




## ЗАГАСАННЯ ПОЛІВ ШВИДКОСТЕЙ ПІД ЧАС НЕРІВНОВАЖНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В НАПІВ ОБМЕЖЕНОМУ СЕРЕДОВИЩІ ЗА ГАРМОНІЧНОЇ ДІЇ НА НЬОГО

І. І. Денисюк , І. А. Скуратівська , І. М. Губар   
Інститут геофізики імені С. І. Субботіна,  
НАН України, Відділення геодинаміки вибуху,  
вул. Богдана Хмельницького,  
63Г, Київ, 01054, Україна,  
e-mail: [inna.skurativska@gmail.com](mailto:inna.skurativska@gmail.com)

(Отримано 20 червня 2023 р.; в остаточному вигляді — 25 липня 2023 р.; прийнято до друку — 18 серпня 2023 р.; опубліковано онлайн — 04 вересня 2023 р.)

Під час розробки методів хвильової дії на пористі середовища з метою інтенсифікації фільтраційних процесів у них виникає необхідність оцінити загасання фільтраційних коливань у пластах в умовах інтенсивних високочастотних збурень. Для дослідження цієї проблеми використовують методи математичного моделювання нестационарної нерівноважної фільтрації та розв'язання крайової задачі в напівпросторі з гармонічним збуренням на його межі. Включенням ефектів релаксації швидкості та тиску ураховують нерівноважний характер фільтраційних процесів у масивах у динамічному законі фільтрації, що є узагальненням класичного закону Дарсі. Точні стаціонарні розв'язки крайових задач, обчислені методом розділення змінних, визначають наведені коефіцієнти загасання коливань по простору. Зокрема, проаналізовано залежності цих коефіцієнтів від частоти збурень та від параметрів як однорідного, так і неоднорідного пористого середовища.

**Ключові слова:** нерівноважна фільтрація, узагальнений закон Дарсі, пористе середовище, хвильова дія, загасання.

DOI: <https://doi.org/10.30970/jps.27.3801>

### ВСТУП

У процесі експлуатації видобувних свердловин із часом відбувається зменшення їхньої продуктивності, зумовлене зниженням проникності флюїдів у привибійних зонах цих свердловин. Серед ефективних та екологічних способів підвищення їхньої продуктивності [1] є технологія, що ґрунтується на методі хвильової дії на середовище в цих зонах [2–10]. Технологічні аспекти реалізації хвильової дії на пласт висвітлено в працях [11, 12]. Зазначений метод вібродії полягає в опроміненні акустичним полем продуктивного пласта з метою збільшення проникності порід колектора [13]. Операційні частоти методу лежать у досить широкому діапазоні від інфразвукових значень до десятків кілогерців (ультразвук) [7]. Не зупиняючись на фізичних механізмах впливу на фільтрацію [7, 10, 14], зазначимо, що в процесі дії акустичних коливань поряд із іншими ефектами формуються коливні фільтраційні мікропотіки, які також сприяють збільшенню проникності пласта, промиваючи порові канали породи. Розміри зони впливу ультразвукових акустичних полів невеликі через суттєве загасання таких коливань, однак ці розміри достатні для впливу на ділянку кольтматації свердловини, де найбільш суттєво пригнічується фільтраційний потік нафти чи газу до колоні. Тому оцінка загасання фільтраційних коливань у пласті в широкому діапазоні частот є важливою задачею. Крім того, дослідження фільтрації в умовах періодичної дії актуальне, оскільки в процесі видобутку нафти використовують відкачувальні

чи нагнітальні помпи, що працюють у періодичному режимі.

Низку загальних результатів розв'язання такої задачі вдається отримати в межах математичного моделювання процесів фільтрації в пористих середовищах. Із використанням ідей теорії суцільного середовища формулюється крайова задача в напівпросторі, що складається з диференціальних рівнянь, які виражають закон збереження маси рідини, фільтрованої через пористе середовище, і закон фільтрації, що визначає особливості взаємодії потоку рідини та скелету пористого матеріалу. Рівняння руху замикаються рівняннями стану рідини та залежностями пористості від термодинамічних характеристик середовища (переважно тиску та температури).

Загалом, рівняння фільтрації (Дарсі та його модифікації) є феноменологічним, що пояснює наявність різних форм його запису залежно від ефектів, які враховують під час дослідження. Виведення закону Дарсі з балансу сил на макрорівні з використанням уявлення статистичної механіки [15] одразу приводить до інтегральних, тобто нелокальних, моделей у просторі та часі, наприклад, для насиченого статистично однорідного пористого середовища

$$u(x, t) = - \int_0^t ds \int_{R^3} dy K(x - y, t - s) \nabla p(y, s), \quad (1)$$

де  $u$  — середня швидкість порової рідини щодо скелету (швидкість Дарсі),  $K$  — узагальнена гідравлічна провідність [15]. Як частковий випадок, коли пористе середовище порівняно щільне та дрібнозернисте, а фільтраційний потік ламінарний, ядро релаксації  $K$



можна вибрати у формі дельта-функцій простору та часу, що приводить до класичного закону Дарсі.

У цій статті розглянуто процеси з відносно швидкою зміною параметрів, коли, як показують експерименти [16], спостерігається запізнення відгуку фільтраційного потоку, інакше кажучи, бачимо локальну нерівноважність процесу фільтрації, що супроводжується релаксацією тиску та швидкості фільтрації. Особливо яскраво такі ефекти проявляються під час фільтрації ньютонівських рідин (важка нафта, розчини полімерів, сумішей, емульсій), фільтрації в пластах з особливо складною будовою [16–20]. Зазначимо, що нерівноважні явища у фільтраційних процесах часто спостерігаються під час руху мультифазних рідин із масообміном між фазами, зокрема в процесах витіснення однієї рідини іншою [21–23], у тріщинувато-пористих середовищах [23], переміщення води в ґрунтових масивах [24].

Якщо обмежитися малим оточенням точки спостереження в часопросторі й розвинути ядро релаксації в ряд Тейлора, то отримуємо слабо нелокальні (релаксація тиску) аналоги закону Дарсі. Математично описати немиттєву реакцію поля швидкостей на дію градієнта тиску [25] можна заміною у співвідношенні (1) значення функції  $u(x, t)$  на інше її значення  $u(x, t + \tau)$ , де  $\tau$  — час релаксації. Оскільки  $\tau$  мале, то можна обмежитися розвиненням  $u(x, t + \tau)$  у ряд Тейлора та отримати динамічні закони Дарсі з релаксацією швидкості фільтрації [26]. Поєднання запізненої реакції швидкості та тиску в одному рівнянні приводить до узагальненого закону Дарсі, який добре описує експериментальні дані [16] та широко використовується під час розв'язання задач фільтрації [17, 18, 21, 22, 27]. Для систематичного виведення динамічних законів Дарсі використовують релаксаційний формалізм [28, 29]. Зокрема, у праці [30] були побудовані нелінійні рівняння фільтрації з релаксацією та просторовою нелокальністю, а також знайдені точні хвильові та поліноміальні розв'язки моделей пружного режиму фільтрації.

У цій статті розглянуто лінійні динамічні рівняння Дарсі з релаксацією. Щобільше, як зазначено в праці [16], фільтрація в неоднорідному пористому середовищі супроводжується збудженням цілої множини одночасно співіснуючих релаксаційних процесів із широким спектром часів релаксації. Опис фільтрації з кількома релаксаційними процесами приводить до динамічного рівняння Дарсі з високими часовими похідними [17], зокрема, для двох процесів отримуємо динамічний закон Дарсі з другими часовими похідними.

Отже, у статті розглянуто пружний режим нерівноважної фільтрації в напівпросторі, коли на його межі задано гармонічний закон стимулювання. Особливу увагу приділено оцінці ефектів загасання за такої фільтрації залежно від частоти стимулювання пласта, співвідношення між рівноважними та замороженими коефіцієнтами фільтрації пласта, співвідношення між часами релаксації, розподілу коефіцієнтів фільтрації по координаті.

## І. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕРІВНОВАЖНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

Побудову моделей нерівноважної фільтрації розпочнемо з найпростішого випадку, коли фільтрація супроводжується одним релаксаційним процесом. Тоді релаксаційне узагальнення закону Дарсі можна отримати з інтегрального співвідношення (1), коли наближення до рівноважного стану описується релаксаційним ядром виду  $K(x, t) = (K_\infty \delta(t) + (K_0 - K_\infty) e^{-t/\tau} / \tau) \delta(x)$ , де коефіцієнти фільтрації  $K_0 = k_0/\mu_0$ ,  $K_\infty = k_\infty/\mu_\infty$ ,  $k_{0,\infty}$  — рівноважний та заморожений коефіцієнти проникності,  $\mu_{0,\infty}$  — рівноважна та заморожена динамічна в'язкість рідини,  $\delta(t)$  — дельта-функція Дірака.

Отже, динамічне узагальнення закону Дарсі для фільтрації з одним релаксаційним процесом описується таким інтегральним рівнянням [18, 29, 31]:

$$u + K_\infty \nabla p + \frac{K_0 - K_\infty}{\tau} \int_0^t \nabla p e^{-\frac{t-s}{\tau}} ds = 0. \quad (2)$$

Виключаючи зі співвідношення (2) інтегральний доданок, отримуємо відоме динамічне узагальнення закону Дарсі

$$\tau (u + K_\infty \nabla p)_t + u + K_0 \nabla p = 0. \quad (3)$$

Стосовно моделі (3) зазначимо, що під час поширення коливного процесу з характерним періодом  $1/\omega$  фільтраційний потік встигає адаптуватися до наведених збурень, коли  $1/\omega \gg \tau$ . Тобто, коли  $\omega\tau \rightarrow 0$ , фільтрацію можна вважати рівноважною. В іншому граничному випадку, коли період  $1/\omega$  значно менший від  $\tau$ , релаксація не встигає помітно реалізуватися (“заморожується”), і тоді випадок  $\omega\tau \rightarrow \infty$  відносять до фільтрації із замороженим релаксаційним процесом.

Як це можна побачити з аналізу дисперсійних кривих для рівняння (3), саме за граничних переходів  $\omega\tau \rightarrow 0$  та  $\omega\tau \rightarrow \infty$  отримуємо граничні закони Дарсі  $u + K_0 \nabla p = 0$  та  $u + K_\infty \nabla p = 0$ , які характеризуються коефіцієнтами  $K_0$  та  $K_\infty$ .

При цьому  $K_0 - K_\infty > 0$ , що також є наслідком обмежень, які випливають із законів нерівноважної термодинаміки [31].

За аналогією до (2), також можна побудувати динамічне рівняння Дарсі з двома релаксаційними процесами

$$u + K_\infty \nabla p + \frac{(K_0 - K_\infty)}{\tau_1 + \tau_2} \times \int_0^t \nabla p \left( e^{-\frac{t-s}{\tau_1}} + e^{-\frac{t-s}{\tau_2}} \right) ds = 0, \quad (4)$$

де  $\tau_{1,2}$  — часи релаксації.

Вилучення інтегрального доданка з (4) дає змогу [28] записати його у формі диференціального рівняння

$$\tau_1 \tau_2 (u_{tt} + K_\infty \nabla p_{tt}) + (\tau_1 + \tau_2) (u_t + \delta \nabla p_t) + u + K_0 \nabla p = 0, \quad (5)$$

де  $\delta = \frac{2\tau_1\tau_2 K_0 + (\tau_1^2 + \tau_2^2)K_\infty}{(\tau_1 + \tau_2)^2}$ .

Отже, нерівноважна фільтрація рідини в пористо-му середовищі описується системою рівнянь, які виражають динамічний закон Дарсі та закон збереження маси рідини, що фільтрується [32]

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} (u + K_\infty \nabla p) + u + K_0 \nabla p &= 0, \\ \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \nabla(\rho u) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $d(\cdot)/dt = \partial(\cdot)/\partial t + u\partial(\cdot)/\partial x$  — повна похідна.

Система (6) замикається рівнянням стану рідини  $\rho = \rho(p)$  та залежностями функції пористості  $m$  від тиску  $p$ . Величини  $K_{0,\infty}$  можуть бути як сталими, так і функціями часу, координат, градієнтів тиску тощо. Аналогічно виглядає і модель фільтрації з рівнянням Дарсі у формі (5).

Очевидно, що в цілому система (6) нелінійна і отримати її загальний розв'язок не вдається, хоча окремі часткові розв'язки [23, 30] все ж можна знайти. Тому в цих дослідженнях розглянуто задачі про нерівноважну фільтрацію рідини в лінійній одновимірній постановці, коли на межі середовища задано періодичний закон його стимулювання.

Отже, лінеаризуючи систему (6) в околі стаціонарного стану  $(\rho, p) = (\rho_0, p_0)$  та використовуючи лінеаризовані рівняння

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \frac{d\rho}{dp}(p - p_0) = \rho_0 + \rho_0 \beta_\ell (p - p_0), \\ m &= m_0 + \frac{dm}{dp}(p - p_0) = m_0 + \beta_s (p - p_0), \end{aligned}$$

де  $\beta_\ell = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}$  та  $\beta_s = \frac{dm}{dp}$  — коефіцієнти об'ємної стисливості нафти та скелета породи пласта відповідно, а також вважаючи, що  $K_{0,\infty} = K_{0,\infty}(x)$ , отримаємо таку крайову задачу

$$\begin{aligned} \tau \left( u_t - \frac{K_\infty(x)}{\beta} u_{xx} \right)_t + u_t - \frac{K_0(x)}{\beta} u_{xx} \\ = 0, \quad x \in [r, +\infty), t > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

з крайовою умовою

$$u(x, t) = A \sin \omega t \quad \text{при} \quad x = r \geq 0. \quad (8)$$

Крайова умова (8) описує гармонічні зміни швидкості фільтрації на межі пласта з амплітудою  $A$  та частотою  $\omega$ . Такий режим може генеруватись акустичним випромінювачем, розташованим у свердловині на контакті з пластом. Також накладається умова про обмеженість розв'язку на нескінченності. Параметр  $\beta = \beta_s + m_0 \beta_\ell$  — коефіцієнт пружної ємності пласта. Порядок рівняння (7) за простором такий самий, як і для класичного рівняння фільтрації, тому отримана крайова задача загалом є класичною [18, 23] і може описувати роботу свердловини в періодичному режимі.

Для моделі фільтрації з двома релаксаційними процесами, лінеаризовану модель можна записати так:

$$\begin{aligned} \nu \tau^2 (u_{tt} + K_\infty \nabla p_{tt}) + \tau(1 + \nu) (u_t + \delta \nabla p_t) \\ + u + K_0 \nabla p &= 0, \\ \beta p_t + u_x &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $\nu = \tau_2/\tau_1$ ,  $\delta = \frac{2\nu K_0 + (1+\nu^2)K_\infty}{(1+\nu)^2}$ . Початкові умови нульові, крайова умова — співвідношення (8).

Також укажемо рівняння щодо тиску  $p$  для рівняння Дарсі (3)

$$p_t - \frac{K_0}{\beta} p_{xx} + \tau \left( p_t - \frac{K_\infty}{\beta} p_{xx} \right)_t = 0, \quad (10)$$

для рівняння Дарсі (5)

$$\begin{aligned} \nu \tau^2 (p_t - \frac{K_\infty}{\beta} p_{xx})_{tt} + \tau(1 + \nu) \left( p_t - \frac{\delta}{\beta} p_{xx} \right)_t \\ + p_t - \frac{K_0}{\beta} p_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Зазначимо, що рівняння (10) збігається з рівнянням, уперше згаданим у праці [16], а також із рівнянням фільтрації в тріщинувато-пористих середовищах [23, 33]. Можна показати, що рівняння (11) збігається з рівнянням теорії тріщинувато-пористих середовищ, якщо модифікувати належно закон обміну рідиною між системами блоків та тріщин (Додаток А).

## II. АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ПРО НЕРІВНОВАЖНУ ФІЛЬТРАЦІЮ

*Випадок 1.* Для повноти викладу та порівняння результатів, спершу розглянемо випадок, коли  $K_{0,\infty}(x) = K_{0,\infty} = \text{const}$ . Тоді розв'язок задачі зручно шукати в класі комплекснозначних функцій (з відповідною модифікацією крайової умови) методом Фур'є у вигляді

$$u = U(x) e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (12)$$

Підставляючи (12) в (7), отримаємо рівняння

$$U'' - U \frac{i\omega(1 + i\omega\tau)}{\frac{K_0}{\beta} \left( 1 + \frac{K_\infty}{K_0} i\omega\tau \right)} = 0 \quad (13)$$

з крайовою умовою за  $r$  у вигляді  $U(r) = A$  та умовою на нескінченності  $U \rightarrow 0$ .

Остаточний частковий розв'язок рівняння (13) такий:

$$U = A \frac{e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda r}}, \quad (14)$$

де

$$\lambda = \sqrt{\frac{i\omega(1+i\omega\tau)}{\frac{K_0}{\beta} \left(1 + \frac{K_\infty}{K_0} i\omega\tau\right)}}.$$

Оскільки нас цікавить загасання профілю  $U$  вздовж координати, то немає потреби будувати весь розв'язок задачі, а достатньо обмежитися лише обчисленням коефіцієнта загасання  $\varphi$ , який традиційно визначаємо так:  $\varphi = \text{Re}(\lambda)$ , де  $\text{Re}(\cdot)$  — дійсна частина комплексного числа.

Коефіцієнт загасання зручно записати в такій формі:

$$\bar{\varphi}(z; \theta) \equiv \frac{\varphi}{\varphi_0} = \sqrt{\frac{(\theta-1)z}{1+(\theta z)^2} + \sqrt{\frac{1+z^2}{1+(\theta z)^2}}}, \quad (15)$$

$$\varphi_0 \equiv \varphi(0; \theta) = \sqrt{\frac{\beta\omega}{2K_0}}, \quad \theta = \frac{K_\infty}{K_0} < 1, \quad z = \tau\omega.$$

Очевидно, що за зміни  $z$  функція  $\bar{\varphi}(z)$  прямує до своїх асимптотичних значень, зокрема  $\bar{\varphi}(z) \rightarrow 1$  за  $z \rightarrow 0$  та  $\bar{\varphi}(z) \rightarrow 1/\sqrt{\theta}$  за  $z \rightarrow \infty$ . Виявляється, що функція

має локальний мінімум, абсциса якого має значення:

$$z = \sqrt{\frac{3(1+\theta) - \sqrt{9+14\theta+9\theta^2}}{2\theta^2}}. \quad (16)$$

Для встановлення характеру поведінки величини  $z$  від параметра  $\theta$  у виразі (16) виконаємо ряд оцінок, детально викладених у Додатку Б. З отриманих результатів випливає, що відповідна функція  $z(\theta)$  є спадною.

Тобто зі зростанням  $\theta$  критична точка зміщується ліворуч. Типовий вигляд кривих  $\bar{\varphi}(z)$  зображено на рис. 1 за  $\theta_1 = 0.2$  (відповідну горизонтальну асимптоту позначено штриховою лінією) та  $\theta_2 = 0.4$ .

*Випадок 2.* Для моделі (10) розв'язок (12) крайової задачі також має експоненційний вигляд (14) з показником

$$\lambda = \sqrt{\frac{i\omega [1 + (1+\nu)iz - \nu z^2]}{\frac{K_0}{\beta} (1 + \delta iz - \nu\theta z^2)}},$$

де  $\delta = \frac{2\nu+(1+\nu^2)\theta}{(1+\nu)^2}$ ,  $\theta = K_\infty/K_0$ ,  $z = \omega\tau$ . Легко переконатись, що за  $\nu = 0$  вирази для  $\lambda$ , знайдені у випадках 1 та 2, збігаються. Коли  $\nu = 1$ , можна скоротити дріб на  $(1+iz)$  і знову отримати вираз для  $\lambda$  такий самий, як у випадку 1.

Функція (15) має вигляд

$$\bar{\varphi}(z; \nu, \theta) = \sqrt{\frac{(1+\nu)z(\mu-1-\mu\nu z^2+\nu\theta z^2)}{\mu^2(1+\nu)^2 z^2 + (1-\nu\theta z^2)^2}} + \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+\nu^2 z^2)}{\mu^2(1+\nu)^2 z^2 + (1-\nu\theta z^2)^2}}. \quad (17)$$

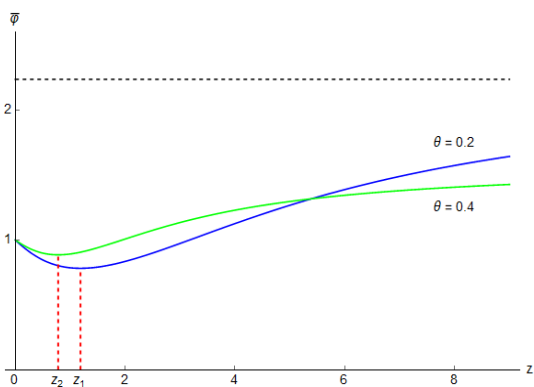


Рис. 1. Графіки функції  $\bar{\varphi}(z)$ , визначеної виразом (15), за  $\theta_1 = 0.2$  та  $\theta_2 = 0.4$

Fig. 1. Graphs of the function  $\bar{\varphi}(z)$  defined by the expression (15) for  $\theta_1 = 0.2$  and  $\theta_2 = 0.4$

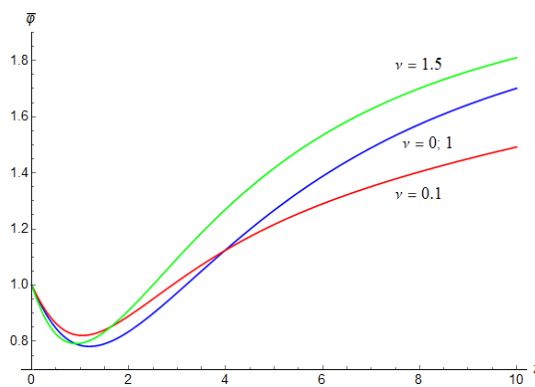


Рис. 2. Графіки функції  $\bar{\varphi}(z)$ , визначеної виразом (17) за  $\theta = 0.2$  та  $\nu = 0; 0.2; 1; 1.5$

Fig. 2. Graphs of the function  $\bar{\varphi}(z)$  defined by the expression (17) for  $\theta = 0.2$  and  $\nu = 0; 0.2; 1; 1.5$

Типовий графік функції  $\bar{\varphi}$  зображено на рис.2. Для порівняння виберемо графік  $\bar{\varphi}$ , побудований на рис. 1 за  $\theta = 0.2$  (криві, позначені синім кольором). Очевидно, що за  $\nu = 0$  та  $\nu = 1$  графіки збігатимуться, за

$\nu = 0.2$  та  $\nu = 1.5 > 1$  графіки функції перетинають референтну криву, до того ж ліворуч зміщується і критична точка. Після перетину референтної кривої графік  $\bar{\varphi}$  йде вище від неї за  $\nu = 1.5 > 1$  (зелена

крива) і нижче за  $\nu = 0.2 < 1$  (червона лінія).

*Випадок 3.* Тепер розглянемо випадок, коли  $K_{0,\infty}$  є функціями координати. Хоч рівняння й лишається лінійним, однак його коефіцієнти вже не є сталими величинами і отримати загальний розв'язок для довільних функцій  $K_{0,\infty}(x)$  не вдається. Усе ж такі є досить широкий набір функцій [34], коли рівняння можна проінтегрувати повністю. У цій праці розглянуто степеневі функції  $K_0(x) = a/x^n$  та  $K_\infty(x) = a\theta/x^n$ , де  $n$  може приймати як додатні, так і від'ємні дійсні значення.

Тоді рівняння, отримане підстановкою (12) в (7), запишемо в такому вигляді

$$U'' - Ux^n\Omega = 0, \quad \Omega = \frac{i\omega(1 + i\omega\tau)}{\frac{\alpha}{\beta}(1 + \theta i\omega\tau)}. \quad (18)$$

Як відомо [34], загальний розв'язок рівняння (18) можна виписати на основі функцій Бесселя та принципу суперпозиції.

$$U = \sqrt{x} \left[ C_1 I_{1/2q} \left( \frac{\sqrt{\Omega}}{q} x^q \right) + C_2 K_{1/2q} \left( \frac{\sqrt{\Omega}}{q} x^q \right) \right],$$

$$q = \frac{n+2}{2},$$

де  $C_{1,2}$  — сталі, що визначаються з крайових умов.

Тоді з урахуванням крайової умови  $U(r) = A$ ,  $r \neq 0$  та обмеженості на нескінченності отримаємо розв'язок:

$$U = A \frac{\sqrt{x} K_{1/2q} \left( \frac{\sqrt{\Omega}}{q} x^q \right)}{\sqrt{r} K_{1/2q} \left( \frac{\sqrt{\Omega}}{q} r^q \right)}. \quad (19)$$

Параметр  $\text{Re}(\sqrt{\Omega}/q)$ , очевидно, виконує роль коефіцієнта загасання, аналогічного до  $\varphi$ . Однак наведена величина  $\bar{\varphi}$  збігатиметься з (15).

### III. ВИСНОВКИ

Отже, у проведених дослідженнях із використанням узагальнених динамічних законів Дарсі розглянуто математичну модель пружного режиму нестационарної нерівноважної фільтрації рідини в пористому середовищі плоского пласта. Зокрема, побудовано

рівняння Дарсі з двома релаксаційними процесами в однорідному пористому середовищі та показано подібність опису його фільтраційної динаміки до процесів у тріщинувато-пористому пласті.

У роботі розв'язано одновимірні крайові задачі нерівноважної фільтрації без початкових умов та з гармонічним збуренням на межі напівпростору. Методом розділення змінних встановлено вигляд стаціонарних розв'язків задач, які визначають розподіл вібрацій по простору, тоді як часова компонента розв'язку гармонічна. Використовуючи побудовані розв'язки, проаналізували загасання вібрацій за нерівноважної фільтрації залежно від частоти збурення та відношення коефіцієнтів фільтрації  $K_\infty/K_0$ . Також обчислено значення частоти, де досягається мінімум наведеного коефіцієнта загасання, та встановлено зсув точки мінімуму коефіцієнта загасання в бік менших частот за зростання відношення коефіцієнтів фільтрації.

У випадку використання закону Дарсі з двома релаксаційними процесами показано, що залежно від відношення часів релаксації  $\nu = \tau_2/\tau_1$  крива відносного коефіцієнта загасання виходить на асимптотичні значення (заморожена релаксація), які можуть бути більшими ( $\nu > 1$ ) або меншими ( $\nu < 1$ ) від значень, що спостерігаються у випадку закону Дарсі з одним релаксаційним процесом. До того ж точки перетину кривих, що відповідають законам Дарсі з різною кількістю релаксаційних процесів, лежать по різні боки точки мінімуму кривих: за  $\nu > 1$  — лівіше, за  $\nu < 1$  — правіше. Такі особливості кривих можуть стати в нагоді під час верифікації математичних моделей фільтрації.

Аналогічні дослідження вдалося також поширити на пористі середовища, у яких коефіцієнти фільтрації є степеневими функціями просторової координати. Зокрема, показано, що наведений коефіцієнт загасання поводить себе аналогічно до такого коефіцієнта в середовищі зі сталим коефіцієнтом фільтрації. Зазначимо, що є підстави вважати, що така поведінка властива й іншим пористим середовищам, які характеризуються нестепеневими коефіцієнтами фільтрації.

Отримані результати можуть бути узагальнені для більшої кількості релаксаційних процесів, включаючи коливні ядра релаксації [28], на випадок врахування просторової нелокальності полів швидкості та тисків, на багатовимірний випадок тощо. Висновки, що випливають із досліджень, наприклад, оцінка частот коливань із мінімальним загасанням, можуть бути корисними під час розробки технології інтенсифікації видобутку мінеральних ресурсів.

#### Додаток А: Рівняння фільтрації в тріщинувато-пористому середовищі

Як відомо [23, 33] модель фільтрації в тріщинувато-пористому середовищі описують моделлю

$$\frac{\partial m_1 \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u_1 - q = 0, \quad \frac{\partial m_2 \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u_2 + q = 0, \quad (1)$$

$$q = \frac{\rho \alpha}{\mu} (p_2 - p_1), \quad u_{1,2} = -\frac{k_{1,2}}{\mu} \nabla p,$$

де традиційно  $m_{1,2}$  — пористості,  $u_{1,2}$  — швидкості рідини,  $p_{1,2}$  — тиски,  $k_{1,2}$  — коефіцієнти проникності. Індеси 1 та 2 відповідають характеристикам у системах тріщин та блоків відповідно. Величини  $\rho$  та  $\mu$  — густина та в'язкість рідини. Параметр  $\alpha$  характеризує інтенсивність обміну рідиною між тріщинами та блоками.

Як показано в [33], рівняння для потоку  $q$  можна записати в інтегральній формі

$$q = \frac{\rho\alpha}{\mu} \left( p_0 - p - \frac{1}{\rho\beta_2} \int_0^t q ds \right) \quad (2)$$

або в диференціальній формі

$$q_t + \frac{\rho\alpha}{\mu} p_t + \frac{\alpha}{\mu\beta_2} q = 0.$$

Приймаючи  $u_2 = 0$ , лінеаризуючи рівняння та виключаючи змінну  $q$ , отримуємо рівняння

$$p_t - \frac{k_1}{\mu(\beta_1 + \beta_2)} p_{xx} + \frac{\mu\beta_1\beta_2}{\alpha(\beta_1 + \beta_2)} p_{tt} - \frac{k_1\beta_2}{\alpha(\beta_1 + \beta_2)} p_{xxt} = 0, \quad (3)$$

яке збігається з рівнянням (10) з точністю до позначень сталих коефіцієнтів.

Якщо потік  $q$  визначати не рівнянням (2), а його релаксаційною модифікацією

$$\tau q_t + q = \frac{\rho\alpha}{\mu} \left( p_0 - p - \frac{1}{\rho\beta_2} \int_0^t q ds \right),$$

яка в диференціальній формі записується так

$$\tau q_{tt} + q_t + \frac{\rho\alpha}{\mu} p_t + \frac{\alpha}{\mu\beta_2} q = 0,$$

то відповідне рівняння фільтрації матиме наступний вигляд

$$\tau(\beta_1 q_{tt} - \frac{k_1}{\mu} p_{xx})_{tt} + (\beta_1 q_t - \frac{k_1}{\mu} p_{xx})_t + p_t \left[ \frac{\alpha}{\mu} \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} + 1 \right) \right] - \frac{\alpha k_1}{\mu^2 \beta_2} p_{xx} = 0, \quad (4)$$

що збігається з рівнянням (11) з точністю до позначень сталих коефіцієнтів.

#### Додаток В: Монотонність функції (16)

Щоб довести, що функція (16) є спадною, використаємо означення монотонності. Для цього виберімо довільно два значення аргументу  $\theta_{1,2}$  і для визначеності приймімо, що  $\theta_1 < \theta_2$ . Тоді для  $z_{1,2} \equiv z(\theta_{1,2})$  — значень функції (16) (попередньо позбулися ірраціональності в чисельнику) у точках  $\theta_{1,2}$  справедливі оцінки

$$z_1 = \sqrt{\frac{2}{\theta_1(3(1 + \theta_1) + \sqrt{9 + 14\theta_1 + 9\theta_1^2})}} > \sqrt{\frac{2}{\theta_2(3(1 + \theta_2) + \sqrt{9 + 14\theta_2 + 9\theta_2^2})}} = z_2. \quad (1)$$

Отже,  $z(\theta_1) > z(\theta_2)$ , що означає спадний характер функції  $z(\theta)$ .

#### ПОДЯКИ

Автори висловлюють вдячність докторові фізико-математичних наук Скуратівському Сергієві та докторові фізико-математичних наук Микулякові Сергієві за корисні поради під час обговорення результатів роботи. Робота частково фінансується за НДР 0123U100181 та НДР 0123U100183.

[1] М. В. Худін, О. М. Карпаш, Наук. вісн. ІФНТУНГ **1**(34), 89 (2013).  
 [2] В. В. Яковлев *та ін.*, Акуст. вісн. **17**(3), 32 (2015); <http://hydromech.org.ua/content/pdf/av/av>

-17-3(32-42).pdf.  
 [3] О. І. Гутах, Наук. вісн. ІФНТУНГ **3**(29) 53 (2011).  
 [4] В. М. Казанцев, *та ін.*, Нафтова і газова промисловість **1**, 39 (2003).

- [5] I. I. Денисюк, В. А. Лемешко, Т. С. Поляковська, Вч. зап. ТНУ ім. В. І. Вернадського. Сер. Техн. науки **30**, 25 (2019); <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2019.3-2/05>.
- [6] Ю. В. Човнюк, В. Б. Довгалик, О. М. Скляренко, І. О. Пейфтева, Суч. техн. будів. **27**, 96 (2019); <https://doi.org/10.31649/2311-1429-2019-2-96-113>.
- [7] H. Hamidi *et al.*, Ultrasonics **54**, 655 (2014); <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2013.09.006>.
- [8] N. Khan *et al.*, Ultrason. Sonochem. **38**, 381 (2017); <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2017.03.034>.
- [9] A. Dollah *et al.*, Int. J. Eng. Technol. **7**(3.11), 232 (2018); <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i3.11.16015>.
- [10] H. Hamidi *et al.*, J. Petrol Explor. Prod. Technol. **2**, 29 (2012); <https://doi.org/10.1007/s13202-012-0018-x>.
- [11] А.В. Кучернюк, Нафтова і газова промисловість **5**, 23 (2003).
- [12] Ya. M. Bazhaluk *et al.*, Nauk. Visn. Nat. Hirn. Univ. **5**, 16 (2016).
- [13] C. Pérez-Arancibia, E. Godoy, M. Durán, Wave Motion **77**, 214 (2018); <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2017.12.005>.
- [14] M. Manga *et al.*, Rev. Geophys. **50**, RG2004 (2012); <https://doi.org/10.1029/2011RG000382>.
- [15] X. Hu, J. H. Cushman, Stochastic Hydrol. Hydraul. **8**, 109 (1994); <https://doi.org/10.1007/BF01589892>.
- [16] M. G. Alishaev, A. H. Mirzadzhanzade, Izv. Vuzov. Neft. Gaz No. 6, 71 (1975); (see also <https://www.researchgate.net/publication/323487115>).
- [17] B. Khuzhayorov, J.-L. Auriault, P. Royer, Int. J. Eng. Sci. **38**(5), 487 (2000); [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(99\)00048-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(99)00048-8).
- [18] Yu. M. Molokovich, *Nonequilibrium Filtration and its Application in Oilfield Practice* (Regular and chaotic dynamics, Moscow, 2006).
- [19] N. Rudraiah, P.N. Kaloni, P. V. Radhadevi, Rheol. Acta **28**, 48 (1989); <https://doi.org/10.1007/BF01354768>.
- [20] G. I. Barenblatt, T. W. Patzek, D. B. Silin, SPE J. **8**(04), 409 (2003); <https://doi.org/10.2118/87329-PA>.
- [21] H. Shokri, M. H. Kayhani, M. Norouzi, Phys. Fluids **29**, 033101 (2017); <https://doi.org/10.1063/1.4977443>.
- [22] N. Chemetov, W. Neves, in: *Hyperbolic Conservation Laws and Related Analysis with Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 49*, edited by G.-Q. G. Chen *et al.* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014), p. 87; [https://doi.org/10.1007/978-3-642-39007-4\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-39007-4_4).
- [23] G. I. Barenblatt, V. M. Entov, V. M. Ryzhik, *Theory of Unsteady Liquid and Gas Filtration* (Nedra, Moscow, 1972).
- [24] E. Diamantopoulos, W. Durner, Vadose Zone J. **11**(3), 1 (2012); <https://doi.org/10.2136/vzj2011.0197>.
- [25] M. Ciarletta, B. Straughan, V. Zampoli, Int. J. Non-Linear Mech. **52**, 8 (2013); <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.01.020>.
- [26] G. Rehlinger, Transp. Porous Med. **8**, 263 (1992); <https://doi.org/10.1007/BF00618545>.
- [27] B. Kh. Khuzhayorov, E. Ch. Kholiyarov, Sh. Mamatov, AIP Conf. Proc. **2637**, 040009 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0118538>.
- [28] V. A. Danylenko, T. B. Danevych, O. S. Makarenko, S. I. Skurativskiy, V. A. Vladimirov, *Self-organization in Nonlocal Non-Equilibrium Media* (Subbotin Institute of Geophysics of NANU, Kyiv, 2011).
- [29] Yu. A. Buevich, G. P. Yasnikov, J. Eng. Phys. **44**(3), 340 (1983); <https://doi.org/10.1007/BF00827375>.
- [30] S. I. Skurativskiy, I. A. Skurativska, Ukr. Fiz. Zh. **64**(1), 19 (2019); <https://doi.org/10.15407/ujpe64.1.19>.
- [31] A. V. Kosterin, J. Eng. Phys. **39**, 769 (1980); <https://doi.org/10.1007/BF00821832>.
- [32] R. Helmig, *Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface* (Springer, Berlin, 1997).
- [33] Y. P. Zheltov, V. S. Kutlyarov, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **6**, 45 (1965); <https://doi.org/10.1007/BF00919311>.
- [34] A. D. Polianin, V. F. Zaitsev, *Handbook of Ordinary Differential Equations. Exact Solutions, Methods, and Problems* (CRC Press, 2018).

#### ATTENUATION OF VELOCITY FIELDS DURING NON-EQUILIBRIUM FILTRATION IN A HALF-SPACE MEDIUM FOR HARMONIC ACTION ON IT

I. I. Denysiuk, I. A. Skurativska, I. M. Hubar

*Subbotin Institute of Geophysics of the NAS of Ukraine, Division of Geodynamics of Explosion, 63G, Bohdan Khmelnytskyi St., Kyiv, UA-01054, Ukraine,*

*e-mail: inna.skurativska@gmail.com*

When developing methods of wave action on porous media for the purpose of intensifying filtration processes, it becomes necessary to evaluate the attenuation of filtration oscillations in porous strata under conditions of intense high-frequency disturbances. To investigate this problem, the methods of mathematical modeling of non-stationary non-equilibrium filtration and the solving of a one-dimensional linear boundary value problem in a half-space with a harmonic disturbance at its boundary are used. The non-equilibrium nature of filtration processes in reservoirs is taken into account in the dynamic law of filtration, which is a generalization of the classical Darcy's law, by including the effects of velocity and pressure relaxation. In this research, filtering equations are considered with one and two relaxation processes, which were described by exponential relaxation kernels.

The exact stationary solutions of boundary value problems were calculated by using the method of separation of variables and the damping coefficients of oscillations in space were determined. Considering the reduced damping coefficients as the ratio of the "non-equilibrium" damping coefficient to the equilibrium one, the dependences of the reduced coefficients on the disturbance frequency, on the ratio of the equilibrium and frozen filtering coefficients, and on the ratio of the relaxation times (in the case of the dynamic Darcy equation with two relaxation processes) were analyzed. In particular, the existence

of a frequency that provides a minimum of damping coefficients is shown, and the displacement of the minimum point of the damping coefficient towards lower frequencies with an increase in the ratio of the filtering coefficients is established.

In the case of using Darcy's law with two relaxation processes, depending on the ratio of relaxation times, the curve of the reduced damping coefficient reaches asymptotic values that differ from those corresponding to Darcy's law with one relaxation process. In addition, the points of intersection of the curves corresponding to Darcy's laws with different number of relaxation processes lie on different sides of the minimum point of the curves. Such features of the curves can be useful in the verification of mathematical filtering models. The problem is solved both for a homogeneous and for a non-homogeneous porous media.

**Key words:** non-equilibrium filtration, generalized Darcy's law, porous medium, wave action, attenuation.