

## КРИТИЧНА ПОВЕДІНКА СТРУКТУРНО-НЕВПОРЯДКОВАНИХ СИСТЕМ З ДАЛЕКОСЯЖНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

М. Дудка<sup>1,2,3</sup> , Д. Шаповал<sup>1,2</sup> , Ю. Головач<sup>1,2,4,5</sup> 

<sup>1</sup>Інститут фізики конденсованих систем Національної академії наук України, Львів, 79011, Україна,

<sup>2</sup>Співпраця  $\mathbb{L}^4$ , Докторський коледж із статистичної фізики складних систем,  
Ляйпциг-Лотарингія-Львів-Ковентрі, Європа

<sup>3</sup>Національний університет "Львівська політехніка", Львів, 79013, Україна,

<sup>4</sup>Центр дослідження плинних і складних систем,

Університет Ковентрі, Ковентрі, CV15FB, Велика Британія,

<sup>5</sup>Центр науки про складність, Відень, 1080, Австрія

(Отримано 29 листопада 2023 р.; в остаточному вигляді — 19 лютого 2024 р.; прийнято до друку — 28 лютого 2024 р.;  
опубліковано онлайн — 07 травня 2024 р.)

Досліджено вплив структурної неупорядкованості на універсальні характеристики критичної поведінки систем з далекосяжною взаємодією. На прикладі  $n$ -векторної моделі в  $d$ -вимірному просторі розглянуто феромагнітне впорядкування в структурно-неупорядкованих магнетиках з далекосяжною, степеневозасною відстанню  $x$ , взаємодією  $J(x) \sim x^{-d-\sigma}$ , з контролювальним параметром  $\sigma$ . За допомогою методу теоретико-польової ренормалізаційної групи проаналізовано реалізацію різних класів універсальності залежно від параметрів  $(d, n, \sigma)$ . Продемонстровано, що є така ділянка цих параметрів, коли далекосяжна взаємодія та структурний безлад приводять до синергетичного ефекту й появи нового, "випадкового далекосяжного" (random long-range) класу універсальності. У трипетловому наближенні отримано ренормалізаційно-групові функції і на їхній основі розраховано критичний показник кореляційної довжини  $\nu(\epsilon', n)$  як ряд теорії збурень за  $\epsilon' = 2\sigma - d$ . Кількісні оцінки одержано з використанням методів пересумовування асимптотичних рядів.

**Ключові слова:** критичні властивості, класи універсальності, заморожений безлад, далекосяжні взаємодії, ренорм-група, пересумовування.

DOI: <https://doi.org/10.30970/jps.28.2601>

### I. ВСТУП

Одним із найбільш вражаючих наслідків взаємодії між елементарними складниками речовини (частинками, атомами, молекулами) є раптова зміна її макроскопічних властивостей — фазовий перехід [1–3]. Незважаючи на те, що "золотим віком" теорії фазових переходів та критичних явищ прийнято вважати останню чверть минулого століття, у цій ділянці тривають активні дослідження, що дають постійний потік цікавих результатів [2]. Сьогодні, окрім вивчення критичних точок у рідинах та рівноважних фазових переходів другого роду, дослідження охоплюють нерівноважні фазові переходи, зокрема процеси формування дисипативних структур чи явища перколяції, як приклад геометричного фазового переходу, коли в системі виникає нескінченний кластер [4]. Однак навіть у теорії рівноважних фазових переходів багато питань усе ще нез'ясовані, й це стосується не лише ліпшого узгодження теорії з експериментальними даними. Як приклад можна навести ефекти кросовера в складних рідинах, де потрібно враховувати вплив різних типів критичної поведінки [5], чи дослідження магнітних систем під впливом різних типів безладу (безлад заміщення, випадкова анізотропія, фрустрації тощо) [6, 7], зокрема, коли взаємодія має далекосяжний характер [8, 9].

Відомо, що степенева поведінка термодинамічних величин (скейлінг) в околі точок неперервного фазового переходу (як-от точка Кюрі у феромагнетиках чи точка Нееля в антиферомагнетиках) має універ-

сальний характер: відповідні критичні показники чи відношення критичних амплітуд не залежать від специфічних деталей досліджуваних систем. Натомість ці універсальні величини залежать від глобальних характеристик системи: характер взаємодії, вимірність простору, симетрія та кількість компонент параметра порядку. Тому великі класи різних за своєю мікроскопічною природою систем мають однакові характеристики в околі критичної точки, формуючи класи універсальності [10].

Створюючи фундаментальну теорію фазових переходів, необхідно зокрема розрізнити ті системи, у яких взаємодія між компонентами є короткосяжною, і ті, у яких взаємодія має далекосяжний характер. Звісно, для електромагнітної взаємодії, на відміну від гравітаційної, зазвичай наявні механізми екранування, що робить її ефективно короткосяжною. Однак, як було показано в численних дослідженнях (див., наприклад, огляди [11]), у багатьох фізичних, хімічних та біологічних [12] системах взаємодія може мати далекосяжний характер. Тому застосування моделей з далекосяжною взаємодією можна відшукати не тільки в дослідженнях гравітаційних систем [13], але й для кулонівських систем та магнетиків з диполь-дипольною взаємодією [14], у фізиці плазми [15], гідродинаміці чи геофізичній механіці рідин [11, 16–18], чи в дослідженнях квантових систем (див. нещодавній огляд [19]). Аналіз моделей з далекосяжною взаємодією показав, що вони демонструють нові якісні властивості та поведінку, яка відмінна від аналогічних з короткосяжною взаємодією [20, 21]. До при-



кладу, системи із сильною далекосяжною взаємодією не є адитивними, що, зокрема, спричиняє порушення ергодичності [22]. З іншого боку, хоча системи зі слабкою далекосяжною взаємодією є адитивними, взаємодія ефективно змінює критичні властивості та може зумовити далекосяжне впорядкування в одновимірних системах чи впливати на перехід до поведінки, передбаченої теорією середнього поля за вищої вимірності [8, 9, 16, 17].

Поряд із характером взаємодії, клас універсальності визначають також симетрією системи, зокрема симетрією відповідного ефективного гамільтоніана. Прикладом такої зміни класу універсальності, що буде предметом нашого дослідження, може бути внесення в магнітну систему структурної неупорядкованості. Ми зосередимося на слабкому структурному безладі, оскільки сильний безлад, очевидно, впливає на критичну поведінку — супроводжується перколяційними та фрустраційними ефектами, що приводить до відсутності далекосяжного магнітного впорядкування. Як було показано в численних теоретичних та експериментальних роботах, слабкий безлад може змінити характер критичної поведінки чи навіть модифікувати впорядкування, спричинивши появу низькотемпературної фази з квазідалекосяжним упорядкуванням чи фази спінового скла [6, 23]. Клас універсальності чи навіть рід фазового переходу може змінюватися зі зміною кількості компонент (вимірності) параметра порядку  $n$  у системах зі складними внутрішніми симетріями. Таке значення вимірності параметра порядку, за якого відбувається зміна класу універсальності, називається маргінальною чи граничною вимірністю  $n_c$  і становить окремий предмет досліджень під час побудови кількісної теорії фазових переходів [24, 25].

Мета нашого дослідження — проаналізувати зміни критичної поведінки багаточастинкової магнітної системи, коли конкурують два фактори: слабка далекосяжна взаємодія та слабкий структурний безлад. Аналіз проведемо за допомогою методу теоретико-польової ренормалізаційної групи, що дасть нам змогу ідентифікувати класи універсальності досліджуваної системи, їхню стійкість до змін глобальних параметрів і визначити універсальні характеристики критичної поведінки — критичні показники та граничні вимірності. Структура статті така: у розділі II ми зробимо короткий огляд попередніх робіт, опишемо метод дослідження і введемо основні характеристики досліджуваної моделі. У розділі III подамо аналіз магнітної системи зі слабкою далекосяжною взаємодією між її магнітними моментами та слабким безладом у структурі ґратки, перейшовши до ефективної теорії та обчислюючи відповідні ренормгрупові функції в третьому порядку теорії збурень. Підсумки нашого дослідження наведені в розділі IV.

## II. ОГЛЯД

У цьому розділі ми розглянемо особливості аналізу критичної поведінки під час застосування методу ренормалізаційної групи, поступово ускладнюючи ефе-

ктивні гамільтоніани досліджуваних систем. Аналіз розпочнемо з розгляду структурно-впорядкованого магнетика з короткосяжною взаємодією (підрозділ II А), деталізуючи зміни в критичній поведінці, що можуть викликатися далекосяжною взаємодією чи структурним безладом (у підрозділах II Б і II В відповідно

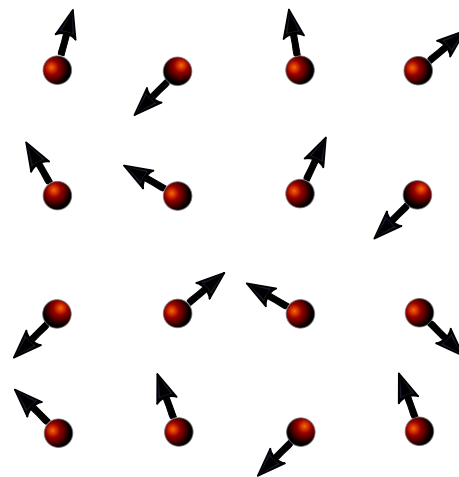


Рис. 1. Двовимірна ( $d = 2$ ) ґратка, де червоні диски зображують вузли  $\mathbf{x}$  ґратки з  $n$ -компонентними спінами  $\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = (S_{\mathbf{x}}^1, \dots, S_{\mathbf{x}}^n)$  (чорні стрілки)  
 Fig. 1. Two-dimensional ( $d = 2$ ) lattice, with red disks depicting sites  $\mathbf{x}$  of the lattice with  $n$ -component spins  $\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = (S_{\mathbf{x}}^1, \dots, S_{\mathbf{x}}^n)$  (black arrows)

### A. Магнетик з короткосяжною взаємодією

Розглянемо систему взаємодіючих  $n$ -компонентних класичних векторів — “спінів” (магнітних моментів)  $\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = (S_{\mathbf{x}}^1, \dots, S_{\mathbf{x}}^n)$ , розташованих у вузлах  $d$ -вимірної ґратки (рис. 1), що маркуються вектором  $\mathbf{x}$ . Гамільтоніан такої багаточастинкової системи за відсутності зовнішнього магнітного поля буде таким:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} J(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \mathbf{S}_{\mathbf{x}'}, \quad (1)$$

де підсумовування проводиться за всіма вузлами,  $J(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) > 0$  — феромагнітна взаємодія між спінами  $\mathbf{S}_{\mathbf{x}}$  та  $\mathbf{S}_{\mathbf{x}'}$ . У цьому підрозділі вважатимемо її короткосяжною, а саме ненульовою тільки для пар найближчих сусідів:

$$J(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \begin{cases} J, & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \text{стала ґратки,} \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2)$$

Така модель є узагальненням відомої короткосяжної моделі Ізінга ( $n = 1$ ) [26] на випадок  $n$ -компонентних спінів і є базовою моделлю для опису фазових переходів у системах з багатокомпонентним параметром порядку (її також називають  $n$ -векторною моделлю

Стенлі чи, за  $n = 3$ , класичною моделлю Гайзенберга [27].

Сучасна теорія критичних явищ значною мірою сформована завдяки методу ренормалізаційної групи (РГ) [10], застосування якого базується на ідеї масштабної інваріантності в околі критичної точки, де характерним масштабом є лише кореляційна довжина. Кількісний опис критичних явищ з високою точністю здійснюють у межах теоретико-польової РГ, коли статистичну суму  $Z$  записують як функціональний інтеграл з відповідним ефективним гамільтоніаном [10]. У такому формулюванні універсальні критичні властивості фізичної системи отримують з довгохвильової поведінки теоретико-польових гамільтоніанів. Зокрема, спіновому гамільтоніану (1) відповідатиме ефективний гамільтоніан теорії  $\phi^4$ :<sup>1</sup>

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} [\tau |\phi|^2 + |\nabla \phi|^2] + \frac{u_0}{4!} |\phi|^4 \right\}, \quad (3)$$

де  $\phi(x)$  —  $n$ -компонентне векторне поле,  $\tau \sim |T - T_c|$  визначає відстань до критичної точки, а  $u_0 > 0$  — неперенормована константа зв'язку.

Для усунення характерних розбіжностей теорії поля (т.з. ультрафіолетових розбіжностей) [10, 28] використовують різні схеми перенормування — ренормалізаційно-групові перетворення. Зміну константи зв'язку за такого перетворення описують рівнянням

$$\left. \frac{du}{d \ln \ell} \right|_{u_0, \tau} = \beta(u), \quad (4)$$

де  $\ell$  — параметр РГ потоку, що може слугувати мірою відстані до критичної точки  $T_c$  ( $T \rightarrow T_c$ , відповідає  $\ell \rightarrow 0$ ).  $\beta$ -функції, що стоять у правій частині рівняння, дають інформацію про нерухомі точки  $u^*$  (НТ) РГ перетворення, які відповідають ефективному гамільтоніану (3):

$$\beta(u^*) = 0. \quad (5)$$

Якщо наявна стійка НТ, яка водночас досяжна з початкових умов, заданих ефективним гамільтоніаном (3), то вона відповідає критичній точці в системі. Якщо такої НТ немає, то це свідчить про відсутність неперервного фазового переходу. НТ  $u^*$  є стійкою, якщо

$$\left. \frac{\partial \beta(u)}{\partial u} \right|_{u=u^*} > 0. \quad (6)$$

Для ефективного гамільтоніана (3) є дві НТ:

- (i) гаусова  $\mathcal{G}$  ( $u^* = 0$ ), яка для  $d \geq 4$  є стійкою і приводить до значень критичних показників, передбачених теорією середнього поля;

- (ii) НТ Вільсона–Фішера (надалі, розглядаючи системи з домішками, ми називатимемо цю НТ “чиста” — pure)  $\mathcal{P}$  ( $u^* \neq 0$ ), яка є стійкою для  $d < 4$  [29].

Значення  $d_{\text{uc}} = 4$ , вище від якого стійкою є гаусова НТ і справедлива середньо-польова поведінка, називається верхньою критичною вимірністю, див., однак, [30]. Для тривимірних  $d = 3$  систем НТ  $\mathcal{P}$  зі зміною кількості компонент  $n$  параметра порядку описує різні класи універсальності, як-от: модель Ізінга ( $n = 1$ ), XY-модель ( $n = 2$ ), модель Гайзенберга ( $n = 3$ ), сферична модель ( $n = \infty$ ), детальніше див. [10, 23]. Значення константи зв'язку  $u^*$  у нерухомій точці  $\mathcal{P}$  дає змогу розрахувати критичні показники для тривимірного  $n$ -компонентного магнетика з короткосяжною взаємодією, підставивши  $u^*$  у так звані вільсонівські РГ функції  $\gamma$ , які описують перенормування поля та міри відстані до критичної точки. Оскільки і  $\beta$ -, і  $\gamma$ -функції отримані за допомогою теорії збурень, одним зі способів отримати і нерухому точку, і критичні показники є їх пошук як ряду за відхиленням від верхньої критичної вимірності  $\epsilon = 4 - d$ . Нещодавно відповідні результати були отримані в шостому [31] та сьомому (!) [32] порядках теорії збурень. Наведемо два перші нетривіальні члени  $\epsilon$ -розкладу для критичного показника кореляційної довжини:

$$\nu_P = \frac{1}{2} + \frac{(n+2)\epsilon}{4(n+8)} + \frac{(n+2)(n+3)(n+20)\epsilon^2}{8(n+8)^3} + \dots \quad (7)$$

Ряди теорії збурень, як-от розклад за константою зв'язку чи  $\epsilon$ -розклад, мають нульовий радіус збіжності, для деяких рядів доведена їхня асимптотична природа [10]. Тому для отримання чисельних оцінок на їхній основі були розвинуті різні методи пересумування [7, 33, 34].

Отриманий вираз для критичного показника кореляційної довжини (7) свідчить про те, що критична поведінка моделі (3) нетривіально залежить від вимірності простору  $d$  та кількості компонент параметра порядку  $n$ . В наступному підрозділі, модифікувавши спіновий гамільтоніан (1), ми розглянемо ще один чинник, який може змінювати універсальні характеристики критичної поведінки.

## Б. Далекосяжна взаємодія

У цьому підрозділі ми знову розглядаємо магнетик, який моделюватимемо регулярною  $d$ -вимірною ґраткою, рис. 1. Спіновий гамільтоніан матиме попередній вигляд (1), однак тепер розглянемо випадок, коли взаємодія  $J(x)$  степеневно згасає з відстанню  $x$ :

$$J(x) \sim \frac{1}{x^{d+\sigma}}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Таку взаємодію називатимемо далекосяжною. Як згадувалося у вступі, системи з далекосяжною взаємодією можна поділити на дві групи: системи із сильною

<sup>1</sup> Такий ефективний гамільтоніан можна отримати з мікроскопічного гамільтоніана (1) за допомогою перетворення Стратоновича–Габбарда, див., наприклад, [28].

далекосяжною взаємодією, коли  $-d \leq \sigma \leq 0$  (неадитивні) та ті, у яких параметр взаємодії  $\epsilon$  додатним  $\sigma > 0$  — системи зі слабкою далекосяжною взаємодією. Саме останні й розглядаємо в цій статті. Як побачимо з результатів досліджень, наведених нижче, вплив такої взаємодії буде домінуючим за  $0 < \sigma \leq \sigma^*$ , де  $\sigma^*$  — порогове значення, і критична поведінка моделі (1) з (8) визначатиметься тепер трійкою параметрів: вимірністю простору  $d$ , кількістю компонент параметра порядку  $n$  та параметром  $\sigma$ , що описує характер згасання взаємодії. Залежно від значень цих параметрів, може відбуватися низькотемпературне впорядкування, яке належить до нового далекосяжного (long-range — LR) класу універсальності, відмінного від короткосяжного (short-range — SR) випадку, роз-

глянутого в попередньому підрозділі. Зокрема, для тривимірної  $d = 3$  сферичної моделі, коли  $n = \infty$  [35], критичну поведінку для  $\sigma > 2$  визначаємо критичними показниками короткосяжного аналога, тоді як для  $\sigma < 2$  можливі два режими, залежно від значення показника взаємодії  $\sigma$ : (i) середньо-польова поведінка та (ii)  $\sigma$ -залежні критичні показники. До того ж встановлено, що в одновимірній  $d = 1$ - моделі Ізінга ( $n = 1$ ) з далекосяжною взаємодією (8) за ненульової температури відбувається фазовий перехід у фазу далекосяжного впорядкування [36].

У теоретико-польовому представленні критичні властивості  $n$ -векторної моделі (1) з далекосяжною степеневозгасною взаємодією (8) описують таким ефективним гамільтоніаном [21]:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} [\tau |\phi|^2 + a |\nabla \phi|^2 + b |\nabla^{\sigma/2} \phi|^2] + \frac{u_0}{4!} |\phi|^4 \right\}, \quad (9)$$

де позначення такі самі, як у (3) а відмінністю є ще один оператор, дія якого в імпульсному просторі така:  $\nabla^{\sigma/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = -|k|^{\sigma/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ ,  $a$  і  $b$  — додатні параметри.

Аналіз довгохвильових властивостей ефективного гамільтоніана (9) методами теоретико-польової РГ показав [21]:

- (i) для параметра згасання взаємодії, що перевищує деяке граничне значення  $\sigma > \sigma^*$ , критичні властивості описують теорією з  $b = 0$ . У цьому випадку клас універсальності збігається з класом універсальності моделі з короткосяжною взаємодією (3), що визначають звичайною НТ Вільсона–Фішера. Надалі позначатимемо його як SR;
- для  $\sigma < \sigma^*$  критичні властивості систем з далекосяжною взаємодією описують теорією з  $a = 0$ . У цьому випадку спостерігаємо
  - (ii) для  $\sigma < d/2$  стійкою є далекосяжка гаусова НТ  $\mathcal{G}^{\text{LR}}$  ( $u^* = 0$ ) і універсальну поведінку опишемо середньо-польовими критичними показниками (крім критичних показників кореляційної довжини та парної кореляційної функції, які дорівнюють  $\nu = 1/\sigma$  і  $\eta = 2 - \sigma$  відповідно). Верхня

критична вимірність у цьому разі  $d_{\text{uc}} = 2\sigma$ , за  $\sigma = 2$  вона збігається з традиційною  $d_{\text{uc}} = 4$ ;

(iii) для  $d/2 < \sigma < \sigma^*$  стійкою є далекосяжна НТ Вільсона–Фішера  $\mathcal{P}^{\text{LR}}$  ( $u^* \neq 0$ ) і критичні показники залежать від  $\sigma$ . У цій ділянці параметрів критичні показники  $n$ -векторної спінової моделі не відповідають ні моделі з короткосяжною взаємодією, ні середньо-польовій моделі [8, 9, 20, 21] — спостерігаємо новий нетривіальний LR клас універсальності.

Значення параметра  $\sigma^*$ , яке визначає межу між LR-та SR-класами універсальності, визначається критичним показником парної кореляційної функції системи з короткосяжною взаємодією:  $\sigma^* = 2 - \eta_{\text{SR}}$  [8, 21, 37, 38]. Розрахунок критичних показників в цьому разі як ряд за відхиленнями від нової верхньої критичної вимірності  $\epsilon' = 2\sigma - d$ . Зокрема, критичний показник  $\nu$  відомий у третьому порядку теорії збурень [39] (ми подаємо тільки два перші нетривіальні члени розкладу):

$$\nu_{\text{LR}} = \frac{1}{\sigma} + \frac{(n+2)\epsilon'}{(n+8)\sigma^2} + \frac{(n+2)[(n+2)(n+8) + (7n+20)\sigma\mathcal{D}_\sigma]\epsilon'^2}{(n+8)^3\sigma^3} + \dots \quad (10)$$

Тут  $\mathcal{D}_\sigma = \psi(\sigma) - 2\psi(\sigma/2) + \psi(1)$  і  $\psi(x) = \Gamma(x)/\Gamma'(x)$  — дигамма-функція.

Порівнюючи вирази (7) та (10), бачимо, як засяг взаємодії, поряд із вимірністю простору та параметром порядку, може чинити вплив на універсальні

характеристики фазового переходу. Ще одним чинником, що може змінювати клас універсальності, є структурний безлад. З його впливом ознайомимося в наступному підрозділі.

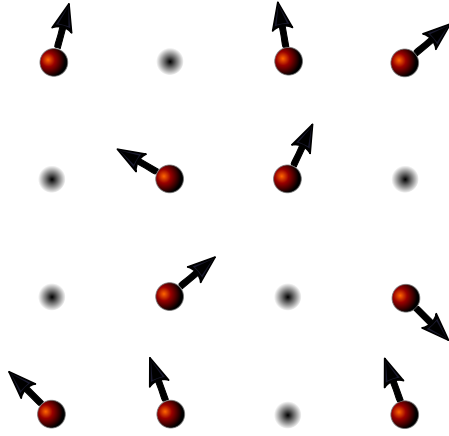


Рис. 2. Структурно-непорядкована двовимірна ( $d = 2$ ) гратка (розведення). Червоні диски зображають вузли  $\mathbf{x}$  гратки з  $n$ -компонентними спінами  $\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = (S_{\mathbf{x}}^1, \dots, S_{\mathbf{x}}^n)$  (чорні стрілки), а сірі — вузли, які містять немагнітні домішки

Fig. 2. Structurally disordered two-dimensional ( $d = 2$ ) lattice (dilution). The red discs depict the lattice sites  $\mathbf{x}$  with  $n$ -component spins  $\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = (S_{\mathbf{x}}^1, \dots, S_{\mathbf{x}}^n)$  (black arrows), and gray ones are sites that contain nonmagnetic impurities

## В. Структурний безлад

Структурний безлад часто моделюється введенням випадкових змінних у гамільтоніани взаємодії. Залежно від задачі, змінні, які описують домішки або дефекти структури, вважаються такими, що перебувають у рівновазі зі системою (відпалений — annealed — безлад), або зафіксованими в певній конфігурації, коли їхні часи релаксації перевищують час спостережень (заморожений — quenched — безлад) [40]. У цій статті розглянуто зміни критичної поведінки, викликані замороженим безладом. Сильний безлад може істотно змінити критичну поведінку магнетика, привівши, наприклад до відсутності феромагнітного впорядкування за скінчених температур. Слабкий безлад менш кардинальний, зокрема, він може й не руйну-

вати низькотемпературного феромагнітного основного стану [23]. Тому розглянемо слабкий заморожений безлад як розведення моделі (1) точковими нескорельованими замороженими немагнітними домішками (див. рис. 2). Вплив такого безладу на фазовий перехід у магнето-впорядкований стан визначаємо критерієм Гарріса [41]: якщо критичний показник теплоємності “чистої” (без домішок) системи є додатним  $\alpha_P > 0$ , тобто теплоємність ( $C \sim |T - T_c|^{-\alpha_P}$ ) розбігається в критичній точці, то структурний безлад змінює критичний показник і приводить до нового класу універсальності магнітного фазового переходу. Відповідно, безлад є несуттєвим, тобто не змінює класу універсальності магнітного фазового переходу, якщо  $\alpha_P < 0$ .

Спіновий гамільтоніан (1) у цьому разі запишемо як:

$$\mathcal{H} = - \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} J(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) c_{\mathbf{x}} c_{\mathbf{x}'} \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \mathbf{S}_{\mathbf{x}'}, \quad (11)$$

де  $J(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$  задається як (2), а числа заповнення  $c_{\mathbf{x}} = 1$ , якщо вузол  $\mathbf{x}$  є зайнятим спіном та  $c_{\mathbf{x}} = 0$ , якщо вузол  $\mathbf{x}$  зайнятий немагнітною домішкою. Вважається, що концентрація домішок набагато менша від концентрації магнітного складника.

Теоретико-польове представлення для замороженого безладу має свою особливість. Зокрема, у системі наявні випадкові конфігурації заморожених “дефектів” гратки і щоб отримати вільну енергію  $F$  для замороженої системи, потрібно усереднювати логарифм конфігураційно залежної статистичної суми  $Z_{\text{conf}}$  за всіма можливими випадковими конфігураціями, що є нетривіальною задачею. Обійти усереднення логарифма можна, використовуючи метод реплік [42]:

$$\bar{F} = \overline{\ln Z_{\text{conf}}} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\overline{Z_{\text{conf}}^m - 1}}{m}. \quad (12)$$

За таких умов задача зводиться до обчислення середнього від  $m$ -копій або реплік системи. Властивості оригінальної системи відтворюються в границі  $m \rightarrow 0$ . У теоретико-польовому описі це приводить до модифікації симетрії параметра порядку й ефективний гамільтоніан містить дві константи зв'язку з різними симетріями:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m [\tau |\phi^\alpha|^2 + |\nabla \phi^\alpha|^2] + \frac{u_0}{4!} \sum_{\alpha=1}^m |\phi^\alpha|^4 + \frac{v_0}{4!} \left( \sum_{\alpha=1}^m (\phi^\alpha)^2 \right)^2 \right\}, \quad (13)$$

де  $\phi^\alpha(\mathbf{x}) = \{\phi_1^\alpha(\mathbf{x}), \dots, \phi_n^\alpha(\mathbf{x})\}$  — це  $m$  разів реплікований  $n$ -компонентний параметр порядку; підсумовування за грецькими індексами відповідає різним реплікам; коефіцієнти при доданках  $\phi^4$  різної симетрії  $u_0 > 0$  та  $v_0 < 0$  — це неперенормовані константи

зв'язку. Ефективний гамільтоніан (13) для довільних  $m$  та  $n$  відповідає так званій  $mn$ -векторній моделі. Вона, зокрема, якщо  $n = 2$ ,  $m = 2, 3$  описує антиферомагнітні фазові переходи в певних магнітних матеріалах (див. наприклад, праці [24] та поклики в них).

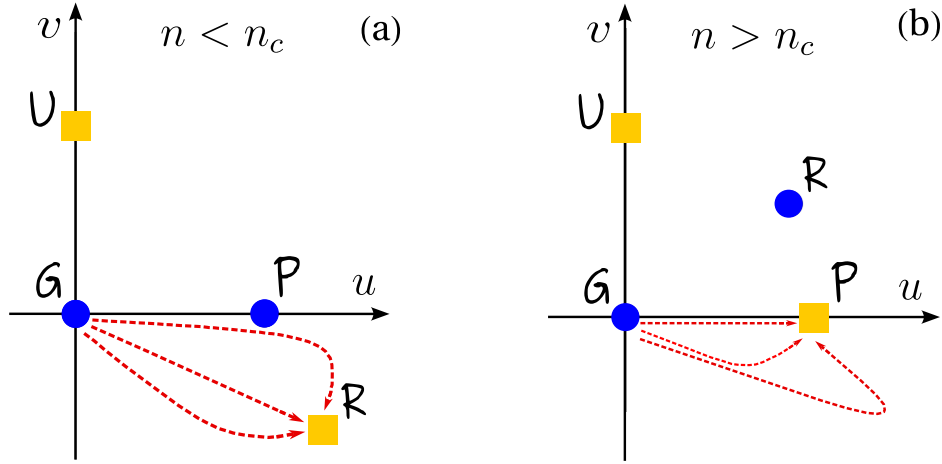


Рис. 3. Чотири НТ, що відповідають з точністю до числових значень їхніх координат моделям (13) і (18) для  $d = 3$ : (i) гаусова  $\mathcal{G}$ ; (ii) нефізична  $\mathcal{U}$ ; (iii) чиста  $\mathcal{P}$ ; (iv) зумовлена безладом (випадкова — random)  $\mathcal{R}$ . Жовтими квадратами позначено стійкі НТ, синіми кружками — нестійкі, червоні пунктирні лінії зображають РГ-потоки. Як видно з рисунка, стійкість  $\mathcal{P}$  та  $\mathcal{R}$  змінюється під час переходу через граничну вимірність  $n_c$ : (a) за  $n < n_c$   $\mathcal{R}$  є стійкою, а  $\mathcal{P}$  — нестійка; (b) за  $n > n_c$   $\mathcal{P}$  є стійкою, а  $\mathcal{R}$  — нестійка. Нефізична НТ  $\mathcal{U}$  стійка завжди за  $\epsilon > 0$ , однак недосяжна з початкових умов  $u > 0$  та  $v < 0$

Fig. 3. Four FPs (fixed points) that correspond to models (13) and (18) for the case  $d = 3$ : (i) Gaussian FP  $\mathcal{G}$ ; (ii) un-physical FP  $\mathcal{U}$ ; (iii) pure FP  $\mathcal{P}$ ; (iv) disorder-induced (random) FP  $\mathcal{R}$ . Stable FPs are marked by yellow squares, unstable ones by blue circles, and RG flows by red dashed lines. As evident from the figure, the stability of  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{R}$  changes when passing through the marginal dimension  $n_c$ : (a) for  $n < n_c$   $\mathcal{R}$  is stable, and  $\mathcal{P}$  is unstable; (b) for  $n > n_c$   $\mathcal{P}$  is stable and  $\mathcal{R}$  is unstable. The unphysical FP  $\mathcal{U}$  is always stable at  $\epsilon > 0$  but is unattainable from the initial conditions  $u > 0$  and  $v < 0$

Ефективний гамільтоніан (13) описує вплив домішок на критичну поведінку магнетика. Він відрізняється від ефективного гамільтоніана “чистої” моделі (3) тим, що має дві константи зв'язку. Тому рівняння РГ-потоку (4) тепер переписемо як систему двох диференціальних рівнянь, що, відповідно, містять дві  $\beta$ -функції і НТ знаходимо як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \beta_u(u^*, v^*) &= 0, \\ \beta_v(u^*, v^*) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Умову стійкості нерухомих точок (14) узагальнюємо за допомогою матриці стійкості:

$$B_{ij} = \frac{\partial \beta_{u_i}}{\partial u_j}. \quad (15)$$

НТ буде стійкою, якщо всі власні значення  $\lambda_i$  матриці стійкості (15), які пораховані в цій точці, мають додатні дійсні частини.

Структура  $\beta$ -функцій для структурно-непорядкованого магнетика свідчить про те, що в параметричному просторі  $(u, v)$  є чотири НТ  $(u^*, v^*)$  [43], див. рис. 3. Фізичними є ті НТ, які відповідають початковим умовам ефективного гамільтоніана (13)  $u > 0$  та  $v < 0$ . Для тривимірної системи в реплічній границі ( $d = 3, m = 0$ ) це:

- (i) гаусова  $\mathcal{G}$  ( $u^* = 0, v^* = 0$ ) — завжди нестійка якщо  $d < 4$ ;

- (ii) нефізична  $\mathcal{U}$  ( $u^* = 0, v^* \neq 0$ ) — стійка, але недосяжна з фізичних початкових умов  $u > 0$  та  $v < 0$ , заданих (13);
- (iii) чиста (система без домішок — pure)  $\mathcal{P}$  ( $u^* \neq 0$  та  $v^* = 0$ ) — стійкість залежить від значення кількості компонент параметра порядку  $n$  (стійка для  $n > n_c^{SR}(d)$ );
- (iv) випадкова (зумовлена безладом — random)  $\mathcal{R}$  ( $u^* \neq 0$  та  $v^* \neq 0$ ) — стійкість залежить від значення кількості компонент параметра порядку  $n$  (стійка для  $n < n_c^{SR}(d)$ ).

Одразу бачимо цікаву особливість, спричинену наявністю слабого структурного безладу: стійкість двох НТ (чистої  $\mathcal{P}$  та випадкової  $\mathcal{R}$ ), які визначають критичну поведінку моделі за  $\epsilon > 0$ , залежить від кількості компонент  $n$  параметра порядку. Вираз для критичного показника, обчисленого в точці  $\mathcal{P}$  у формі  $\epsilon$ -розкладу, збігається з (7), тоді як для точки  $\mathcal{R}$  результат буде таким:

$$\begin{aligned} \nu_R &= \frac{1}{2} + \frac{3n\epsilon}{32(n-1)} + \frac{n(127n^2 - 572n - 32)\epsilon^2}{(16(n-1))^3} + \dots, \\ n &\neq 1. \end{aligned} \quad (16)$$

У вступі згадувалось про вимірності параметра порядку, за яких система може змінювати клас універсальності — так звані граничні чи маргінальні (marginal) вимірності. Для розведеного магнетика з короткосяжною взаємодією гранична вимірність  $n_c$  зале-

жить лише від вимірності простору  $n_c \equiv n_c^{\text{SR}}(d)$  і контролює два різні критичні режими. За  $n > n_c$  критичні показники моделі (13) будуть такі самі, як для “чистої” моделі (3), інакше кажучи, критичні показники “чистої” моделі не змінюються з упрощенням структурного безладу. В наступному розділі, див. рис. 4, цей клас універсальності позначатимемо як SR. Інший режим спостерігаємо, коли  $n < n_c^{\text{SR}}$ : безлад впливає на критичну поведінку, й критичні показники набувають нових значень (клас універсальності, зумовлений структурним безладом і позначений на рис. 4 як RSR — random short-range). Значення  $n_c^{\text{SR}}(d=3) = 1.912$ , тобто менше ніж 2, що означає, що за цілих  $n$  новий клас універсальності для тривимірного випадку спостерігаємо тільки в моделі Ізінга ( $d=3, n=1$ ): див. панель (а) на рис. 4.

Ситуація, коли за певних значень вимірності параметра порядку  $n$  структурний безлад не впливає на критичну поведінку і коли він є суттєвим за іншого значення  $n$ , відповідає згаданому вище критерію Гарріса. Отже, критерій Гарріса дозволяє прогнозувати зміни в класі універсальності “чистої” системи з додаванням структурного безладу без явного розрахунку РГ-функцій для розведеної моделі. І справді, структурний безлад змінює клас універсальності лише тоді, коли теплоємність “чистої” системи розбігається ( $\alpha_p > 0$ ). Тоді можна використати умову  $\alpha_p = 0$  та співвідношення гіперскейлінгу  $\alpha_p = 2 - d\nu_p$  (де  $\nu_p$  — показник кореляційної довжини “чистої” моделі) як рівняння для визначення параметрів ( $d, n$ ), що розрізнятимуть різні класи універсальності.

У тривимірному ( $d=3$ ) просторі клас універсальності, викликаний безладом, реалізується тільки для одновісних магнетків (модель Ізінга  $n=1$ ), але в цьому разі ми не можемо скористатися виразом (16) для числової оцінки. Наявність степенів  $(n-1)^{-1}$  є наслідком виродження системи рівнянь на нерухому точку в першому порядку теорії збурень. Для аналізу випадку  $n=1$  був розроблений метод  $\sqrt{\epsilon}$ -розкладу [44]. У межах цього розкладу перші доданки ряду для критичного показника кореляційної довжи-

ни структурно-непорядкованої моделі Ізінга мають вигляд

$$\nu_R = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{318}}{212} \sqrt{\epsilon} + \dots, \quad n=1. \quad (17)$$

Збіжність  $\sqrt{\epsilon}$ -розкладу ще гірша, ніж у  $\epsilon$ -розкладу [45]. Тому на практиці для цього випадку використовуватимуть підхід перенормування за фіксованої вимірності простору [46]. Відповідно, методи пересумовування застосовують безпосередньо до  $\beta$ -функцій за фіксованого  $d$ , ров’язують рівняння на нерухому точку чисельно, а знайдений розв’язок підставляють у (пересумовані)  $\gamma$ -функції для знаходження критичних показників [34, 43].

У цьому розділі ми коротко зупинилися на змінах у критичній поведінці магнетика, які можуть викликатися слабкою далекосяжною взаємодією (підрозділ ПБ) чи слабким структурним безладом (підрозділ ПВ). Природно виникає запитання: яких змін можна чекати, коли ці два чинники наявні одночасно? Пошуку відповіді на це запитання присвячений наступний розділ.

### III. СПІЛЬНИЙ ВПЛИВ СТРУКТУРНОЇ НЕВПОРЯДКОВАНОСТІ ТА ДАЛЕКОСЯЖНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Спіновий гамільтоніан для розведеного магнетика з далекосяжною взаємодією має вигляд (11), однак тепер характер взаємодії задається формулою (8). Одразу обумовимось, що, подібно як у підрозділі ПБ, ми розглядатимемо слабку далекосяжну взаємодію, коли значення параметра згасання взаємодії є в ділянці  $d/2 < \sigma < 2 - \eta_{\text{SR}}$ , де  $\eta_{\text{SR}}$  — показник парної кореляційної функції моделі з короткосяжною взаємодією (див. підрозділ ПБ). Як і в попередніх підрозділах, після усереднення за конфігураціями за допомогою методу реплік можна отримати ефективний гамільтоніан структурно-непорядкованого магнетика (11) із взаємодією (8) [47]:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} [\tau |\phi^\alpha|^2 + |\nabla^{\sigma/2} \phi^\alpha|^2] + \frac{u_0}{4!} \sum_{\alpha=1}^m |\phi^\alpha|^4 + \frac{v_0}{4!} \left( \sum_{\alpha=1}^m (\phi^\alpha)^2 \right)^2 \right\}. \quad (18)$$

Тут усі позначення такі самі, як у (9) та (13). Оскільки нас цікавитиме тільки  $\sigma < 2 - \eta_{\text{SR}}$ , ми не враховуємо члена  $|\nabla \phi^\alpha|^2$ , що відповідає  $a=0$  у (9).

Симетрія доданків типу  $\phi^4$  (тензорна структура) у гамільтоніані (18) є такою самою, як і в короткосяжній моделі (13), яка, як ми зазначали, відповідає  $mn$ -векторній моделі. Тому, використовуючи симетрійні множники останньої моделі для діаграм Фейнмана, розрахованих у трипетловому наближенні [49], та петлеві інтеграли для цих діаграм у далекосяжній

теорії [39], ми фактично отримали трипетлеві ренормгрупові функції для  $mn$ -векторної моделі з далекосяжною взаємодією, тобто для теорії (18) для довільних значень  $n$  та  $m$  [51]. Зокрема, тепер, подібно до описаного в підрозділі ПВ випадку з двома константами зв’язку, ми матимемо систему двох диференціальних рівнянь, що містять функції  $\beta_u$  і  $\beta_v$ . З наших ренормгрупових функцій можна відтворити вже відомі результати для чистої та кубічної моделей з далекосяжною взаємодією. Так, за  $v=0$  і  $n=N$  ми від-

творюємо трипетлеві функції [39], що описують чисту модель з далекосяжною взаємодією, а за  $n = 1$ ,  $m = N$  – відповідні функції [39] для кубічної моделі з далекосяжною взаємодією.

У параметричному просторі констант зв'язку  $(u, v)$  структура нерухомих точок для ефективного гамільтоніана (18) за  $m = 0$  є подібною до нерухомих точок ефективного гамільтоніана (13). Зокрема, є чотири НТ  $(u^*, v^*)$ , які залежать від значень  $\epsilon' = 2\sigma - d$  та кількості компонент  $n$  параметра порядку [47, 48], див. також рис. 3:

- (i) далекосяжна гаусова  $\mathcal{G}^{\text{LR}}$  ( $u^* = 0, v^* = 0$ ) – завжди нестійка за  $\epsilon' > 0$ , тобто для  $d < 2\sigma$ ;
- (ii) далекосяжна нефізична  $\mathcal{U}^{\text{LR}}$  ( $u^* = 0, v^* \neq 0$ ) – стійка за  $\epsilon' > 0$ , однак недосяжна за відповідних початкових умов;
- (iii) далекосяжна “чиста”  $\mathcal{P}^{\text{LR}}$  ( $u^* \neq 0, v^* = 0$ ) – стійка за  $\epsilon' > 0$  та  $n > n_c^{\text{LR}}(\sigma, d)$ ;
- (iv) далекосяжна випадкова  $\mathcal{R}^{\text{LR}}$  ( $u^* \neq 0, v^* \neq 0$ ) – стійка за  $\epsilon' > 0$  та  $n < n_c^{\text{LR}}(\sigma, d)$ .

Подібно, як і для розведеного магнетика з короткосяжною взаємодією (підрозділ ПВ), стійкість чистої та випадкової НТ  $\mathcal{P}^{\text{LR}}$  і  $\mathcal{R}^{\text{LR}}$  залежить від значення вимірності параметра порядку  $n$ : гранична вимірність  $n_c^{\text{LR}}(\sigma, d)$  розділяє два критичні режими. За  $n > n_c^{\text{LR}}(\sigma, d)$  стійкою є  $\mathcal{P}^{\text{LR}}$  і критичні показники моделі (18) будуть такі самі, як і для “чистої далекосяжної” моделі (9) у підрозділі ПБ. Тут структурний безлад не змінює критичної поведінки моделі (9) і відповідний клас універсальності позначений на рис. 4 як LR. Однак за  $n < n_c^{\text{LR}}(\sigma, d)$  стійкою є  $\mathcal{R}^{\text{LR}}$  – структурний безлад змінює критичні показники і вони відрізняються від значень “чистої далекосяжної” моделі (9). Інакше кажучи, ми маємо новий “далекосяжний” клас універсальності, зумовлений структурним безладом. На рис. 4 цей клас універсальності позначений як RLR – random long-range.

Для розглянутого в підрозділі ПВ тривимірного розведеного магнетика з короткосяжною взаємодією

новий клас універсальності реалізується тільки в моделі Ізінга ( $n = 1$ ). На рис. 4,а цей клас універсальності позначений як RSR. Для розведеного магнетика з далекосяжною взаємодією ситуація цікавіша. Якщо знову ж таки скористатися критерієм Гарріса, використовуючи умову  $\alpha_p(d, n, \sigma) = 0$ , то можна знайти граничне значення параметра порядку  $n_c = n_c^{\text{LR}}(d, \sigma)$ , що відділяє різні класи універсальності. Так, використовуючи трипетлеві результати для критичних показників чистої  $n$ -векторної моделі з далекосяжною взаємодією [39], ми отримали вираз для граничної вимірності параметра порядку  $n_c^{\text{LR}}(d, \sigma)$  як ряду за  $\epsilon'$  [50]. Оцінки для тривимірних і двовимірних систем одержали за допомогою пересумовування з використанням апроксимант Паде та методом Паде–Бореля (для деталей див. опис в [50]). Результати для  $d = 3$  зображено на рис. 4(а) синьою пунктирною лінією (Паде-апроксиманти) та чорною суцільною лінією (метод Паде–Бореля). Синіми точками на графіку показані інтерпольовані дані ще одного варіанта теоретико-польового підходу, а саме непертурбативної РГ (NPRG) [8]. Вище від кривої ( $n > n_c^{\text{LR}}$ ) реалізується “далекосяжний” клас універсальності LR і критичні показники розведеної моделі з далекосяжною взаємодією збігаються з “чистою далекосяжною” моделлю – структурний безлад не впливає на критичну поведінку. Однак нижче від кривої  $n_c(d = 3, \sigma)$  ( $n < n_c^{\text{LR}}$ ) безлад змінює критичні показники “чистої далекосяжної” моделі й реалізується новий клас універсальності, зумовлений структурним безладом, RLR. Для розведеної моделі з короткосяжною взаємодією за цілих значень  $n$  тільки модель Ізінга ( $n = 1$ ) належить до класу універсальності, зумовленого безладом: на рис. 4 класи універсальності RSR та SR розділені граничною вимірністю  $n_c^{\text{SR}} = 1.912$ . На відміну від цього, у розведеній моделі з далекосяжною взаємодією до нового “далекосяжного” класу універсальності для різних значень контрольного параметра взаємодії  $\sigma$  можуть належати модель Ізінга ( $n = 1$ ), XY-модель ( $n = 2$ ) та модель Гайзенберга ( $n = 3$ ).

Обчисливши значення РГ  $\gamma$ -функцій у стійкій нерухомій точці  $\mathcal{R}^{\text{LR}}$ , ми отримали вираз для критичного показника  $\nu$  структурно-непорядкованого магнетика з далекосяжною взаємодією як ряд за  $\epsilon'$  до порядку  $\epsilon'^3$  включно. Тут наводимо результат для  $n = 3$ :

$$\nu_{\text{RLR}} = \frac{1}{\sigma} + \frac{9\epsilon'}{16\sigma^2} + \frac{3(515\mathcal{D}_\sigma\sigma + 432)\epsilon'^2}{4096\sigma^3} + \mathcal{E}_\sigma\epsilon'^3 + \dots, \quad n = 3, \quad (19)$$

де

$$\mathcal{E}_\sigma = \frac{3}{524288\sigma^3} \left( (169991\mathcal{D}_\sigma^2\sigma + 74160\mathcal{D}_\sigma + 206\pi^2\sigma) - 1236\sigma\psi^{(1)}(\sigma) \right) + \frac{3526\sigma\Gamma(-\frac{\sigma}{2})\Gamma(\frac{\sigma}{2}+1)^3(\pi^2 - 6\psi^{(1)}(\frac{\sigma}{2}))}{\Gamma(\sigma)} + \frac{72960\Gamma(-\frac{\sigma}{2})\Gamma(\sigma+1)^2}{\Gamma(\frac{3\sigma}{2})\sigma} + \frac{31104}{\sigma}, \quad (20)$$

а  $\Gamma(x)$  і  $\psi^{(1)}(x)$  гамма-функція і перша похідна дигамма-функції відповідно.



Зазначимо, що за  $n = 1$  в реплічній границі  $m = 0$  спостерігаємо таку саму ситуацію, як у розведеній моделі з короткосяжною взаємодією: система рівнянь на нерухому точку вироджена в першому порядку теорії збурень. Тут ми скористалися  $\sqrt{\epsilon'}$ -розкладом й отримали такий вираз:

$$\nu_{\text{RLR}} = \frac{1}{\sigma} - \frac{\sqrt{\epsilon'}}{3\sigma^2\sqrt{\mathcal{D}_\sigma}} + \frac{(2 + \mathcal{D}_\sigma(5 - 12\mathcal{G}_\sigma)\sigma)\epsilon'}{18\mathcal{D}_\sigma\sigma^3} + \dots, \quad n = 1, \quad (21)$$

де

$$\mathcal{G}_\sigma = \frac{1}{432\mathcal{D}_\sigma^2} \left( 25\pi^2 - 918\mathcal{D}_\sigma^2 + 336\psi^{(1)}\left(\frac{\sigma}{2}\right) - 486\psi^{(1)}(\sigma) + 336J_0 - \frac{\Gamma(-\frac{\sigma}{2})}{\Gamma(\sigma)} \left( \frac{752\Gamma(\sigma)^3}{\Gamma(\frac{3\sigma}{2})} + 17\Gamma\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)^3 \left( \pi^2 - 6\psi^{(1)}\left(\frac{\sigma}{2}\right) \right) \right) \right), \quad (22)$$

$\mathcal{D}_\sigma$  виражається через дигамма-функції, див. (10), а  $J_0$  [39]:

$$J_0 = \frac{1}{\Gamma(\frac{\sigma}{2})^2} \sum_{j \geq 1} \frac{\Gamma(j+\sigma)\Gamma(j+\frac{\sigma}{2})^2}{j(j!)\Gamma(2j+\sigma)} \left[ 2\psi(j+1) - \psi(j) - 2\psi\left(j + \frac{\sigma}{2}\right) - \psi(j+\sigma) + 2\psi(2j+\sigma) \right]. \quad (23)$$

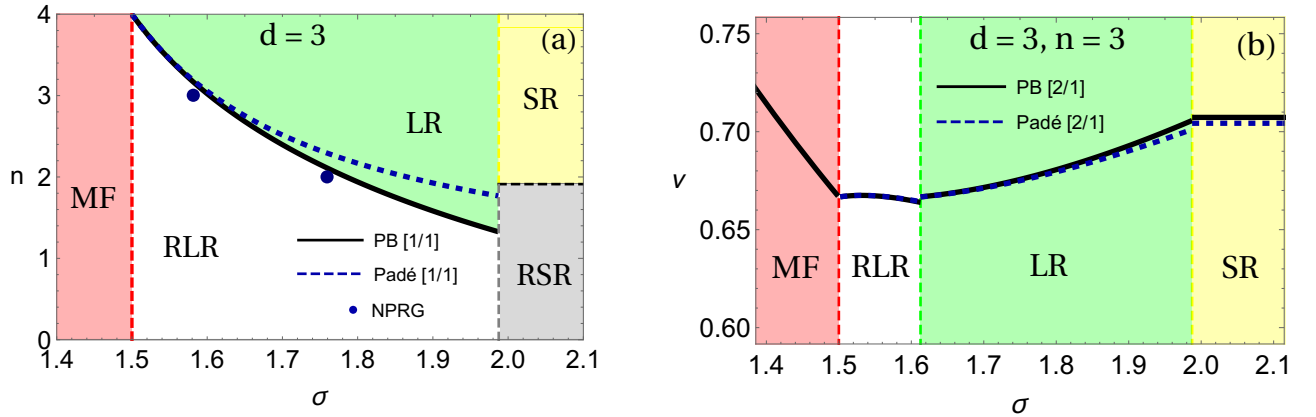


Рис. 4. (а) Класи універсальності структурно-непорядкованого магнетика з далекосяжною взаємодією в параметричному просторі  $\sigma - n$  для  $d = 3$ . Гранична вимірність параметра порядку  $n_c^{\text{LR}}(\sigma, 3)$  для  $d = 3$  відділяє клас універсальності “чистої” моделі з далекосяжною взаємодією (LR) від класу універсальності, зумовленого структурним безладом (RLR). Синя пунктирна лінія — пересумовання з використанням апроксимації Паде [1/1], чорна суцільна лінія — пересумовування методом Паде-Бореля. Середньопольову (MF) поведінку спостерігаємо для  $\sigma < d/2 = 1.5$ . Точками позначено результати методу непертурбативної РГ (NPRG) [8]. За  $\sigma > \sigma^* = 2 - \eta_{\text{SR}}$  реалізується поведінка моделі з короткосяжною взаємодією: за  $n > n_c^{\text{SR}}(3) = 1.912$  — клас універсальності “чистої” моделі (SR) та за  $n < n_c^{\text{SR}}(3)$  — клас універсальності, зумовлений структурним безладом (RSR) [23].

(b) Показник кореляційної довжини  $\nu$  для  $d = n = 3$  як функція  $\sigma$ . Зі зміною  $\sigma$  відбувається перехід (кросвер) між різними класами універсальності: MF ( $\sigma < d/2$ ), RLR ( $d/2 < \sigma < \hat{\sigma} = 1.6127$ ), LR ( $\hat{\sigma} < \sigma < \sigma^* = 2 - \eta_{\text{SR}}$ ), SR ( $\sigma > \sigma^*$ )

Fig. 4. (a) Universality classes of a structurally disordered magnet with long-range interaction in  $\sigma - n$  parametric space for  $d = 3$ . The marginal dimension of the order parameter  $n_c^{\text{LR}}(\sigma, 3)$  for  $d = 3$  separates the “pure” long-range universality class (LR) from the structural-disorder-induced long-range universality class (RLR). Blue dashed line: resummation using the Padé approximant [1/1], black solid line: the Padé-Borel resummation. Mean-field behavior is observed for  $\sigma < d/2 = 1.5$ . Points depict the results of the non-perturbative RG (NPRG) method [8]. At  $\sigma > \sigma^* = 2 - \eta_{\text{SR}}$  the behavior of the model with short-range interaction is realized: at  $n > n_c^{\text{SR}}(3) = 1.912$  — the “pure” short-range universality class (SR) and at  $n < n_c^{\text{SR}}(3)$  — the structural-disorder-induced short-range universality class (RSR) [23].

(b) Correlation length exponent  $\nu$  for  $d = n = 3$  as a function of  $\sigma$ . As  $\sigma$  changes, there is a transition (crossover) between different universality classes: MF ( $\sigma < d/2$ ), RLR ( $d/2 < \sigma < \hat{\sigma} = 1.6127$ ), LR ( $\hat{\sigma} < \sigma < \sigma^* = 2 - \eta_{\text{SR}}$ ), SR ( $\sigma > \sigma^*$ )

На рис. 4,б зображена залежність критичного показника кореляційної довжини тривимірного гайзенбергівського  $d = n = 3$  структурно-непорядкованого магнетика від параметра згасання взаємодії  $\sigma$ . Для отримання чисельних оцінок виразу (19) ми застосували дві техніки пересумовування: апроксимацію Паде [2/1] (синя пунктирна лінія на рис. 4) та метод Паде–Бореля з апроксимантою Паде [2/1] (чорна суцільна лінія). Простежимо за поведінкою показника кореляційної довжини  $\nu(\sigma, d)$  зі зміною контрольованого параметра згасання взаємодії  $\sigma$  при  $d = 3$ . Для  $\sigma < d/2$  спостерігаємо середньо-польову поведінку з показником  $\nu = 1/\sigma$  (ділянка MF на рисунку). Для  $\sigma > d/2$  реалізується “далекосяжний” клас універсальності, який зумовлений наявністю структурного безладу (RLR). Переходячи через граничну вимірність  $\bar{d} \approx 1.61$ , критичний показник кореляційної довжини  $\nu(\sigma, d)$  для розведеної моделі з далекосяжною взаємодією збігається з критичним показником для “чистої” моделі з далекосяжною взаємодією (LR) [39]. Далі зі збільшенням значення  $\sigma$  за  $\sigma^* = 2 - \eta_{SR}$  реалізується “короткосяжний” клас універсальності з критичними показниками, як у моделі з короткосяжною взаємодією (3) з підрозділу ІА.

#### IV. ВИСНОВКИ

Великі класи різних, на перший погляд, за своєю мікроскопічною природою систем, можуть мати однакові термодинамічні та структурні характеристики в околі критичної точки, що описуються універсальними степеневими законами. Такі системи об’єднують у т. зв. класи універсальності. Їх формування визначається такими глобальними характеристиками, як тип взаємодії, вимірність простору, симетрія та кількість компонент параметра порядку. Тому цікаво з’ясувати, як взаємний вплив цих характеристик може позначитися на критичних особливостях системи. Зокрема, у цій праці ми дослідили, як може змінюватися критична поведінка багаточастинкової системи, коли конкурують два чинники, а саме: далекосяжна взаємодія та структурний безлад. Для цього ми розглянули систему взаємодіючих  $n$ -компонентних кла-

сичних спінів та як метод дослідження використали підхід теоретико-польової ренормалізаційної групи. У висліді ми простежили, як на критичну поведінку  $n$ -векторної моделі впливає така взаємна гра глобальних характеристик. Зокрема, далекосяжна взаємодія зумовлює “далекосяжний” клас універсальності з критичними показниками, відмінними від моделі з короткосяжною взаємодією, тоді як структурний безлад спричиняє появу нового “випадкового” класу універсальності. Таку зміну ми простежили, змінюючи кількість компонент параметра порядку  $n$  та параметр згасання взаємодії  $\sigma$ . У нашій статті продемонстровано, що є така ділянка параметрів  $n, \sigma$ , коли далекосяжна взаємодія та структурний безлад приводять до синергетичного ефекту й появи нового, “випадкового далекосяжного” (random long-range, RLR на рис. 4) класу універсальності. Зображена на рис. 4(а) фазова діаграма свідчить про різноманітність типів критичної поведінки структурно-непорядкованого магнетика з далекосяжною взаємодією: залежно від кількості компонент параметра порядку та параметра згасання взаємодії, тривимірний магнетик може належати до п’яти (!) різних класів універсальності.

Для кількісного опису критичної поведінки в новому класі універсальності ми отримали вирази для граничної вимірності [50] та критичного показника кореляційної довжини. Формули (19), (21) одержані в найвищому на сьогодні, третьому порядку теорії збурень для такої задачі. Для їх чисельної оцінки ми застосували різні способи аналізу асимптотичних рядів. Один з отриманих результатів для моделі Гайзенберга наведений на рис. 4(б). Детальний виклад аналітичних розрахунків та чисельного аналізу буде предметом окремої публікації [51].

Ми вдячні колегам з лабораторії статистичної фізики складних систем ІФКС НАН України за дружні обговорення поданих тут результатів. Цю роботу виконано за підтримки проекту КПКВК 6541030 НАН України “Емерджентність у м’якій речовині” (МД, ДШ, ЮГ), грантів від U.S. Department of Energy (DOE), Office of Science, Basic Energy Sciences, Materials Science and Engineering Division, under Award No. DE-SC0013599 (Subaward No. UTAUS-SUB00000795) (МД, ДШ) та UMR CNRS 7600 (ЮГ).

[1] C. Domb, *The Critical Point* (Taylor & Francis, London, 1996); <https://doi.org/10.1201/9781482295269>.  
 [2] *Order, Disorder and Criticality. Advanced Problems of Phase Transition Theory. Vol. 1-7*, edited by Yu. Holovatch (World Scientific, Singapore, 2004-2022); <https://doi.org/10.1142/12968>.  
 [3] Yu. Holovatch et al. *J. Phys. Stud.* **22**, 2801 (2018); <https://doi.org/10.30970/jps.22.2801>.  
 [4] M. Henkel, H. Hinrichsen, S. Lübeck, *Non-Equilibrium Phase Transitions* (Heidelberg, Springer, 2008); <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8765-3>;

G. Odor, *Universality in Nonequilibrium Lattice Systems: Theoretical Foundations* (Singapore, World Scientific, 2008); <https://doi.org/10.1142/6813>.  
 [5] R. Folk, G. Moser, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, R207 (2006); <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/24/R01>; I. Herbut, *A Modern Approach to Critical Phenomena* (Cambridge University Press, 2007); <https://doi.org/10.1017/CB09780511755521>; M. A. Anisimov, A. A. Povodyrev, V. D. Kulikov,

- J. V. Sengers, Phys. Rev. Lett. **75**, 3146 (1995); <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.3146>;
- M. Anisimov, A. Povodyrev, J. Sengers, Fluid Phase Equilib. **158-160**, 537(1999); [https://doi.org/10.1016/S0378-3812\(99\)00140-5](https://doi.org/10.1016/S0378-3812(99)00140-5).
- [6] V. S. Dotsenko, Phys. Usp. **38**, 457 (1995); <https://doi.org/10.1070/PU1995v038n05ABEH000084>.
- [7] Yu. Holovatch *et al.*, Int. J. Mod. Phys. B **16**, 4027 (2002); <https://doi.org/10.1142/S0217979202014760>.
- [8] N. Defenu, A. Trombettoni, A. Codello, Phys. Rev. E **92**, 052113 (2015); <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.052113>.
- [9] N. Defenu, A. Codello, S. Ruffo, A. Trombettoni, J. Phys. A **53** 143001 (2020); <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab6a6c>.
- [10] D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1989); <https://doi.org/10.1142/5715>; J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford University Press, Oxford, 1996); <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198509233.001.0001>; H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of  $\phi^4$ -Theories* (World Scientific, Singapore, 2001); <https://doi.org/10.1142/4733>.
- [11] *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions*, edited by T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, M. Wilkens, Lect. Not. Phys. **602**, (Springer-Verlag, New York, 2002); <https://doi.org/10.1007/3-540-45835-2>; A. Campa, T. Dauxois, S. Ruo, Phys. Rep. **480**, 57 (2009); <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.07.001>.
- [12] A. Cavagna *et al.*, Phys. Rev. E **92** 012705, (2015); <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.012705>.
- [13] T. Padmanabhan, Phys. Rep. **188**, 285 (1990); [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(90\)90051-3](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90051-3).
- [14] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon Press, London, 1960).
- [15] D. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory* (Wiley, New-York, 1983); <https://doi.org/10.1017/S0263034600000677>.
- [16] A. Campa, T. Dauxois, D. Fanelli, S. Ruffo, *Physics of Long-Range Interacting Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2014); <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199581931.001.0001>.
- [17] D. Mukamel, preprint arXiv: 0905.1457 (2009); <https://doi.org/10.48550/arXiv.0905.1457>.
- [18] E. Bayong, H. T. Diep, V. Dotsenko, Phys. Rev. Lett. **83**, 14 (1999); <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.14>.
- [19] N. Defenu *et al.*, Rev. Mod. Phys. **95**, 035002 (2023); <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.95.035002>.
- [20] M. E. Fisher, S. K. Ma, and B. G. Nickel, Phys. Rev. Lett. **29**, 917 (1972); <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.29.917>.
- [21] J. Sak, Phys. Rev. B **8**, 281 (1973); <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.8.281>.
- [22] F. Bouchet, S. Gupta, D. Mukamel, Physica A **389**, 4389 (2010); <https://doi.org/10.1016/j.physa.2010.02.024>.
- [23] A. Pelissetto, E. Vicari, Phys. Rept. **368**, 549 (2002); [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(02\)00219-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00219-3).
- [24] M. Dudka, Yu. Holovatch, T. Yavorskii, Acta Phys. Slovaca **52**, 323 (2002); <http://www.physics.sk/aps/pubs/2002/aps-2002-52-4-323.pdf>; M. Dudka, Yu. Holovatch, T. Yavorskii, J. Phys. A **37**, 10727 (2004); <https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/45/002>.
- [25] Yu. Holovatch, M. Dudka, T. Yavorskii, J. Phys. Stud. **5**, 233 (2001); <https://doi.org/10.30970/jps.05.233>; D. Ivaneyko, J. Ilnytskyi, B. Berche, Yu. Holovatch, Physica A **370**, 163 (2006); <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.03.010>; D. Shapoval, M. Dudka, A. A. Fedorenko, Yu. Holovatch, Phys. Rev. B **101**, 064402 (2020); <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.064402>.
- [26] T. Ising, R. Folk, R. Kenna, B. Berche, Yu. Holovatch, J. Phys. Stud. **21**, 3002 (2017); <https://doi.org/10.30970/jps.21.3002>.
- [27] H. E. Stanley, Phys. Rev. Lett., **20**, 589 (1968); <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.20.589>.
- [28] Yu. Holovatch, Condens. Matter Phys. **9**, 237 (2006); <https://doi.org/10.5488/CMP.9.2.237>.
- [29] K. G. Wilson, M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972); <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.240>.
- [30] B. Berche, T. Ellis, Yu. Holovatch, R. Kenna, SciPost Phys. Lect. Not. **60** (2022); <https://doi.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.60>.
- [31] M. V. Kompaniets, E. Panzer, Phys. Rev. D **96**, 036016 (2017); <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.036016>.
- [32] O. Schnetz, Phys. Rev. D **97**, 085018 (2018); <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.085018>; O. Schnetz, Phys. Rev. D **107**, 036002 (2023); <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.107.036002>.
- [33] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, Phys. Rev. B **21**, 3976 (1980); <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.21.3976>.
- [34] B. Delamotte, Yu. Holovatch, D. Ivaneyko, D. Mouhanna, M. Tissier, J. Stat. Mech. P03014 (2008); <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2008/03/P03014>; B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, D. Mouhanna, Phys. Rev. B **82**, 104432 (2010); <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.82.104432>; B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, D. Mouhanna, Condens. Matter Phys. **13**, 43703 (2010); <https://doi.org/10.5488/CMP.13.43703>.
- [35] G. S. Joyce, Phys. Rev. **146**, 349 (1966); <https://doi.org/10.1103/PhysRev.146.349>.
- [36] F. J. Dyson, Commun. Math. Phys. **12**, 91 (1969); <https://doi.org/10.1007/BF01645907>.
- [37] E. Luijten, H. W. J. Blöte, Phys. Rev. Lett. **89**, 025703 (2002); <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.025703>; E. Luijten, Ph.D. Thesis (Technische Universiteit Delft, Delft, The Netherlands, 1997); <http://resolver.tudelft.nl/uuid:8ec8fc17-4a7e-47e3-aec0-bceedcfa5904>.
- [38] C. Behan, J. Phys. A: Math. Theor. **52**, 075401 (2019); <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aafd1b>.
- [39] D. Benedetti, R. Gurau, S. Harribey, K. Suzuki, J. Phys. A **53**, 445008 (2020); <https://doi.org/10.1088/1751-8121/abb6ae>.
- [40] R. Brout, Phys. Rev. **115**, 824 (1959); <https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.824>.
- [41] A. B. Harris, J. Phys. C **7**, 1671 (1974); <https://doi.org/10.1088/0022-3719/7/9/009>.
- [42] V. J. Emery, Phys. Rev. B **11**, 239 (1975); <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.11.239>; M. Mézard, G. Parisi, M. A. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond. An Introduction to the Replica Method and Its Applications* (World Scientific, Singapore, 1987); <https://doi.org/10.1142/0271>; G. Parisi, arXiv:cond-

- mat/9701068 (1997); <https://doi.org/10.48550/arXiv.cond-mat/9701068>; V. Dotsenko, *Introduction to the Replica Theory of Disordered Statistical Systems* (Cambridge, Cambridge University Press, 2001); <https://doi.org/10.1017/CB09780511524592>
- [43] R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, *Phys.-Usp.* **46**, 169 (2003); <https://doi.org/10.1070/PU2003v046n02A BEH001077>.
- [44] D. E. Khmel'nitskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **68**, 1960 (1975) [*Sov. Phys. JETP* **41**, 981 (1975)]; T. C. Lubensky, *Phys. Rev. B* **11**, 3573 (1975); <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.11.3573>; G. Grinstein, A. Luther, *Phys. Rev. B* **13**, 1329 (1976); <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.13.1329>.
- [45] R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, *Phys. Rev. B* **61**, 15114 (2000); <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.61.15114>.
- [46] G. Parisi, unpublished; *J. Stat. Phys.* **23**, 49 (1980); <https://doi.org/10.1007/BF01014429>; R. Schloms, V. Dohm, *Europhys. Lett.* **3**, 413 (1987); <https://doi.org/10.1209/0295-5075/3/4/005>; R. Schloms, V. Dohm, *Nucl. Phys. B* **328**, 639 (1989); [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(89\)90223-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90223-X); Yu. Holovatch, M. Shpot, *J. Stat. Phys.* **66**, 867 (1992); <https://doi.org/10.1007/BF01055706>; Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, *J. Stat. Phys.* **92**, 785 (1998); <https://doi.org/10.1023/A:1023032307964>.
- [47] Y. Yamazaki, *Physica A* **90**, 547 (1978); [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(78\)90008-0](https://doi.org/10.1016/0378-4371(78)90008-0).
- [48] A. Theumann, *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** 2759 (1981); <https://doi.org/10.1088/0305-4470/14/10/027>.
- [49] Yu. Holovatch, unpublished.
- [50] D. Shapoval, M. Dudka, Yu. Holovatch, *Low Temp. Phys.* **48**, 1049 (2022); <https://doi.org/10.1063/10.0.015114>
- [51] D. Shapoval, M. Dudka, Yu. Holovatch, unpublished (2023).

## CRITICAL BEHAVIOR OF STRUCTURALLY DISORDERED SYSTEMS WITH LONG-RANGE INTERACTION

M. Dudka<sup>1,2,3</sup>, D. Shapoval<sup>1,2</sup>, Yu. Holovatch<sup>1,2,4,5</sup>

<sup>1</sup> *Institute for Condensed Matter Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, UA-79011 Ukraine,*

<sup>2</sup>  $\mathbb{L}^4$  *Collaboration & Doctoral College for the Statistical Physics of Complex Systems, Leipzig-Lorraine-Lviv-Coventry, Europe,*

<sup>3</sup> *Lviv Polytechnic National University, Lviv, UA-79013, Ukraine,*

<sup>4</sup> *Centre for Fluid and Complex Systems, Coventry University, Coventry CV15FB, UK,*

<sup>5</sup> *Complexity Science Hub Vienna, 1080 Vienna, Austria*

Some physical systems, although different by their microscopic nature, in the vicinity of critical points can have similar thermodynamic and structural properties governed by universal power laws. Such systems are grouped into the so-called universality classes. The latter are determined by such global characteristics as the type of interaction, space dimensionality, symmetry, and the number of components of the order parameter. Therefore, it is interesting to investigate how the mutual influence of these characteristics can affect the critical features of the system. The goal of our research is to analyze the changes in the critical behavior of a many-particle magnetic system under the influence of two competing factors: long-range interaction and weak structural disorder. Using the example of an  $n$ -vector model in a  $d$ -dimensional space, we will investigate ferromagnetic ordering in a structurally disordered magnet with the long-range interaction decaying with the distance  $x$  as  $J(x) \sim x^{-d-\sigma}$ , with the control parameter  $\sigma$ . The analysis is carried out using the field-theoretical renormalization group methods, which makes it possible to identify the universality classes of the system under consideration, their change with global parameters, and to determine the universal characteristics of critical behavior (critical exponents and marginal dimensions). It will be shown that there exists such a region of parameters  $(d, n, \sigma)$ , where the long-range interaction and structural disorder lead to a synergistic effect and the appearance of a new, "random long-range" universality class. We obtain the renormalization group functions in the three-loop approximation, and calculate the correlation length critical exponent  $\nu(\epsilon', n)$  as a perturbation theory series in  $\epsilon' = 2\sigma - d$ . Quantitative estimates are obtained using asymptotic series resummation methods.

**Key words:** critical properties, universality classes, quenched disorder, long-range interactions, renormalization group, resummation.