу одержати розв'язки для сталих $b_{2l}^{(1)}(x_0)$, $c_{2l}^{(1)}(x_0)$. Знову уточнюємо рівняння поверхні $\xi_0(t)$ і т. д. Як показують розрахунки, достатньо 4–5 ітерацій. У ре-

зультаті знаходимо функції $Y_I(\xi, \theta|x_0)$ і $Y_{II}(\xi, \theta|x_0)$, у яких фігурують сталі інтегрування, залежні від кутової швидкості, а також форму поверхні обертового карлика, а не тільки полярну й екваторіальну відстані, як функції Ω та x_0 .

IV. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЕРТОВИХ КАРЛИКІВ

Визначаючи поверхню обертового карлика з умови $Y(\xi, \theta|x_0) = 0$, одержуємо вираз для його об'єму як функцію параметрів x_0 і Ω :

$$V(x_0|\Omega) = V(x_0|0)\delta(x_0|\Omega), \quad V(x_0|0) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R_0 \xi_1(x_0)}{\mu_e \varepsilon_0} \right)^3, \quad (67)$$

$$\delta(x_0|\Omega) = \int_0^1 \left(\frac{\xi_0(t)}{\xi_1(x_0)} \right)^3 dt.$$

Масу зорі обчислюємо інтегруванням густини речовини $\rho(\mathbf{r})$ за об'ємом

$$M(x_0|\Omega) = \frac{m_u \mu_e}{3\pi^2} \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^3 \varepsilon_0^3 \lambda^3(x_0) \int_V \left(Y^2(\xi, \theta|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta|x_0) \right)^{3/2} d\xi = \frac{M_0}{\mu_e^2} \mathcal{M}(x_0|\Omega), \quad (68)$$

$$\mathcal{M}(x_0|\Omega) = \int_0^1 dt \int_0^{\xi_0(t)} \xi^2 \left[Y^2(\xi, \theta|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta|x_0) \right]^{3/2} d\xi.$$

Момент інерції відносно осі обертання

$$I(x_0|\Omega) = \int_V \rho(\mathbf{r}) r^2 \sin^2 \theta d\mathbf{r} = \frac{M_0 R_0^2}{\mu_e^4} \tilde{\mathcal{J}}(x_0|\Omega), \quad (69)$$

$$\tilde{\mathcal{J}}(x_0|\Omega) = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \int_0^1 (1-t^2) dt \int_0^{\xi_0(t)} \xi^4 \left(Y^2(\xi, \theta|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta|x_0) \right)^{3/2} d\xi.$$

Величина прискорення на екваторі

$$g_e(x_0|\Omega) = \frac{GM(x_0|\Omega)}{R_e^2} - \omega^2 R_e = \frac{GM_0}{R_0^2} \left\{ \frac{\mathcal{M}(x_0|\Omega)}{\xi_e^2} - \frac{\xi_e}{2} \Omega^2 \right\} \varepsilon_0^2. \quad (70)$$

Умова $g_e(x_0|\Omega) = 0$ визначає межу стійкості зорі щодо обертання — максимальне значення кутової швидкості для заданого значення параметра релятивізму $\Omega_{\max}(x_0)$.

Повна енергія карлика дорівнює сумі

$$E(x_0|\Omega) = W(x_0|\Omega) + E_{\text{кін}}(x_0|\Omega) + E_{\text{об}}(x_0|\Omega), \quad (71)$$

де $W(x_0|\Omega)$ — енергія гравітаційної взаємодії, $E_{\text{кін}}(x_0|\Omega)$ — кінетична енергія електронної підсистеми без обертання, $E_{\text{об}}(x_0|\Omega)$ — енергія обертання карлика як цілого. Згідно з формулою (2) енергія гравітаційної взаємодії

$$W(x_0|\Omega) = -\frac{E_0 \varepsilon_0}{2\mu_e^3} \frac{1}{(4\pi)^2} \iint_V \left\{ Y^2(\xi_1, \theta_1|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi_1, \theta_1|x_0) \right\}^{3/2} \times \left\{ Y^2(\xi_2, \theta_2|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi_2, \theta_2|x_0) \right\}^{3/2} |\xi_1 - \xi_2|^{-1} d\xi_1 d\xi_2, \quad (72)$$

де

$$E_0 = G \frac{M_0^2}{R_0} = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \frac{h^3 c^7 m_0}{G^{3/2} m_u^3} \quad (73)$$

— природний масштаб енергії карлика.

Для розрахунку середнього значення кінетичної енергії електронної підсистеми об'ємну густину енергії запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{r}) &= \frac{2}{V} \sum_{\mathbf{p}} E_p n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F(\mathbf{r})} p^2 \left\{ [(m_0 c^2)^2 + p^2 c^2]^{1/2} - m_0 c^2 \right\} dp \\ &= \frac{m_0^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{x(\mathbf{r})} \eta^2 \{ (1 + \eta^2)^{1/2} - 1 \} d\eta = \frac{m_0^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \left\{ x^3(\mathbf{r}) \left[\sqrt{1 + x^2(\mathbf{r})} - 1 \right] - \frac{1}{8} \mathcal{F}(x(\mathbf{r})) \right\},\end{aligned}\quad (74)$$

де $n_p(\mathbf{r})$ — локальний розподіл Фермі, $\eta = p_F/m_0 c$, $x(\mathbf{r})$ — локальне значення параметра релятивізму, а функція $\mathcal{F}(x)$ визначена формулою (1). Кінетичну енергію всієї (неоднорідної) електронної підсистеми одержуємо інтегруванням за об'ємом зорі

$$E_{\text{кін}}(x_0|\Omega) = \int_V \varepsilon(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{E_0}{\varepsilon_0^3 \mu_e^3} \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ x^3(\boldsymbol{\xi}) \left[\sqrt{1 + x^2(\boldsymbol{\xi})} - 1 \right] - \frac{1}{8} \mathcal{F}(x(\boldsymbol{\xi})) \right\} d\boldsymbol{\xi}, \quad (75)$$

де згідно з означенням (15)

$$x(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon_0 \left\{ Y^2(\xi, \theta) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta) \right\}^{1/2}. \quad (76)$$

Гравітаційну енергію $W(x_0|\Omega)$ теж можна записати у вигляді двократного інтеграла, як і $E_{\text{кін}}(x_0|\Omega)$, якщо використати інтегральну форму рівняння (41). Згідно з цим рівнянням та означенням ядра (34)

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ Y^2(\xi_2, \theta_2) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi_2, \theta_2) \right\}^{3/2} |\xi_1 - \xi_2|^{-1} d\xi_2 = Y(\xi_1, \theta_1) - 1 - \frac{\xi_1^2 \Omega^2}{6} \left(1 - P_2(t_1) \right) + C(x_0|\Omega), \quad (77)$$

де

$$C(x_0|\Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ Y^2(\xi, \theta) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta) \right\}^{3/2} \frac{d\xi}{\xi}. \quad (78)$$

Співвідношення (77), (78) дозволяють виразити $W(x_0|\Omega)$ через двократні інтеграли:

$$\begin{aligned}W(x_0|\Omega) &= -\frac{E_0 \varepsilon_0}{2\mu_e^3} \frac{1}{4\pi} \int \left\{ Y^2(\xi, \theta) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta) \right\}^{3/2} \left\{ Y(\xi, \theta) - \frac{\xi^2 \Omega^2}{6} \left(1 - P_2(t) \right) - 1 + C(x_0|\Omega) \right\} d\xi \\ &= -\frac{E_0 \varepsilon_0}{2\mu_e^3} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int Y(\xi, \theta) \left[Y^2(\xi, \theta) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta) \right]^{3/2} d\xi + [C(x_0|\Omega) - 1] \mathcal{M}(x_0|\Omega) - \frac{\Omega^2}{2} \tilde{\mathcal{J}}(x_0|\Omega) \varepsilon_0^2 \right\}.\end{aligned}\quad (79)$$

Енергія обертання зорі як цілого

$$E_{\text{об}}(x_0|\Omega) = \frac{I(x_0|\Omega) \omega^2}{2} = \frac{E_0 \Omega^2}{\mu_e^3} \frac{\tilde{\mathcal{J}}(x_0|\Omega)}{4} \varepsilon_0^3. \quad (80)$$

Повну енергію обертового карлика можна подати так:

$$\begin{aligned}E(x_0|\Omega) &= \frac{E_0}{\mu_e^3} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{16\pi} \int Y(\xi, \theta) \left\{ Y^2(\xi, \theta) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta) \right\}^{3/2} d\xi \right. \\ &\quad - \frac{\varepsilon_0}{2} \left[C(x_0|\Omega) - 1 \right] \mathcal{M}(x_0|\Omega) - \frac{\mathcal{M}(x_0|\Omega)}{4} + \frac{\varepsilon_0^3}{2} \Omega^2 \tilde{\mathcal{J}}(x_0|\Omega) \\ &\quad + \frac{3}{32\pi} \int \left[(1 + \varepsilon_0 Y(\xi, \theta)) \left(Y^2(\xi, \theta) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta) \right)^{1/2} \frac{1}{\varepsilon_0^2} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\varepsilon_0^3} \ln \left[1 + \varepsilon_0 Y(\xi, \theta) + \varepsilon_0 \left(Y^2(\xi, \theta) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta) \right)^{1/2} \right] \right] d\xi \right\} = \frac{E_0}{\mu_e^3} \varepsilon(x_0|\Omega).\end{aligned}\quad (81)$$

За відсутності обертання з цього співвідношення одержуємо повну енергію карлика в моделі Чандрасекара. Використовуючи рівняння (46) за $\xi = \xi_1(x_0)$, знаходимо, що

$$C(x_0) \equiv C(x_0|0) = \frac{\mathcal{M}(x_0)}{2\xi_1(x_0)} + 1, \quad (82)$$

через те

$$\begin{aligned} E(x_0|0) = & \frac{E_0}{\mu_e^3} \left\{ -\frac{\mathcal{M}(x_0)}{4} - \frac{\mathcal{M}^2(x_0)\varepsilon_0}{2\xi_1(x_0)} + \frac{\varepsilon_0}{4} \int_0^{\xi_1(x_0)} \xi^2 y(\xi) \left(y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right)^{3/2} d\xi \right. \\ & + \frac{3}{8\varepsilon_0^2} \int_0^{\xi_1(x_0)} \xi^2 (1 + \varepsilon_0 y(\xi)) \left(y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right)^{1/2} d\xi \\ & \left. - \frac{3}{8\varepsilon_0^3} \int_0^{\xi_1(x_0)} \xi^2 \ln \left[1 + \varepsilon_0 y(\xi) + \varepsilon_0 \left(y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right)^{1/2} \right] d\xi \right\}, \quad (83) \end{aligned}$$

де $\mathcal{M}(x_0) \equiv \mathcal{M}(x_0|0)$. Функція $E(x_0|0)$ є від'ємною монотонно спадною функцією параметра x_0 з асимптотикою

$$E(x_0|0) \underset{x_0 \gg 1}{\Rightarrow} -N_e(x_0)m_0c^2, \quad (84)$$

де

$$N_e(x_0) = \frac{\mathcal{M}(x_0)}{m_u \mu_e}, \quad (85)$$

визначає кількість електронів у карлику.

В. РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ХАРАКТЕРИСТИК КАРЛИКА В МОДЕЛІ З ОСЬОВИМ ОБЕРТАННЯМ

На основі розв'язків (35) і (39) ми виконали розрахунки характеристик моделі з осьовим обертанням в ділянці параметрів $1 \leq x_0 \leq 24$, $0 \leq \Omega < \Omega_{\max}(x_0)$. У розкладі (35) враховувано доданки, пропорційні $P_2(t)$ і $P_4(t)$. Одержані результати наведено в таблицях Додатку. Табл. 1 ілюструє залежність сталої інтегрування $a_2(x_0)$ від параметрів моделі. Вона від'ємна, має слабку залежність від кутової швидкості, але суттєво залежить від параметра релятивізму x_0 . Стала $a_4(x_0)$ є додатною монотонно зростаючою функцією кутової швидкості, дуже малою в ділянці малих кутових швидкостей, а значення порядку одиниці приймає лише за досить великих Ω і невеликих значень x_0 (див. табл. 2).

У табл. 3 наведено результати розрахунку маси карлика в одиницях M_0/μ_e^2 для значень $2 \leq x_0 \leq 24$ з кроком $\Delta x_0 = 2$ у всій ділянці зміни кутової швидкості для заданого x_0 . Маса є монотонно зростаючою функцією параметрів x_0 і Ω . У $\Omega = 0$ вона має асимптотикою 2.01824... за $x_0 \gg 1$. Як видно з табл. 3, за $x_0 = 24$ в околі $\Omega_{\max}(x_0)$ маса дорівнює 2.07972..., так що відносне збільшення її за рахунок обертання близьке до 4%. Однак максимального відносного збільшення маси під впливом обертання досягаємо за

малих значень x_0 , що відповідає карликам невеликих і проміжних мас: за $x_0 = 2$ максимальне збільшення маси становить 10%, за $x_0 = 10$ воно дорівнює 5% і т. д. Звідси випливає, що обмеження на максимальну масу визначається величиною кутової швидкості $\Omega_{\max}(x_0)$ за $x_0 \gg 1$, коли максимальна маса може перевищувати межу Чандрасекара приблизно на 4%.

Момент інерції відносно осі обертання в одиницях $M_0 R_0^2 / \mu_e^4$ (табл. 4) є монотонно спадною функцією параметра x_0 і монотонно зростаючою функцією кутової швидкості. Відносне збільшення його під впливом обертання дорівнює близько 30% за $x_0 = 2$; 20% за $x_0 = 10$; 15% за $x_0 = 20$ за $\Omega_{\max}(x_0)$.

Безрозмірні значення екваторіального й полярного радіусів у шкалі $\lambda(x_0) = R_0 [\mu_e \varepsilon_0(x_0)]^{-1}$ наведено в табл. 5 і 6. Тому $\xi_e(x_0, \Omega)$ і $\xi_p(x_0, \Omega)$ є монотонно зростаючими функціями параметра x_0 . При цьому $\xi_e(x_0, \Omega)$ — монотонно зростаюча функція Ω , а $\xi_p(x_0, \Omega)$ — монотонно спадна. У шкалі R_0 значення безрозмірних радіусів $\xi_{e(p)}(x_0, \Omega) \cdot [\mu_e \varepsilon_0(x_0)]^{-1}$ — монотонно зростаючі функції параметра x_0 за $x_0 < \sqrt{3}$, і монотонно спадні в ділянці $x_0 > \sqrt{3}$. Межу поділу ділянок параметра x_0 визначаємо умовою $\varepsilon_0(x_0) = 1$.

У табл. 7 подано залежність від параметрів моделі прискорення вільного падіння на екваторі карлика в одиницях GM_0/R_0^2 згідно з формулою (70). Як видно з таблиці, $g_e(x_0, \Omega)$ є монотонно зростаючою функцією параметра релятивізму x_0 і монотонно спадною функцією кутової швидкості Ω . Максимальне значення кутової швидкості $\Omega_{\max}(x_0)$ визначаємо з умови $g_e(x_0, \Omega_{\max}(x_0)) = 0$.

Ми вперше розраховували залежність повної енергії карлика від параметрів x_0 і Ω . Безрозмірна енергія (в одиницях $GM_0^2 [R_0 \mu_e^3]^{-1}$) показана в табл. 8. Вона є монотонно спадною від'ємною функцією параметрів моделі. Як видно з таблиці, відносна зміна енергії під впливом обертання зменшується зі збільшенням параметра x_0 : за $x_0 = 2$ вона становить близько 14%, а за $x_0 = 24$ лише 11%. Звідси випливає, що енергія

набагато чутливіша до впливу обертання, ніж маса.

Як видно з таблиць, за фіксованого значення параметра релятивізму зростає залежність характеристик карлика від кутової швидкості в околі її максимального значення. Через те найбільші значення Ω , подані в таблицях, фактично є дещо меншими від максимального значення для заданого x_0 . Найсильнішу залежність має прискорення вільного падіння на екваторі. Екстраполюючи одержану залежність $g_e(x_0|\Omega)$ до нульового значення, одержуємо максимальні значення безрозмірної кутової швидкості $\Omega_{\max}(x_0)$, наведені в табл. 9. Там же подано також максимальні значення спостережуваної кутової швидкості згідно з формулою (17)

$$\left(\frac{2}{\mu_e}\right)^{1/2} \omega_{\max}(x_0) = \Omega_{\max}(x_0) \left(\frac{m_0}{m_u}\right)^{1/2} \frac{c}{R_0} \varepsilon_0^{3/2}(x_0), \quad (86)$$

де c — швидкість світла.

У роботі [22] чисельним методом розраховано характеристики карликів малих і проміжних мас (маса, екваторіальний та полярний радіуси, прискорення на екваторі, момент інерції відносно осей координат) лише для деяких значень параметрів з ділянки

$$0 \leq x_0 \leq 6.245 \dots, \quad 0 \leq \Omega < \Omega_{\max}(x_0), \quad (87)$$

що відповідає карликам із малими й проміжними масами. Відхилення значень, які розраховували ми, від результатів роботи [22] за малих значень кутової швидкості дуже малі. У ділянці $0 \leq \Omega < 0.5\Omega_{\max}(x_0)$ відхилення менші від 1% для всіх значень параметра x_0 . Зі збільшенням x_0 відхилення зменшується: за $x_0 = 4.359$ відхилення значень маси менше від 1%; за $x_0 = 6.245$ відносно відхилення маси за $\Omega_{\max}(x_0)$ становить 0.25%, а відхилення екваторіального радіуса при цьому x_0 менше від 1%.

VI. УРАХУВАННЯ МІЖЧАСТИНКОВИХ ВЗАЄМОДІЙ

Роль міжчастинкових кулонівських взаємодій належить до найменш досліджених питань у теорії вироджених карликів. Хоча вони мають дуже просту електронну структуру, побудова рівняння стану ускладнюється тим, що завдяки високим густинам речовини електронна підсистема карлика є релятивістською. У другій половині минулого століття були запропоновані наближені методи розрахунку характеристик моделі електронної рідини — електронейтральної однорідної моделі N_e взаємодійних нерелятивістських електронів на фоні рівномірно розподіленого позитивного заряду в об'ємі V в ділянці густин, що відповідають реальним металам за нульового тиску. Один із цих методів — так званий базисний підхід, що ґрунтується на підсумовуванні безмежних рядів діаграм теорії збурень, побудованих на дво-, три- і чотиричастинкових кореляційних функціях ідеальної виродженої моделі електронів [28, 29]. Цей підхід був узагальнений на релятивістський вироджений електронний

газ у роботах [30, 31]. Енергія основного стану просторово однорідної електрон-ядерної моделі з релятивістською повністю виродженою електронною підсистемою має таке зображення:

$$E = E_e + E_1 + E_2. \quad (88)$$

Тут E_e — енергія електронної підсистеми,

$$E_1 = \frac{z^2}{2V} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_{\mathbf{q}} \{S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} - N_n\} - \quad (89)$$

енергія взаємодії точкових ядер на фоні однорідного розподіленого негативного заряду, де $V_{\mathbf{q}} = 4\pi e^2/q^2$, $N_n = N_e z^{-1}$ — кількість ядер, $S_{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{N_n} \exp\{i[\mathbf{q}, \mathbf{R}_j]\}$ — структурний фактор ядерної підсистеми,

$$E_2 = - \sum_{n \geq 2} \frac{z^n}{V^n n!} \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n \neq 0} \times V_{\mathbf{q}_1} \dots V_{\mathbf{q}_n} S_{\mathbf{q}_1} \dots S_{\mathbf{q}_n} \mu_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \delta_{\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_n, 0} \quad (90)$$

— внесок електрон-ядерних взаємодій, у якому $\mu_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ — n -частинкові статичні кореляційні функції електронної підсистеми в імпульсному зображенні. У теорії металів E_2 називають енергією зонної структури. Величину E_1 можна записати так:

$$E_1 = -\frac{1}{2} N_e m_0 c^2 \eta^{-1} d \alpha_0 z^{2/3} x, \quad (91)$$

де $\alpha_0 = e^2/\hbar c$ — стала тонкої структури, $\eta = (9\pi/4)^{1/3}$, x — параметр релятивізму, а значення коефіцієнта d залежить від просторового розподілу ядер: для ґратки Вігнера–Зейтца [32] $d = 1.8$; для просторової кубічної ґратки $d = 1.760$; для гексагональної щільно упакованої $d = 1.79168$; для кубічних ґраноцентрованої та об'ємцентрованої $d = 1.79186$ та 1.79172 відповідно [33, 34].

Енергію електронної підсистеми традиційно записуємо так:

$$E_e = E_e^{(0)} + E_{\text{HF}} + E_{\text{cor}}, \quad (92)$$

де

$$E_e^{(0)} = N_e m_0 c^2 \mathcal{E}(x),$$

$$\mathcal{E}(x) = (2x)^{-3} \{3x(1+x^2)^{1/2}(1+2x^2) - 8x^3 - 3\ln[x + (1+x^2)^{1/2}]\} \quad (93)$$

є енергією ідеальної моделі електронів,

$$E_{\text{HF}} = -\frac{3}{4\pi} N_e \alpha_0 m_0 c^2 x \quad (94)$$

— внесок міжелектронних взаємодій у першому порядку теорії збурень (внесок ідеальних кореляцій). Кореляційну енергію (внесок неідеальних кореляцій)

можна апроксимувати таким виразом [35]:

$$E_{\text{cor}} = N_e m_0 c^2 \alpha_0^2 \mathcal{E}_{\text{cor}}(x),$$

$$\mathcal{E}_{\text{cor}}(x) = -\frac{b_0}{2} \int_0^x \frac{b_1 a + t^{1/2}}{t^{3/2} + t b_1 a + t^{1/2} b_2 a^2 + b_3 a^3} \times \frac{1 + a_1 t + a_2 t^2}{1 + d_0 t} dt, \quad (95)$$

$$a = (\alpha_0 \eta)^{1/2}, \quad a_1 = 2.25328, \quad a_2 = 4.87991, \quad d_0 = 0.92402, \\ b_0 = 0.062181, \quad b_1 = 9.81379, \quad b_2 = 2.82214, \quad b_3 = 0.69699.$$

За $a_1 = a_2 = d_0 = 0$ вираз (95) збігається з кореляційною енергією нерелятивістської виродженої електронної рідини [36].

Для простої кубічної ґратки ядер i в наближенні двоелектронних кореляцій доданок (90) апроксимуємо виразом [35]

$$E_2 = N_e m_0 c^2 \alpha_0^2 z^{4/3} \mathcal{E}_2(x|z), \quad (96)$$

$$\mathcal{E}_2(x|z) = -z^{1/6} \{c_0 + c_1 x + c_2 x^2\} \{1 + d_1 x\}^{-1}$$

за $c_0 = 0.10582$, $c_1 = 0.11136$, $c_2 = 0.15535$, $d_1 = 1.29493$. Як видно з формул (94)–(96), усі внески, зумовлені взаємодією, від'ємні, а за $x \gg 1$ вони пропорційні до параметра неідеальності. Внески першого порядку теорії збурень (E_{HF} і E_1) пропорційні α_0 , а кореляційні внески пропорційні α_0^2 і вищим степеням сталої тонкої структури.

Співвідношення $P = -dE/dV$ дає змогу записати рівняння стану однорідної неідеальної електрон-ядерної моделі так:

$$P(x|z) = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3h^3} \{ \mathcal{F}(x) - f(x|z) \},$$

$$f(x|z) = \alpha_0 \left\{ \frac{2}{\pi} + \frac{4d}{3\eta} z^{2/3} \right\} x^4 \quad (97)$$

$$- \frac{8}{3} \alpha_0^2 \left\{ \frac{d\mathcal{E}_{\text{cor}}(x)}{dx} + z^{4/3} \frac{d\mathcal{E}_2(x|z)}{dx} \right\} x^4.$$

Похідні $d\mathcal{E}_{\text{cor}}(x)/dx$ і $d\mathcal{E}_2(x|z)/dx$ є від'ємними, тому функція $f(x|z)$ додатна, через те взаємодії між частинками зменшують внутрішній тиск. Уперше внески міжчастинкових взаємодій до рівняння стану наближено були обчислені в роботі [37]. При цьому внески $\mathcal{E}_{\text{cor}}(x)$ і $\mathcal{E}_2(x|z)$ розраховували для нерелятивістської моделі: $\mathcal{E}_{\text{cor}}(x)$ — у наближенні хаотичних фаз [32], а $\mathcal{E}_2(x|z)$ — у наближенні Томаса–Фермі [38].

Беручи до уваги, що впливи обертання й міжчастинкових взаємодій до певної міри компенсуються, обидва ці фактори можна враховувати за теорією збурень. У моделі без обертання, але з кулонівськими взаємодіями фігурують три параметри: x_0 , μ_e і z . Використовуючи рівняння стану (97) у локальному наближенні, для цієї моделі одержуємо такий аналог рівняння (5):

$$\Delta_\xi y(\xi|z|x_0) = - \left\{ y^2(\xi|z|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|z|x_0) \right\}^{3/2} + \hat{L}y(\xi|z|x_0), \quad (98)$$

$$\hat{L}y(\xi|z|x_0) = \varphi_1(\xi|z) \Delta_\xi \left[y^2(\xi|z|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|z|x_0) \right]^{1/2} + \varphi_2(\xi|z) \left\{ \frac{d}{d\xi} \left[y^2(\xi|z|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|z|x_0) \right]^{1/2} \right\}^2.$$

Тут використано ті самі безрозмірні змінні, що й у рівнянні (5) і введено такі позначення:

$$\varphi_1(\xi|z) = \frac{1}{8x^3} \frac{df(x|z)}{dx}, \quad \varphi_2(\xi|z) = \frac{\varepsilon_0}{8} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{x^3} \frac{df(x|z)}{dx} \right\}, \quad (99)$$

$$x \equiv x(\xi) = \varepsilon_0 \left(y^2(\xi|z|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|z|x_0) \right)^{1/2}.$$

Рівняння (98) задовольняє ті самі граничні умови, що й рівняння (5). Корінь рівняння $y(\xi|z|x_0) = 0$ визначає $\xi_1(x_0|z)$ — безрозмірний радіус зорі в шкалі $\lambda(x_0)$, тому вирази для радіуса й маси є аналогами співвідношень (6) і (7):

$$R(x_0|\mu_e|z) = \frac{R_0}{\mu_e \varepsilon_0} \xi_1(x_0|z), \quad M(x_0|\mu_e|z) = \frac{M_0}{\mu_e^2} \mathcal{M}(x_0|z), \quad (100)$$

$$\mathcal{M}(x_0|z) = \int_0^{\xi_1(x_0|z)} \left\{ y^2(\xi|z|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|z|x_0) \right\}^{3/2} \xi^2 d\xi.$$

Розв'язок рівняння (98) знайдено чисельним інтегруванням для області параметрів $1 \leq x_0 \leq 30$ при $z = 2; 6; 12; 26$.

Залежність безрозмірної маси $\mathcal{M}(x_0|z)$ і безрозмірного радіуса $\xi_1(x_0|z)$ від параметрів моделі наведено в табл. 10. Як видно з таблиці, відносно зменшення маси за рахунок взаємодій є монотонно спадною функцією x_0 і монотонно зростаючою функцією заряду z . Граничне значення маси за $x_0 \gg 1$ залежить від хімічного вмісту, на відміну від моделі Чандрасекара, і є близьким до $1.4287 M_\odot$ за $z = 2$; $1.4114 M_\odot$ за $z = 6$; $1.3918 M_\odot$ за $z = 12$ і $\mu_e = 2.0$.

Для великих значень параметра x_0 рівняння (98) можна спростити, використовуючи наближення для доданка $\hat{L}y(\xi|z|x_0)$, а саме вводячи заміну $\{y^2(\xi|z|x_0) + 2/\varepsilon_0 y(\xi|z|x_0)\}^{1/2} \rightarrow y(\xi|z|x_0)$ і покладаючи $\varphi_2(\xi|z) = 0$. Справді, за великих значень параметра релятивізму $x^{-3}df(x|z)/dx$ прямує до сталої, у зв'язку з чим $\varphi_2(\xi|z)$ є малою величиною. Виконаймо також заміну $\varphi_1(\xi|z) \rightarrow \varphi_1(x_0|z) \equiv \varphi_1(0|z)$, бо в лінійному наближенні за α_0 величина $\varphi_1(\xi|z)$ дорівнює сталій $3/8\alpha_0\{2/\pi + 4d/(3\eta)z^{2/3}\}$. У цьому наближенні рівняння (98) зводиться до такого вигляду:

$$(1 - \varphi_1(x_0|z))\Delta_\xi y(\xi|z|x_0) = - \left\{ y^2(\xi|z|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|z|x_0) \right\}^{3/2}. \quad (101)$$

Переходячи від змінної ξ до змінної η за співвідноше-

нням $\xi = k\eta$ за $k = \{1 - \varphi_1(x_0|z)\}^{1/2}$, рівняння (101) запишімо так:

$$\Delta_\eta y(k\eta|z|x_0) = - \left\{ y^2(k\eta|z|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(k\eta|z|x_0) \right\}^{3/2}. \quad (102)$$

Оскільки одержане рівняння збігається з рівнянням (5), то $y(k\eta|z|x_0) = y(\eta|x_0)$, де $y(\eta|x_0)$ — розв'язок рівняння (5). З умови $y(\eta|x_0) = 0$ одержуємо безрозмірний радіус зорі $\eta_1(x_0) = \xi_1(x_0)$. З умови $y(\xi|z|x_0) = 0$ отримуємо радіус $\xi_1(x_0|z) = k\xi_1(x_0)$. Маса й радіус карлика, що описується рівнянням рівноваги в наближенні (101), визначаємо співвідношеннями

$$\begin{aligned} M(x_0|\mu_e|z) &= \frac{M_0}{\mu_e^2} k^3 \mathcal{M}(x_0), \\ R(x_0|\mu_e|z) &= k \frac{R_0 \xi_1(x_0)}{\mu_e \varepsilon_0(x_0)}, \end{aligned} \quad (103)$$

де $\mathcal{M}(x_0)$ і $\xi_1(x_0)$ відповідають моделі Чандрасекара, а $k \equiv k(x_0|z)$.

Згідно з формулами (88), (92)–(96) об'ємна густина негравітаційної енергії однорідної електрон-ядерної моделі (кінетична енергія електронної підсистеми + енергія кулонівських взаємодій)

$$\frac{E}{V} = m_0 c^2 \left\{ \mathcal{E}(x) - \alpha_0 \left[\frac{3}{4\pi} + \frac{z^{2/3}d}{2\eta} \right] x + \alpha_0^2 [\mathcal{E}_{\text{cor}}(x) + z^{4/3} \mathcal{E}_2(x|z)] + \dots \right\} x^3 \frac{(m_0 c)^3}{3\hbar^3}. \quad (104)$$

Щоб знайти негравітаційну енергію в моделі карлика, що тут розглядаємо, замінімо x на $x(r)$ у формулі (104) і проінтегруймо за об'ємом зорі

$$\begin{aligned} E(x_0|\mu_e|z) &= \frac{E_0}{\mu_e^3 \varepsilon_0^3} \int_0^{\xi_1(x_0|z)} \xi^2 \left\{ \frac{3}{8} x [1 + x^2]^{1/2} (1 + 2x^2) - x^3 - \frac{3}{8} \ln(x + [1 + x^2]^{1/2}) \right. \\ &\quad \left. - \alpha_0 \left[\frac{3}{4\pi} + \frac{z^{2/3}d}{2\eta} \right] x^4 + \alpha_0^2 [\mathcal{E}_{\text{cor}}(x) + z^{4/3} \mathcal{E}_2(x|z)] x^3 \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (105)$$

де

$$x \equiv x(\xi) \equiv \varepsilon_0 \left\{ y^2(\xi|z|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|z|x_0) \right\}^{1/2}. \quad (106)$$

У наближенні (101) вираз (105) набуває вигляду

$$E(x_0|\mu_e|z) = \frac{E_0}{\mu_e^3 \varepsilon_0^3} k^5 \int_0^{\xi_1(x_0)} \xi^2 \left\{ \frac{3}{8} x [1 + x^2]^{1/2} (1 + 2x^2) - x^3 - \frac{3}{8} \ln(x + [1 + x^2]^{1/2}) \right\} d\xi, \quad (107)$$

де

$$x = \varepsilon_0 \left\{ y^2(\xi|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|x_0) \right\}^{1/2}. \quad (108)$$

Для гравітаційної енергії наведемо вираз у наближенні (101),

$$W(x_0|\mu_e|z) = - \frac{3}{8} \frac{E_0}{\mu_e^3 \varepsilon_0^3} k^5 \int_0^{\xi_1(x_0)} \mathcal{F}(x) \xi^2 d\xi, \quad (109)$$

у якому x визначено формулою (108). Момент інерції відносно осі обертання

$$I(x_0|\mu_e|z) = \frac{2}{3} \frac{M_0 R_0^2}{\mu_e^4 \varepsilon_0^2} \int_0^{\xi_1(x_0|z)} \xi^4 \left\{ y^2(\xi|z|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|z|x_0) \right\}^{3/2} d\xi, \quad (110)$$

а в наближенні (101)

$$I(x_0|\mu_e|z) = \frac{2}{3} \frac{M_0 R_0^2}{\mu_e^4 \varepsilon_0^2} k^5 \int_0^{\xi_1(x_0)} \xi^4 \left\{ y^2(\xi|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|x_0) \right\}^{3/2} d\xi. \quad (111)$$

Зі співвідношень (103), (107), (111) випливає, що кулонівські взаємодії спричиняють зменшення кінетичної енергії електронної підсистеми, а також модуля гравітаційної енергії, моменту інерції і т. д. Оскільки k — функція параметрів x_0 і z , то всі характеристики карлика є функціями трьох безрозмірних параметрів моделі.

Звичайно, наближення (101) вносить похибки в розрахунок характеристик карлика, але вони малі. Порівнюючи значення маси, розраховані за співвідношеннями (103), із значеннями з табл. 10, бачимо, що за $x_0 = 5$ похибка дорівнює 0.12% за $z = 2$; 0.25% за $z = 6$; 0.35% за $z = 12$; за $x_0 = 10$ маємо відповідно 0.03%, 0.06%, 0.08%. Похибка у визначенні радіуса за $x_0 = 5$ дорівнює 0.6% за $z = 2$; 0.9% за $z = 6$ і 1.2% за $z = 12$. За $x_0 = 10$ маємо, відповідно, 0.3%, 0.5%, 0.66%.

А. Модель з обертанням і кулонівськими взаємодіями

У безрозмірних змінних (15) рівняння рівноваги моделі з осьовим обертанням і міжчастинковими взаємодіями в наближенні (101) набуває вигляду

$$[1 - \varphi_1(x_0, z)] \Delta_{\xi, \theta} Y(\xi, \theta|x_0|z) = \Omega^2 - \left\{ Y^2(\xi, \theta|x_0|z) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta|x_0|z) \right\}^{3/2}. \quad (112)$$

Переходячи від змінної ξ до змінної η і враховуючи, що $Y(k\eta, \theta|x_0|z) = Y(\eta, \theta|x_0)$, зведемо рівняння (112) до форми (16), у якому потрібно зробити заміну $\xi \rightarrow \eta$. Таку ж заміну треба виконати в усіх наступних формулах розділів 2 і 3. Щоб одержати значення характеристик карлика в моделі з осьовим обертанням і кулонівськими взаємодіями, потрібно перенормувати дані табл. 3–8, а саме: значення радіусів $\xi_e(x_0, \Omega)$ та $\xi_p(x_0, \Omega)$ і прискорення на екваторі помножити на k , значення маси $\mathcal{M}(x_0, \Omega)$ помножити на k^3 , значення моменту інерції $\tilde{\mathcal{J}}(x_0, \Omega)$ і енергії $|\varepsilon(x_0, \Omega)|$ — на k^5 . Кутова швидкість Ω перенормуванню не підлягає. Значення множника $k \equiv k(x_0|z)$ як функції параметрів x_0 і z наведено в табл. 11.

ВІІ. ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ І ВИСНОВКИ

1. Осьове обертання карликів є атрибутом їхнього існування. Прийнято вважати, що вплив обертання невеликий, бо відношення енергії обертання до модуля гравітаційної енергії є малою величиною [26]. Однак цей критерій не строгий. Справа в тому, що кінетична енергія електронної підсистеми та гравітаційна енергія ядерної підсистеми значною мірою взаємно компенсуються, а їхня алгебраїчна сума — мала величина. Це чітко видно з асимптотики за $x_0 \gg 1$, коли $E_{\text{кін}} \sim E_0 \mu_e^{-3} x_0 + \dots$, $W \sim -E_0 \mu_e^{-3} x_0 + \dots$, а їхня сума в цій границі від x_0 не залежить. Тому вплив обертання визначаємо відношенням енергії обертання до модуля повної енергії. Згідно з формулою (80) і таблицями 4 та 8, максимальне значення цього відношення $0.25 \Omega_{\text{max}}^2(x_0) \varepsilon_0^3 \tilde{\mathcal{J}}(x_0, \Omega) |\varepsilon(x_0, \Omega_{\text{max}}(x_0))|^{-1}$ дорівнює 10% за $x_0 = 1$; 12.5% за $x_0 = 10$ і 14% за $x_0 = 20$. Відповідно максимальне збільшення маси карлика під впливом обертання близьке до 14% за $x_0 = 1$; 5% за $x_0 = 10$ і 4% за $x_0 = 20$. Для прикладу, на рис. 5 зображено залежність безрозмірної маси $\mathcal{M}(x_0, \Omega)$ від параметра x_0 за деяких значень кутової швидкості з ділянки $0 \leq \Omega < \Omega_{\text{max}}(x_0)$. Нижня крива відповідає моделі без обертання, а верхня (що огинає) визначає ділянку зміни маси карликів під впливом обертання. Під цим впливом змінюється межа Чандрасекара — максимальне значення маси карлика за $x_0 \gg 1$. На рис. 6 зображено ділянку зміни безрозмірної повної енергії карлика за x_0 під впливом обертання. Водночас міжчастинкові кулонівські взаємодії зменшують значення характеристик на величину, що не залежить від швидкості обертання, а від хімічного складу. За $x_0 = 1$ зменшення маси дорівнює 2.5% за $z = 2$; 5% за $z = 6$; 8% за $z = 12$; за $x_0 = 5$, відповідно, 1.5% за $z = 2$; 2.8% за $z = 6$; 4.2% за $z = 12$; за $x_0 = 10$ маємо 1.4% за $z = 2$; 2.6% за $z = 6$; 4% за $z = 12$. Із наведених оцінок випливає, що вплив обертання перевищує вплив міжчастинкових взаємодій для $2 \leq z \leq 15$. У ділянці $z \geq 15$ переважає вплив взаємодій і навіть за $\Omega_{\text{max}}(x_0)$ максимальна маса карлика в моделі з обертанням

ням і взаємодіями менша за масу карлика в моделі Чандрасекара.

2. Одержані таблиці для характеристик вироджених карликів дають змогу розв'язувати обернену задачу теорії — оцінку параметрів моделі для конкретних карликів за відомими зі спостережень деякими їхніми характеристиками. Для прикладу розглянемо недавно відкритий карлик LAMOST J024048.51+195226.9 із періодом обертання $P = 25$ с, чому відповідає $\omega = 0.251 \text{ c}^{-1}$ [12]. Велике значення цієї швидкості дозволяє припустити, що вона близька до критичної. Приймаючи, що $\omega_{\max}(x_0) = 0.251 \text{ c}^{-1}$, із табл. 9 знаходимо, що $\Omega_{\max}(x_0) = 0.46$. Із формули (86) випливає, що такому значенню Ω відповідає $x_0 \approx 1.383$. Із табл. 3 знаходимо безрозмірну масу $\mathcal{M}(x_0, \Omega_{\max}(x_0)) \cong 1.07886$. Тому у такому наближенні маса карлика LAMOST J024048.51+195226.9 у моделі з обертанням, але без кулонівських взаємодій, дорівнює приблизно $0.779 \dots M_{\odot}$. Безрозмірний екваторіальний радіус $\xi_e = 1.9422$ ($R_e \cong 10.67 \cdot 10^3$ км), безрозмірний полярний радіус $\xi_p = 1.3732$ ($R_p \cong 7.56 \cdot 10^3$ км), ексцентриситет $e = 0.7072$, безрозмірний момент інерції $\tilde{J} = 1.1004$ ($I = 2.401 \cdot 10^{-5} M_{\odot} R_{\odot}^2$). При врахуванні міжчастинкових взаємодій одержується дещо нижче значення, зокрема маса задовольняє нерівність $0.740 M_{\odot} \leq M \leq 0.761 M_{\odot}$ (мінімальне значення відповідає $z = 8$, максимальне $z = 2$). У роботі [12] припускається, що маса цього карлика близька до $0.8 M_{\odot}$. За відомими сталими в розкладах (35), (39) і функціями $\psi_0(\xi|x_0)$, $\psi_2(\xi|x_0)$, $\psi_4(\xi|x_0)$ ми побудували меридіональний переріз цього карлика (крива 2 на рис. 7), з якого видно, що його поверхня відхиляється від поверхні ідеального еліпсоїда обертання, осі якого дорівнюють найменшій і найбільшій віддалям точок поверхні від початку координат (крива 1). Така форма поверхні характерна для політро зі швидким обертанням [39, 40].

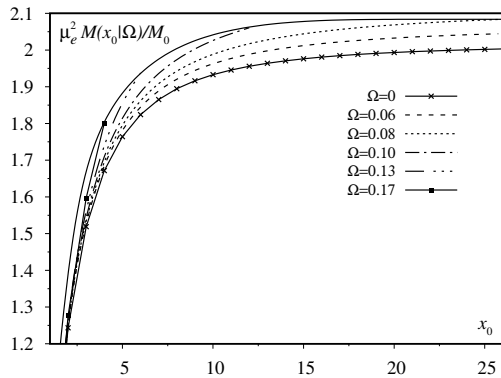


Рис. 5. Ділянка зміни безрозмірної маси карлика $\mathcal{M}(x_0, \Omega)$ під впливом обертання
 Fig. 5. The region of change of the dimensionless white dwarf mass $\mathcal{M}(x_0, \Omega)$ under influence of rotation

Нижня крива відповідає моделі без обертання, а верхня (огинаюча) крива визначає область зміни маси карликів під впливом обертання. Під впливом обертання змінюється межа Чандрасекара — максимальне значення маси карлика при $x_0 \gg 1$. На рис. 6 зображено область зміни безрозмірної повної енергії карлика при даному x_0 під впливом обертання.

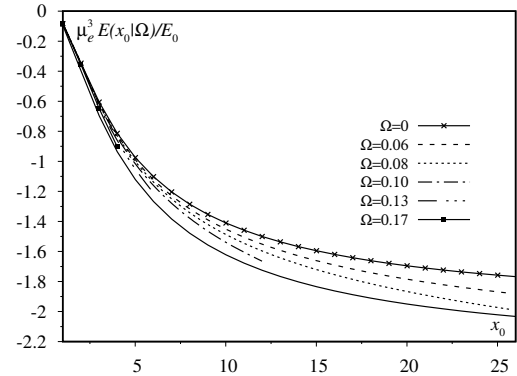


Рис. 6. Ділянка зміни безрозмірної енергії карлика $\varepsilon(x_0, \Omega)$ під впливом обертання. Нижня крива — огинальна
 Fig. 6. The region of change of the dimensionless total energy $\varepsilon(x_0, \Omega)$ under influence of rotation. Lower curve is envelope

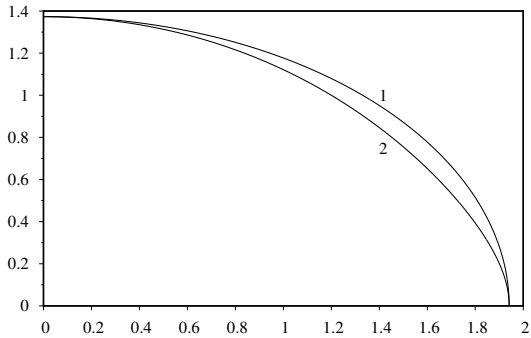


Рис. 7. Меридіональний переріз карлика LAMOST J024048.51+195226.9
 Fig. 7. Meridional section of white dwarf LAMOST J024048.51+195226.9

3. Як ще один приклад розв'язання оберненої задачі ми визначили параметри моделі для карлика за номером 33 з каталогу вироджених карликів із подвійних систем [10], що має масу $M = 1.418 \dots M_{\odot}$ і середній радіус $R = 2.1 \cdot 10^3$ км. У моделі Чандрасекара йому відповідають параметри $x_0 = 9.5720$, $\mu_e = 1.9789$. Розрахувавши за табл. 10 зменшення його маси (відносно моделі Чандрасекара) під впливом кулонівських взаємодій і збільшення її під впливом обертання, із табл. 3 ми встановили кутову швидкість $\Omega(z)$ як функцію величини середнього значення заряду ядра z , що відповідає спостережуваній масі: $\Omega(2) = 0.066 \dots$, $\Omega(6) = 0.076 \dots$, $\Omega(8) = 0.083 \dots$, $\Omega(12) = 0.093 \dots$. Малоімовірно, що карлик із такою великою масою може бути гелієвим. Варіанта залізного карлика ми не розглядаємо, бо в цьому випадку $\mu_e > 2$. Отже, найімовірніше, що карлик за номером 33 є вуглецево-

кисневим, для якого $z \approx 8$, так що ймовірна швидкість обертання дорівнює $0.083 \dots \approx 0.8\Omega_{\max}(x_0)$ за $x_0 = 9.5720$. Розглянутий карлик наймасивніший, тому швидкість обертання інших масивних карликів із подвійних систем менша. Звідси випливає, що електрон-ядерна модель не суперечить спостережуваним даним для масивних карликів зі швидким твердотільним осьовим обертанням. Цей приклад ілюструє можливість оцінки кутової швидкості обертання карликів за відомими зі спостережень масою та середнім радіусом.

4. Оскільки за $x_0 \gg 1$ збільшення маси карлика під впливом обертання сягає 4%, а зменшення маси за рахунок міжчастинкових взаємодій не перевищує 2% за $z = 8$, то максимальна маса вуглецево-кисневих карликів може перевищувати межу Чандрасекара і сягати величини

$$\frac{4}{\mu_e^2} \cdot 1.444 \cdot 1.02M_{\odot} \cong \frac{4}{\mu_e^2} \cdot 1.473M_{\odot}.$$

Характерна особливість масивних карликів у подвійних системах — невелике зменшення ($\sim 1\%$) параметра μ_e при збільшенні їхньої маси. Мабуть це пов'язано з наявністю водню на периферії карлика внаслідок акреції. У зв'язку з цим максимальну масу вуглецево-кисневих карликів у подвійних системах згідно з електрон-ядерною моделлю із твердотільним обертанням

можна оцінити як $1.5M_{\odot}$. Однак спостереженнями такі карлики ще не виявлено.

5. Ми встановили, що відхилення характеристик вироджених карликів, розрахованих у межах використаної моделі, від аналогічних величин у моделі Чандрасекара є результатом конкуренції впливу обертання й кулонівських взаємодій. Особливості цього ефекту визначаємо значеннями параметра релятивізму x_0 та усередненого заряду ядра z . У ділянці $1 \lesssim x_0 \lesssim 2$ (для карликів проміжних мас) компенсація часткова — суттєво переважає вплив обертання, а вплив взаємодій можна розглядати як поправку. Для масивних карликів, коли $x_0 \gtrsim 10$, відбувається майже повна компенсація, хоча для ділянки $z \lesssim 10$ усе ж переважає вплив обертання, якщо кутова швидкість близька до максимальної для заданого значення x_0 .
6. Одержаний наближений напіваналітичний розв'язок рівняння рівноваги для моделі з осьовим обертанням і кулонівськими взаємодіями можна використати як нульове наближення для знаходження точнішого розв'язку за допомогою інтегральної форми рівняння рівноваги, застосовуючи стандартні методи розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь [41]. Це спростило б задачу знаходження розв'язку рівняння рівноваги, позбавляючи від необхідності розбити об'єм карлика на внутрішню й периферійну ділянки.

ДОДАТОК. ТАБЛИЦІ РОЗРАХОВАНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАРЛИКІВ

$\Omega \backslash x_0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
0.01	9.79148	10.3094	10.5126	10.6252	10.6900	10.7304	10.7811	10.8004	10.7897	10.7998	10.8076	10.8136
0.02	9.79111	10.2917	10.5112	10.6235	10.6879	10.7282	10.7549	10.7736	10.7871	10.7972	10.8048	10.8108
0.03	9.79051	10.2900	10.5088	10.6205	10.6845	10.7246	10.7510	10.7696	10.7829	10.7928	10.8004	10.8063
0.04	9.80327	10.2877	10.5055	10.6165	10.6801	10.7197	10.7459	10.7640	10.7773	10.7870	10.7945	10.8004
0.05	9.78851	10.2849	10.5013	10.6114	10.6743	10.7136	10.7393	10.7575	10.7705	10.7799	10.7872	10.7931
0.06	9.78721	10.2815	10.4964	10.6051	10.6674	10.7060	10.7317	10.7495	10.7628	10.7717	10.7795	10.7851
0.07	9.78563	10.2774	10.4905	10.5987	10.6605	10.6982	10.7239	10.7411	10.7539	10.7641	10.7715	10.7767
0.08	9.78389	10.2730	10.4841	10.5912	10.6525	10.6906	10.7152	10.7333	10.7474	10.7564	10.7648	10.7707
0.09	9.78181	10.2680	10.4776	10.5834	10.6446	10.6829	10.7085	10.7299	—	—	—	—
0.10	9.77954	10.2624	10.4702	10.5760	10.6375	10.6797	—	—	—	—	—	—
0.12	9.77467	10.2499	10.4544	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.14	9.76893	10.2372	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.16	9.76233	10.2239	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.18	9.75474	10.2183	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.20	9.74694	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.22	9.73812	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.24	9.73013	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.26	9.72078	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.28	9.71211	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.30	9.70421	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Табл. 1. Залежність сталої інтегрування $|a_2(x_0)|$ від параметрів моделі
Table 1. Dependence of integration constant $|a_2(x_0)|$ on the model parameters

МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ТЕОРІЇ ОБЕРТОВИХ ВИРОДЖЕНИХ КАРЛИКІВ

$\Omega \backslash x_0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
0.02	0.00775	0.00822	0.00834	0.00847	0.00856	0.00842	0.00859	0.00853	0.00835	0.00832	0.00845	0.00831
0.03	0.01680	0.01859	0.01885	0.01897	0.01927	0.01880	0.01915	0.01858	0.01872	0.01871	0.01848	0.01871
0.04	0.08307	0.03267	0.03331	0.03349	0.03330	0.03332	0.03322	0.03326	0.03276	0.03283	0.03255	0.03205
0.05	0.04699	0.05080	0.05193	0.05216	0.05251	0.05153	0.05172	0.05061	0.05011	0.05046	0.05021	0.04962
0.06	0.06661	0.07224	0.07441	0.07607	0.07545	0.07490	0.07387	0.07300	0.07058	0.07171	0.06961	0.06916
0.07	0.09097	0.09904	0.10195	0.10081	0.09893	0.09983	0.09702	0.09713	0.09547	0.09211	0.09062	0.09126
0.08	0.11761	0.12808	0.13191	0.13031	0.12757	0.12481	0.12466	0.12091	0.11485	0.11501	0.11049	0.10889
0.09	0.14996	0.16118	0.16333	0.16275	0.15680	0.15183	0.14819	0.13394	—	—	—	—
0.10	0.18601	0.19981	0.20035	0.19436	0.18571	0.16752	—	—	—	—	—	—
0.12	0.26289	0.28890	0.28559	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.14	0.35588	0.38281	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.16	0.46560	0.49029	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.18	0.59648	0.55426	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.20	0.73343	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.22	0.89507	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.24	1.04326	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.26	1.22838	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.28	1.40768	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.30	1.58462	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Табл. 2. Залежність сталої інтегрування $a_4(x_0)$ від параметрів моделі
 Table 2. Dependence of integration constant $a_4(x_0)$ on the model parameter

$\Omega \backslash x_0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
0	1.24303	1.67141	1.82404	1.89462	1.93284	1.95581	1.97066	1.98081	1.98804	1.99337	1.99741	2.00055
0.01	1.24314	1.67177	1.82459	1.89530	1.93363	1.95666	1.97157	1.98176	1.98902	1.99438	1.99845	2.00160
0.02	1.24346	1.67284	1.82625	1.89737	1.93599	1.95925	1.97432	1.98463	1.99200	1.99744	2.00157	2.00479
0.03	1.24400	1.67463	1.82903	1.90086	1.93998	1.96361	1.97896	1.98950	1.99704	2.00262	2.00687	2.01018
0.04	1.24476	1.67716	1.83297	1.90581	1.94566	1.96983	1.98560	1.99646	2.00426	2.01006	2.01448	2.01794
0.05	1.24575	1.68044	1.83812	1.91230	1.95314	1.97805	1.99439	2.00570	2.01386	2.01995	2.02462	2.02828
0.06	1.24695	1.68451	1.84454	1.92046	1.96258	1.98847	2.00557	2.01748	2.02612	2.03261	2.03762	2.04156
0.07	1.24838	1.68940	1.85233	1.93043	1.97420	2.00136	2.01946	2.03218	2.04149	2.04854	2.05401	2.05835
0.08	1.25005	1.69515	1.86159	1.94241	1.98829	2.01713	2.03659	2.05043	2.06070	2.06856	2.07474	2.07972
0.09	1.25195	1.70181	1.87248	1.95670	2.00532	2.03644	2.05786	2.07346	—	—	—	—
0.10	1.25409	1.70945	1.88521	1.97370	2.02604	2.06060	—	—	—	—	—	—
0.12	1.25913	1.72800	1.91734	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.14	1.26523	1.75170	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.16	1.27247	1.78210	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.18	1.28095	1.82257	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.20	1.29080	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.22	1.30218	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.24	1.31532	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.26	1.33049	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.28	1.34812	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.30	1.36886	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Табл. 3. Залежність безрозмірної маси $\mathcal{M}(x_0, \Omega)$ від параметрів x_0 і Ω
 Table 3. Dependence of the dimensionless mass $\mathcal{M}(x_0, \Omega)$ on the model parameters x_0 and Ω

$\Omega \backslash x_0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
0	0.59875	0.27662	0.15112	0.09372	0.06334	0.04549	0.03418	0.02658	0.02124	0.01735	0.01443	0.01219
0.01	0.59936	0.27702	0.15139	0.09391	0.06348	0.04560	0.03426	0.02665	0.02129	0.01740	0.01447	0.01222
0.02	0.59984	0.27760	0.15186	0.09427	0.06376	0.04582	0.03444	0.02679	0.02141	0.01750	0.01456	0.01230
0.03	0.60064	0.27858	0.15265	0.09488	0.06423	0.04620	0.03474	0.02704	0.02162	0.01767	0.01471	0.01242
0.04	0.60176	0.27995	0.15378	0.09576	0.06492	0.04674	0.03518	0.02740	0.02192	0.01792	0.01492	0.01261
0.05	0.60321	0.28175	0.15527	0.09692	0.06583	0.04747	0.03577	0.02789	0.02233	0.01827	0.01522	0.01287
0.06	0.60500	0.28399	0.15714	0.09841	0.06701	0.04841	0.03654	0.02852	0.02286	0.01873	0.01561	0.01321
0.07	0.60712	0.28670	0.15945	0.10026	0.06849	0.04962	0.03754	0.02936	0.02357	0.01933	0.01613	0.01367
0.08	0.60960	0.28992	0.16223	0.10254	0.07035	0.05116	0.03882	0.03045	0.02451	0.02015	0.01685	0.01430
0.09	0.61243	0.29368	0.16558	0.10534	0.07271	0.05316	0.04055	0.03197	–	–	–	–
0.10	0.61564	0.29805	0.16958	0.10883	0.07577	0.05593	–	–	–	–	–	–
0.12	0.62322	0.30891	0.18028	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.14	0.63247	0.32338	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.16	0.64357	0.34316	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.18	0.65673	0.37273	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.20	0.67228	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.22	0.69059	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.24	0.71224	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.26	0.73802	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.28	0.76916	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.30	0.80784	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Табл. 4. Залежність безрозмірного моменту інерції $\tilde{\mathcal{J}}(x_0, \Omega)$ від параметрів x_0 і Ω
 Table 4. Dependence of the dimensionless moment of inertia $\tilde{\mathcal{J}}(x_0, \Omega)$ on the model parameters x_0 and Ω

$\Omega \backslash x_0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
0	2.06029	3.30745	4.02371	4.49390	4.82860	5.07994	5.27602	5.43347	5.56278	5.67094	5.76277	5.84173
0.01	2.06054	3.30884	4.02650	4.49815	4.83417	5.08680	5.28400	5.44242	5.57255	5.68153	5.77401	5.85364
0.02	2.06141	3.31311	4.03519	4.51133	4.85154	5.10782	5.30845	5.46989	5.60282	5.71419	5.80893	5.89046
0.03	2.06290	3.32039	4.04991	4.53368	4.88116	5.14421	5.35083	5.51776	5.65554	5.77139	5.87010	5.95540
0.04	2.06489	3.33067	4.07119	4.56629	4.92466	5.19791	5.41396	5.58949	5.73516	5.85819	5.96352	6.05474
0.05	2.06750	3.34408	4.09941	4.61037	4.98451	5.27273	5.50288	5.69162	5.84949	5.98384	6.09966	6.20072
0.06	2.07084	3.36106	4.13574	4.66826	5.06459	5.37484	5.62649	5.83585	6.01359	6.16696	6.30090	6.41912
0.07	2.07469	3.38173	4.18128	4.74318	5.17156	5.51543	5.80181	6.04674	6.26059	6.45046	6.62133	6.77702
0.08	2.07917	3.40663	4.23830	4.84101	5.31770	5.71792	6.06917	6.38913	6.69112	6.98775	7.29267	7.63219
0.09	2.08438	3.43630	4.30958	4.97151	5.52963	6.04457	6.57338	7.25054	–	–	–	–
0.10	2.09032	3.47140	4.40019	5.15555	5.88580	6.92818	–	–	–	–	–	–
0.12	2.10431	3.56273	4.68395	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.14	2.12160	3.69669	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.16	2.14262	3.91722	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.18	2.16804	4.61011	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.20	2.19878	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.22	2.23634	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.24	2.28297	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.26	2.34285	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.28	2.42401	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.30	2.54900	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Табл. 5. Залежність екваторіального радіуса $\xi_e(x_0, \Omega)$ від параметрів x_0 і Ω
 Table 5. Dependence of the equatorial radius $\xi_e(x_0, \Omega)$ on the model parameters x_0 and Ω

$\Omega \backslash x_0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
0	2.06029	3.30745	4.02371	4.49390	4.82860	5.07994	5.27602	5.43347	5.56278	5.67094	5.76277	5.84173
0.01	2.06014	3.30684	4.02260	4.49235	4.82667	5.07770	5.27350	5.43072	5.55985	5.66783	5.75951	5.83834
0.02	2.05971	3.30501	4.01929	4.48773	4.82094	5.07102	5.26605	5.42259	5.55112	5.65859	5.74983	5.82826
0.03	2.05900	3.30199	4.01381	4.48008	4.81146	5.06001	5.25373	5.40916	5.53674	5.64339	5.73390	5.81170
0.04	2.05799	3.29777	4.00619	4.46949	4.79836	5.04481	5.23676	5.39069	5.51696	5.62249	5.71202	5.78894
0.05	2.05670	3.29238	3.99651	4.45607	4.78181	5.02563	5.21538	5.36742	5.49209	5.59624	5.68456	5.76042
0.06	2.05514	3.28586	3.98484	4.43996	4.76199	5.00274	5.18989	5.33975	5.46249	5.56506	5.65190	5.72652
0.07	2.05329	3.27823	3.97128	4.42128	4.73906	4.97633	5.16051	5.30794	5.42859	5.52916	5.61443	5.68772
0.08	2.05117	3.26953	3.95590	4.40021	4.71330	4.94662	5.12767	5.27223	5.39032	5.48905	5.57237	5.64399
0.09	2.04878	3.25980	3.93878	4.37691	4.68483	4.91387	5.09128	5.23224	–	–	–	–
0.10	2.04612	3.24910	3.92009	4.35145	4.65380	4.87768	–	–	–	–	–	–
0.12	2.04001	3.22493	3.87835	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.14	2.03290	3.19729	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.16	2.02482	3.16662	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.18	2.01584	3.13241	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.20	2.00598	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.22	1.99534	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.24	1.98387	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.26	1.97175	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.28	1.95891	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.30	1.94540	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Табл. 6. Залежність полярного радіуса $\xi_p(x_0, \Omega)$ від параметрів x_0 і Ω
 Table 6. Dependence of the polar radius $\xi_p(x_0, \Omega)$ on the model parameters x_0 and Ω

$\Omega \backslash x_0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
0	0.44741	1.49028	2.91059	4.67910	6.78953	9.24003	12.0300	15.1592	18.6275	22.4351	26.5818	31.0677
0.01	0.44719	1.48774	2.90224	4.66073	6.75683	9.18813	11.9543	15.0552	18.4907	22.2600	26.3644	30.8025
0.02	0.44645	1.48000	2.87670	4.60476	6.65695	9.03094	11.7251	14.7397	18.0740	21.7282	25.7020	29.9961
0.03	0.44521	1.46697	2.83383	4.51073	6.48872	8.76427	11.3361	14.2031	17.3652	20.8214	24.5724	28.6167
0.04	0.44352	1.44864	2.77287	4.37648	6.24785	8.38166	10.7754	13.4276	16.3373	19.5034	22.9258	26.6044
0.05	0.44132	1.42492	2.69334	4.19974	5.92805	7.87068	10.0229	12.3814	14.9450	17.7114	20.6800	23.8490
0.06	0.43857	1.39543	2.59368	3.97614	5.51988	7.21223	9.04438	11.0107	13.1063	15.3268	17.6702	20.1341
0.07	0.43536	1.36007	2.47250	3.69999	5.00781	6.37359	7.77927	9.21048	10.6546	12.1000	13.5361	14.9518
0.08	0.43164	1.31839	2.32694	3.36123	4.36495	5.29103	6.09507	6.72948	7.13724	7.24003	6.92756	5.97797
0.09	0.42737	1.26998	2.15373	2.94429	3.53712	3.81064	3.56903	2.27676	–	–	–	–
0.10	0.42255	1.21433	1.94707	2.41788	2.37960	1.01052	–	–	–	–	–	–
0.12	0.41130	1.07765	1.38649	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.14	0.39770	0.89693	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.16	0.38159	0.64373	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.18	0.36271	0.10799	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.20	0.34074	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.22	0.31513	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.24	0.28512	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.26	0.24936	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.28	0.20537	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.30	0.14663	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Табл. 7. Залежність прискорення вільного падіння на екваторі $g_e(x_0, \Omega)$ від параметрів x_0 і Ω
 Table 7. Dependence of the equatorial gravity $g_e(x_0, \Omega)$ on the model parameters x_0 and Ω

$\Omega \backslash x_0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
0	0.34331	0.81173	1.10103	1.28497	1.41005	1.49993	1.56736	1.61968	1.66139	1.69536	1.72355	1.74730
0.01	0.34335	0.81198	1.10155	1.28578	1.41112	1.50127	1.56895	1.62151	1.66344	1.69764	1.72605	1.75001
0.02	0.34346	0.81271	1.10312	1.28820	1.41437	1.50530	1.57373	1.62702	1.66965	1.70453	1.73360	1.75822
0.03	0.34365	0.81395	1.10576	1.29228	1.41985	1.51212	1.58184	1.63635	1.68018	1.71623	1.74643	1.77216
0.04	0.34392	0.81569	1.10951	1.29809	1.42767	1.52188	1.59345	1.64976	1.69532	1.73305	1.76491	1.79225
0.05	0.34427	0.81796	1.11440	1.30573	1.43800	1.53479	1.60887	1.66759	1.71550	1.75552	1.78961	1.81915
0.06	0.34469	0.82077	1.12052	1.31533	1.45105	1.55119	1.62851	1.69039	1.74136	1.78438	1.82141	1.85383
0.07	0.34520	0.82415	1.12794	1.32709	1.46713	1.57152	1.65298	1.71891	1.77385	1.82076	1.86162	1.89781
0.08	0.34579	0.82813	1.13679	1.34123	1.48666	1.59642	1.68318	1.75435	1.81447	1.86651	1.91245	1.95370
0.09	0.34646	0.83274	1.14719	1.35810	1.51026	1.62686	1.72058	1.79882	–	–	–	–
0.10	0.34722	0.83803	1.15935	1.37816	1.53886	1.66464	–	–	–	–	–	–
0.12	0.34900	0.85089	1.18997	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.14	0.35116	0.86730	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.16	0.35373	0.88825	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.18	0.35674	0.91567	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.20	0.36023	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.22	0.36427	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.24	0.36892	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.26	0.37428	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.28	0.38048	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0.30	0.38772	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Табл. 8. Залежність безрозмірної енергії $|\varepsilon(x_0, \Omega)|$ від параметрів x_0 і Ω
 Table 8. Dependence of the dimensionless energy $|\varepsilon(x_0, \Omega)|$ on the model parameters x_0 and Ω

x_0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$\Omega_{\max}(x_0)$	0.3242	0.1815	0.1439	0.1258	0.1098	0.1019	0.0980	0.0927	0.0914	0.0884	0.0858	0.0836
$\omega_{\max}(x_0), \text{c}^{-1}$	0.4027	0.9055	1.4905	2.1342	2.7021	3.3795	4.1693	4.8832	5.8052	6.6309	7.4757	8.3468

Табл. 9. Залежність максимальної кутової швидкості від параметра x_0
 Table 9. Dependence of the maximal angular velocity on the parameter x_0

x_0	$\mathcal{M}(x_0 z)$			$\xi_1(x_0 z)$		
	$z = 2$	$z = 6$	$z = 12$	$z = 2$	$z = 6$	$z = 12$
1.0	0.689037	0.673304	0.65581	1.00101	0.98801	0.97401
2.0	1.22092	1.20126	1.17904	2.02501	2.00601	1.98501
3.0	1.49465	1.47331	1.44912	2.74601	2.72401	2.70001
4.0	1.64646	1.62426	1.59907	3.27001	3.24701	3.22001
5.0	1.73843	1.71573	1.68996	3.67001	3.64501	3.61701
6.0	1.79816	1.77515	1.74901	3.98601	3.96001	3.93101
7.0	1.83909	1.81586	1.78948	4.24301	4.21701	4.18701
8.0	1.86832	1.84495	1.81839	4.45601	4.43001	4.39901
9.0	1.88992	1.86645	1.83976	4.63701	4.61001	4.57901
10.0	1.90633	1.88277	1.85599	4.79101	4.76401	4.73301
15.0	1.94943	1.92567	1.89863	5.32201	5.29401	5.26301
20.0	1.96651	1.94268	1.91554	5.63501	5.60701	5.57501
25.0	1.97495	1.95108	1.92389	5.84201	5.81401	5.78201
30.0	1.97972	1.95583	1.92861	5.98901	5.96101	5.92901

Табл. 10. Залежність безрозмірної маси $\mathcal{M}(x_0|z)$ та безрозмірного радіуса $\xi_1(x_0|z)$ від параметрів моделі x_0 і z
 Table 10. Dependence of the dimensionless mass $\mathcal{M}(x_0|z)$ and the dimensionless radius $\xi_1(x_0|z)$ on the model parameters x_0 and z

$x_0 \backslash z$	2	6	8	12
1.0	0.991427	0.983823	0.980958	0.975228
2.0	0.994035	0.988671	0.986626	0.982537
3.0	0.994711	0.989954	0.988138	0.984506
4.0	0.994999	0.990507	0.988791	0.985360
5.0	0.995154	0.990804	0.989142	0.985818
6.0	0.995248	0.990985	0.989355	0.986096
7.0	0.995310	0.991102	0.989494	0.986279
8.0	0.995351	0.991184	0.989591	0.986404
9.0	0.995383	0.991246	0.989663	0.986498
10.0	0.995407	0.991289	0.989715	0.986567
15.0	0.995466	0.991405	0.989851	0.986743
20.0	0.995488	0.991451	0.989905	0.986812
25.0	0.995499	0.991472	0.989930	0.986845
30.0	0.995506	0.991486	0.989946	0.986865

Табл. 11. Залежність множника $k(x_0|z)$ від параметрів моделі
 Table 11. Dependence of multiplier $k(x_0|z)$ on the model parameters x_0 and z

[1] W. S. Adams, *Publ. Astron. Soc. Pac.* **27**, 236 (1915); <https://doi.org/10.1086/122440>.

[2] R. H. Fowler, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **87**, 114 (1926); <https://doi.org/10.1093/mnras/87.2.114>.

[3] S. Chandrasekhar, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **74**, 81 (1931); <https://doi.org/10.1086/143324>.

[4] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* (Wiley, New York, 1983); <https://doi.org/10.1002/9783527617661>.

[5] J. L. Provencal, H. L. Shipman, E. Høg, P. Thejll, *Astrophys. J.* **494**, 759 (1998); <https://doi.org/10.1086/305238>.

[6] A. Bragaglia, A. Renzini, P. Bergeron, *Astrophys. J.* **443**, 735 (1995); <https://doi.org/10.1086/175564>.

[7] P. Bergeron, R. A. Saffer, J. Liebert, *Astrophys. J.* **394**, 228 (1992); <https://doi.org/10.1086/171575>.

[8] M. V. Vavruk, S. V. Smerechynskiy, N. L. Tyshko, *Astron. Rep.* **55**, 505 (2011); <https://doi.org/10.1134/S1063772911060084>.

[9] P.-E. Tremblay, P. Bergeron, A. Gianninas, *Astrophys. J.* **730**, 128 (2011); <https://doi.org/10.1088/0004-637X/730/2/128>.

[10] A. Rebassa-Mansergas, B. T. Gänsicke, M. R. Schreiber, D. Koester, P. Rodriguez-Gil, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **402**, 620 (2010); <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15915.x>.

[11] M. V. Vavruk, S. V. Smerechynskiy, *Astron. Rep.* **57**, 913 (2013); <https://doi.org/10.1134/S1063772913100065>.

[12] I. Pelisoli *et al.*, *Mon. Not. R. Astron. Soc. Lett.* **509**, L31 (2022); <https://doi.org/10.1093/mnrasl/sl116>.

[13] R. Lopes de Oliveira, A. Bruch, C. V. Rodrigues, A. S. Oliveira, K. Mukai, *Astrophys. J. Lett.* **898**, L40 (2020); <https://doi.org/10.3847/2041-8213/aba618>.

[14] R. P. Ashley *et al.*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **499**, 149 (2020); <https://doi.org/10.1093/mnras/staa2676>.

[15] R. Emden, *Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme* (Leipzig, Berlin, 1907).

[16] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (University of Chicago Press, Chicago, 1939).

[17] E. A. Milne, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **83**, 118 (1923); <https://doi.org/10.1093/mnras/83.3.118>.

[18] S. Chandrasekhar, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **93**, 390 (1933); <https://doi.org/10.1093/mnras/93.5.390>.

[19] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Government Printing Office Washington, 1972).

[20] G. N. Duboshin, *Celestial Mechanics, Basic Problems and Methods* (Nauka, Moscow, 1968).

[21] J. J. Monaghan, I. W. Roxburgh, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **131**, 13 (1965); <https://doi.org/10.1093/mnras/131.1.13>.

[22] R. A. James, *Astrophys. J.* **140**, 552 (1964); <https://doi.org/10.1086/147949>.

[23] I. W. Roxburgh, *Z. Astrophys.* **62**, 134 (1965).

[24] M. V. Vavruk, N. L. Tyshko, D. V. Dzikovskiy, *J. Phys. Stud.* **24**, 3902 (2020); <https://doi.org/10.30970/jps.24.3902>.

[25] M. V. Vavruk, D. V. Dzikovskiy, *Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso* **50**, 748 (2020); <https://doi.org/10.31577/caosp.2020.50.4.748>.

[26] J. L. Tassoul, *Theory of Rotating Stars. (PSA-1). Vol. 1* (Princeton University Press, 2016).

[27] M. V. Vavruk, D. V. Dzikovskiy, *Math. Model. Comput.* **8**, 338 (2021); <https://doi.org/10.23939/mc2021.02.338>.

[28] M. Vavruk, T. Krokhmal'skii, *Phys. Status Solidi B* **168**, 519 (1991); <https://doi.org/10.1002/pssb.2221680213>.

[29] M. V. Vavruk, T. E. Krokhmal'skii, *PPhys. Status Solidi B* **169**, 451 (1992); <https://doi.org/10.1002/pssb.2221690218>.

[30] М. Ваврук, П. Костробій, Б. Маркович, *Базисний*

- підхід в теорії багатоелектронних систем* (Растр-7, Львів, 2017).
- [31] M. V. Vavrukh, D. V. Dzikovskyi, V. B. Solovyan, N. L. Tyshko, *Math. Model. Comput.* **3**, 97 (2016); <https://doi.org/10.23939/mmc2016.01.097>.
- [32] D. Pines, P. Nozières, *The Theory of Quantum Liquids: Normal Fermi Liquids* (CRC Press, 1966).
- [33] K. Fuchs, *Proc. R. Soc. London* **A151**, 585 (1935); <https://doi.org/10.1098/rspa.1935.0167>.
- [34] W. J. Carr, *Phys. Rev.* **122**, 1437 (1961); <https://doi.org/10.1103/PhysRev.122.1437>.
- [35] М. В. Ваврух, С. В. Смеречинський, Н. Л. Тишко, *Нові моделі в теорії структури вироджених карликів* (Растр-7, Львів, 2018).
- [36] D. M. Ceperley, B. J. Alder, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 566 (1980); <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.45.566>.
- [37] E. E. Salpeter, *Astrophys. J.* **134**, 669 (1961); <https://doi.org/10.1086/147194>.
- [38] A. S. Davydov, *Quantum Mechanics* (Nauka, Moscow, 1973).
- [39] D. Kong, K. Zhang, G. Schubert, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **448**, 456 (2015); <https://doi.org/10.1093/mnras/stu2759>.
- [40] J. Knopik, P. Mach, A. Odrzywolek, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **467**, 4965 (2017); <https://doi.org/10.1093/mnras/stx164>.
- [41] F. G. Tricomi, *Integral Equations* (Dover Publications, 1985).

METHOD OF INTEGRAL EQUATIONS IN THE THEORY OF ROTATIONAL WHITE DWARFS

M. Vavrukh, S. Smerechynskyi, D. Dzikovskyi
Ivan Franko National University of Lviv,
 8, Kyrylo & Methodiy St., Lviv, UA-79005, Ukraine
e-mail: mvavrukh@gmail.com

We propose a new analytical approach to the calculation of a massive white dwarf's characteristics with axial rotation based on the Chandrasekhar model. The defining feature of our approach is the simultaneous usage of the differential and integral forms of the equilibrium equation. In the dimensionless form, the differential equilibrium equation is a strongly non-linear inhomogeneous equation of the second order in partial derivatives, which contains two dimensionless parameters – the relativistic parameter in stellar center x_0 and dimensionless angular velocity Ω . In the dwarf's interior, the rotation is taken into account as perturbation in the linear approximation for Ω^2 . In the peripheral region, the rotation is considered to be the main factor. The use of the integral equation ensures correct calculation of integration constants. The dwarf's mass, moment of inertia relative to the axis of rotation, equatorial and polar radii, the acceleration of free fall at the equator in the region $1 \leq x_0 \leq 24$, $0 \leq \Omega < \Omega_{\max}(x_0)$ were calculated based on the solution of the equilibrium equation. For the first time, the total energy of the dwarf was calculated as a function of these parameters. Using the extrapolation method, we calculated the maximal values $\Omega_{\max}(x_0)$, as well as the angular velocity $\omega_{\max}(x_0)$. The calculation results for the mass and the equatorial radius are in good agreement with the results of the work [R. A. James, *Astrophys. J.* **140**, 552 (1964)], which are based on the numerical calculation of the equilibrium equation for dwarfs of small and intermediate masses ($0.5 \leq x_0 \leq 6.245$). Figures 5 and 6 illustrate the ranges for the mass of a rotating dwarf and its total energy. The influence of the Coulomb interparticle interactions causes a decrease in the pressure of the degenerate electron subsystem and, consequently, a decrease in the maximal mass of the dwarf without rotation (see [I. W. Roxburgh, *Z. Astrophys.* **62**, 134 (1965)]). It means that the massive dwarfs in binary systems rotate with velocities close to $\omega_{\max}(x_0)$. Among the field white dwarfs of intermediate masses, there are also some where rotation plays a significant role. The proposed approach allows the estimation of the angular velocity for specific observed white dwarfs according to their masses and radii. However, it requires a more accurate description of the white dwarfs without rotation in a zero approximation model; instead of the Chandrasekhar model, another model should be used, which takes into account interparticle interactions.

Key words: white dwarfs, axial rotation, mechanical equilibrium equation, relativistic parameter, interparticle interactions.