ISSN 1024-588X. Вісник Львівського університету. Серія фізична. 2019. Випуск 56. С. 56-64
Visnyk of the Lviv University. Series Physics. 2019. Issue 56. P. 56-64

УДК 530.145
PACS 03.65.-w, 03.67.-a
DOI: https://doi.org/10.30970/vph.56.2019.56

Заплутаність спінів у трикутному спіновому кластері

Ю. З. Гольський, Х. П. Гнатенко

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Кафедра теоретичної фізики
вул. Драгоманова, 12, 79005 Львів, Україна
e-mail: golskyi.yurii@gmail.com

Досліжено трикутний спіновий кластер. Ця модель описує спіни в молекулярному кластері диспрозію. На основі зв'язку заплутаності спіну з його середнім значенням, отриманим в роботі [A. M. Frydryszak, M. I. Samar, V. M. Tkachuk Eur. Phys. J. D 71, 233, 2017], обчислюється заплутаність спінів у трикутному спіновому кластері.

Ключові слова: заплутаність, трикутний спіновий кластер

1 Вступ

Квантова заплутаність є одним з найцікавіших квантовомеханічних явищ. Кількісне вимірювання заплутаності є важливою задачею в квантовій інформації. Серед багатьох застосувань, квантова заплутаність широко використовується в квантовій криптографії [1], квантовій телепортації [2], а також може застосовуватися для оптимізації класичних обчислень [3].

Геометрична міра заплутаності визначається як мінімальна відстань між заплутаним станом і найближчим чистим незаплутаним станом. Ця міра заплутаності була вперше введена у праці [4]. Властивості геометричної міри заплутаності для багаточастинкових систем досліджували Ві(Wei) і Ґолдбарт(Goldbart) [5], а також Броді(Brody) і Хаґстон(Hughston) [6]. Вивчення геометричної міри заплутаності привернуло багато уваги (див., наприклад, [7–13]).

Поряд із теоретичними дослідженнями міри заплутаності важливим є її експериментальне вимірювання. У праці [14] знайдено зв'язок геометричної міри заплутаності спіну з його середнім значенням. Цей зв'язок відкриває можливість прямого експериментального вимірювання геометричної міри заплутаності спіну з довільною квантовою системою. У статті ми досліджуємо заплутаність трикутного спінового кластера на основі зв'язку заплутаності спіну з його середнім значенням [14].

Стаття має таку структуру. У другому розділі розглянено геометричну міру заплутаності та її зв'язок з середнім значенням спіну. Третій розділ присвячено трикутному спіновому кластеру. Знайдено вираз для заплутаності спінів трикутного спінового кластера. У четвертому розділі представлено висновки.

2 Геометрична міра заплутаності спіну та його середнє значення

Геометрична міра заплутаності визначається як мінімальна квадратична відстань між заплутаним станом $|\psi\rangle$ і сукупністю чистих незаплутаних станів $|\psi_s\rangle$

$$E(|\psi\rangle) = \min_{|\psi_s\rangle}(1 - |\langle\psi|\psi_s\rangle|^2) = 1 - \max_{|\psi_s\rangle}|\langle\psi|\psi_s\rangle|^2, \tag{1}$$

де $1 - |\langle\psi|\psi_s\rangle|^2$ – квадрат відстані Фубіні-Студі.

У роботі [14] показано, що для обчислення геометричної міри заплутаності спіну з довільною квантовою системою необхідним є знаходження середнього значення цього спіну.

В загальному випадку, чистий квантовий стан спіну $S = 1/2$, який може бути заплутаним з довільною квантовою системою в чистому стані має вигляд

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle|\phi_1\rangle + b|\downarrow\rangle|\phi_2\rangle, \tag{2}$$

тут константи a, b – дійсні та додатні, $|\phi_1\rangle$ та $|\phi_2\rangle$ довільні вектори станів квантової системи заплутаної з спіном, які задовольняють умову нормування $\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_2\rangle = 1$ та в загальному випадку не є ортогональними $\langle\phi_1|\phi_2\rangle \neq 0$. Використовуючи розклад Шмідта, довільний вектор стану спіну, який взаємодіє з певною квантовою системою, може бути записаний як

$$|\psi\rangle = \lambda_1|\alpha_1\rangle|\tilde{\phi_1}\rangle + \lambda_2|\alpha_2\rangle|\tilde{\phi_2}\rangle, \tag{3}$$

де $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle$ два ортогональні спінові стани

$$|\alpha_1\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + \alpha|\downarrow\rangle}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}, \quad |\alpha_2\rangle = \frac{\alpha^*|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}, \tag{4}$$

$|\tilde{\phi_1}\rangle$, $|\tilde{\phi_2}\rangle$ – ортогональні стани довільної квантової системи, яка взаємодіє зі спіном, λ_1, λ_2 – дійсні і додатні константи, коефіцієнти Шмідта, які задовольняють умову $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$. Геометрична міра заплутаності пов'язана з значеннями цих констант λ_1, λ_2 і визначається як $E(|\psi\rangle) = 1 - \max(\lambda_1^2, \lambda_2^2)$ [15].

У роботі [14] показано, що коефіцієнти Шмідта λ_1, λ_2 пов'язані з середнім значенням спіну $\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(1 \pm |\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle|)$, де $|\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle| = \sqrt{\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle^2}$. Як наслідок, заплутаність спіну з довільною квантовою системою визначається його середнім значенням.

$$E(|\psi\rangle) = \frac{1}{2}(1 - |\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle|). \tag{5}$$

Так, для того, щоб обчислити міру заплутаності спіну з довільною квантовою системою потрібно лише знайти середнє значення спіну. На основі результату (5) у роботі [16] досліджено заплутаність системи N спінів 1/2 із взаємодією Ізинга, коли у початковому стані всі спіни мають однаковий напрям. У наступному розділі результат (5) буде використано для обчислення заплутаності спінів трикутного спінового кластера для довільного початкового стану системи.

3 Заплутаність спінів трикутного спінового кластера

Розгляньмо трикутний спіновий кластер, який описується таким гамільтоніаном (див. наприклад [17])

$$H_T = -J(\sigma_0^z\sigma_1^z + \sigma_1^z\sigma_2^z + \sigma_2^z\sigma_0^z) - h(\sigma_0^z + \sigma_1^z + \sigma_2^z), \tag{6}$$

тут J, h - константи, які відповідають за величину взаємодії та магнітне поле, відповідно (див. рис. 1)

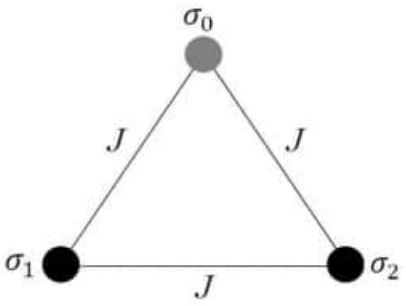

Рис. 1: Трикутний спіновий кластер

Знайдемо заплутаність спінів у такій системі. Для цього використаємо зв'язок заплутаності із середнім значенням спіну (5). Зауважимо, що ця система є однією з найпростіших експериментальних реалізацій, яка описує поведінку спінів в молекулярному трикутному кластері диспрозію (трикутний Dy^{3+} кластер). Зауважимо, що іони Dy^{3+} можуть бути представлені ефективним спіном $1/2$ та змодельовані гамільтоніаном Ізинга [18].

Нехай у початковий момент часу хвильова функція системи є факторизованою

$$|\psi_{t=0}\rangle = |\psi_0\rangle|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle, \tag{7}$$

де кожна з функцій

$$|\psi_i\rangle = a_i|\uparrow\rangle + b_i|\downarrow\rangle, \tag{8}$$

тут a_i та b_i – комплексні константи.
Для функції (8) умова нормування має вигляд

$$|a_i^2| + |b_i^2| = 1. \tag{9}$$

Отже, хвильову функцію системи запишемо як

$$\begin{aligned}|\psi_{t=0}\rangle = {} & a_0a_1a_2|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + a_0a_1b_2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + a_0b_1a_2|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + a_0b_1b_2|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \\ & + b_0a_1a_2|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + b_0a_1b_2|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + b_0b_1a_2|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + b_0b_1b_2|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle.\end{aligned} \tag{10}$$

Знайдемо зміну в часі хвильової функції (10). Врахувавши вигляд гамільтоніану (6), оператор еволюції запишемо як

$$\hat{S} = \exp(-\frac{i}{\hbar}H_T t) = \exp(i\omega(\sigma_0^z\sigma_1^z + \sigma_1^z\sigma_2^z + \sigma_2^z\sigma_0^z)t + i\alpha(\sigma_0^z + \sigma_1^z + \sigma_2^z)t). \tag{11}$$

де $\omega = J/\hbar$ і $\alpha = h/\hbar$.
Отже, отримаємо

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle = {} & a_0a_1a_2e^{3i(\alpha+\omega)t}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + a_0a_1b_2e^{i(\alpha-\omega)t}|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \\ & + a_0b_1a_2e^{i(\alpha-\omega)t}|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + a_0b_1b_2e^{-i(\alpha+\omega)t}|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \\ & + b_0a_1a_2e^{i(\alpha-\omega)t}|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + b_0a_1b_2e^{-i(\alpha+\omega)t}|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + \\ & + b_0b_1a_2e^{-i(\alpha+\omega)t}|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + b_0b_1b_2e^{3i(\omega-\alpha)t}|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle.\end{aligned} \tag{12}$$

Обчислимо заплутаність спіну із іншими спінами системи. Розгляньмо заплутаність спіну з індексом 0 із першим та другим спіном системи. Для цього відшукаємо середнє значення

$$\langle\boldsymbol{\sigma}_0\rangle = \langle\psi(t)|\boldsymbol{\sigma}_0|\psi(t)\rangle. \tag{13}$$

Компоненти вектора (13) мають вигляд

$$\begin{aligned}\langle\sigma_0^x\rangle = {} & \alpha_0^*\alpha_4\left(e^{-2i(\alpha+2\omega)t} + \frac{a_0b_0^*}{a_0^*b_0}e^{2i(\alpha+2\omega)t}\right) + \\ & + \alpha_3^*\alpha_7\left(e^{-2i(\alpha-2\omega)t} + \frac{a_0b_0^*}{a_0^*b_0}e^{2i(\alpha-2\omega)t}\right) + \\ & + (\alpha_1^*\alpha_5 + \alpha_2^*\alpha_6)\left(e^{-2i\alpha t} + \frac{a_0b_0^*}{a_0^*b_0}e^{2i\alpha t}\right),\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\langle\sigma_0^y\rangle = {} & -i\alpha_0^*\alpha_4\left(e^{-2i(\alpha+2\omega)t} - \frac{a_0b_0^*}{a_0^*b_0}e^{2i(\alpha+2\omega)t}\right) - \\ & - i\alpha_3^*\alpha_7\left(e^{-2i(\alpha-2\omega)t} - \frac{a_0b_0^*}{a_0^*b_0}e^{2i(\alpha-2\omega)t}\right) - \\ & - i(\alpha_1^*\alpha_5 + \alpha_2^*\alpha_6)\left(e^{-2i\alpha t} - \frac{a_0b_0^*}{a_0^*b_0}e^{2i\alpha t}\right),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\langle\sigma_0^z\rangle = |\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2, \tag{16}$$

де

$$\alpha_0 = a_0a_1a_2,\ \ \alpha_1 = a_0a_1b_2,\ \ \alpha_2 = a_0b_1a_2,\ \ \alpha_3 = a_0b_1b_2, \tag{17}$$

$$\alpha_4 = b_0a_1a_2,\ \ \alpha_5 = b_0a_1b_2,\ \ \alpha_6 = b_0b_1a_2,\ \ \alpha_7 = b_0b_1b_2. \tag{18}$$

Вирази для $\langle\sigma_0^x\rangle$, $\langle\sigma_0^y\rangle$, $\langle\sigma_0^z\rangle$ можна записати через середні значення спінів в поча-

тковому стані ($t = 0$):

$$\langle\sigma_0^x\rangle = \langle\sigma_0^x\rangle_0 \left[\cos(2\alpha t)\cos(4\omega t)\,\langle\sigma_1^z\rangle_0\,\langle\sigma_2^z\rangle_0 - \frac{1}{2}\sin(4\omega t)\sin(2\alpha t)(\langle\sigma_1^z\rangle_0 + \langle\sigma_2^z\rangle_0)\right] +$$
$$+ \langle\sigma_0^y\rangle_0 \left[\sin(2\alpha t)\cos(4\omega t)\,\langle\sigma_1^z\rangle_0\,\langle\sigma_2^z\rangle_0 + \frac{1}{2}\sin(4\omega t)\cos(2\alpha t)(\langle\sigma_1^z\rangle_0 + \langle\sigma_2^z\rangle_0)\right], \quad (19)$$

$$\langle\sigma_0^y\rangle = \langle\sigma_0^y\rangle_0 \left[\cos(2\alpha t)\cos(4\omega t)\,\langle\sigma_1^z\rangle_0\,\langle\sigma_2^z\rangle_0 - \frac{1}{2}\sin(4\omega t)\sin(2\alpha t)(\langle\sigma_1^z\rangle_0 + \langle\sigma_2^z\rangle_0)\right] -$$
$$- \langle\sigma_0^x\rangle_0 \left[\sin(2\alpha t)\cos(4\omega t)\,\langle\sigma_1^z\rangle_0\,\langle\sigma_2^z\rangle_0 + \frac{1}{2}\sin(4\omega t)\cos(2\alpha t)(\langle\sigma_1^z\rangle_0 + \langle\sigma_2^z\rangle_0)\right], \quad (20)$$

$$\langle\sigma_0^z\rangle = \langle\sigma_0^z\rangle_0\,, \quad (21)$$

де $\left\langle\sigma_\alpha^j\right\rangle_0 = \langle\psi_{t=0}|\sigma_\alpha^j|\psi_{t=0}\rangle$.
Відповідно до (5) отримаємо заплутаність

$$E = \frac{1}{2}\left(1 - |\,\langle\boldsymbol{\sigma}_0\rangle\,|\right), \quad (22)$$

де

$$|\,\langle\boldsymbol{\sigma}_0\rangle\,| = \Big(\langle\sigma_0^z\rangle_0^2 + \left(\langle\sigma_0^x\rangle_0^2 + \langle\sigma_0^y\rangle_0^2\right)\Big[\cos^4(2\omega t) + \sin^4(2\omega t)\,\langle\sigma_1^z\rangle_0^2\,\langle\sigma_2^z\rangle_0^2 +$$
$$+ \sin^2(2\omega t)\cos^2(2\omega t)(\langle\sigma_1^z\rangle_0^2 + \langle\sigma_2^z\rangle_0^2)\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Звернімо увагу, що заплутаність спіну у трикутному спіновому кластері з іншими спінами визначається середнім значеннями спінів у початковому стані $\left\langle\sigma_0^i\right\rangle_0$, $\left\langle\sigma_1^i\right\rangle_0$, $\left\langle\sigma_2^i\right\rangle_0$, де $i = (x, y, z)$, а також величиною взаємодії (нагадаємо, що $\omega = J/\hbar$). Звернімо також увагу, що заплутаність не залежить від величини магнітного поля. Це пов'язано з тим, що оператор еволюції (11) можна записати як $\hat{S} = \exp(i\omega(\sigma_0^z\sigma_1^z + \sigma_1^z\sigma_2^z + \sigma_2^z\sigma_0^z)t)\exp(i\alpha\sigma_0^z t)\exp(i\alpha\sigma_1^z t)\exp(i\alpha\sigma_2^z t)$. Дія локальних унітарних операторів $\exp(i\alpha\sigma_0^z t)$, $\exp(i\alpha\sigma_1^z t)$, $\exp(i\alpha\sigma_2^z t)$ не впливає на заплутаність. Зазначимо, що результат (22) у випадку початкового стану (7) з $a_i = \cos\frac{\theta}{2}$, $b_i = \sin\frac{\theta}{2}\exp(i\phi)$ відповідає результату, представленому у роботі [16].

У випадку $a_i = b_i = 1/\sqrt{2}$ заплутаність набуває набагато простішого вигляду

$$E = \frac{1}{2}\sin^2(2\omega t). \quad (24)$$

Зазначимо, що при $t = 0$ заплутаність $E = 0$, оскільки початковий стан факторизований. Максимальне значення заплутаності $E = 1/2$ отримаємо при $t = \pi(2n+1)/4\omega$, де $n = 0, 1, 2...$

Висновки

Розглянуто триспінову систему, трикутний спіновий кластер, яка характеризується гамільтоніаном (6). Ця модель описує спіни в молекулярному кластері диспрозію.

На основі зв'язку геометричної міри заплутаності спіну з його середнім значенням, який вперше був знайдений у роботі [14], ми знайшли заплутаність спінів трикутного спінового кластера (22) у випадку довільного факторизованого початкового стану (7). Ми показали, що заплутаність визначається середніми значеннями спінів в початковому стані ($t = 0$) та величиною взаємодії. Також знайдено вираз для заплутаності спінів трикутного спінового кластера (24) у конкретному випадку початкового стану (7) з $a_j = b_j = 1/\sqrt{2}$. Зазначимо, що отримані результати пов'язують заплутаність із спостережуваними величинами, а саме – з середніми значеннями спінів.

Подяки

Автори висловлюють велику подяку професорові Ткачуку В. М. за цінні поради при отриманні результатів. Також автори вдячні рецензентам за важливі зауваження. Публікація містить результати досліджень, проведених за підтримки Міністерства освіти та науки України в рамках держбюджетної теми ФФ-83Ф (No. 0119U002203).

Список використаної літератури

1. *Artur K.* Quantum cryptography based on Bells theorem / K. Artur // Phys. Rev. Lett. – 1991. –Vol. 67. –P. 661, https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.661.
2. *Charles H.* Bennett Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels / Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crpeau, Richard Jozsa, Asher Peres and William K. Wootters // Phys. Rev. Lett. –1993. –Vol. 70. –P. 1895, https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895.
3. *Cleve R.* Substituting quantum entanglement for communication / R. Cleve, H. Buhrman // Phys. Rev. A –1997. –Vol. 56. –P. 1201, https://doi.org/10.1103/PhysRevA.56.1201.
4. *Shimony A.* Degree of entanglement. / A. Shimony // Ann. NY. Acad. Sci. –1995. –Vol. 755. –P. 675–679, https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1995.tb39008.x.
5. *Wei T.-C.* Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states / T. C. Wei, P. M. Goldbart // Phys. Rev. A. –2003. –Vol. 68, 042307, https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.042307.
6. *Brody D. C.* Geometric quantum mechanics / D. C. Brody, L. P. Hughston // J. Geom. Phys. –2001. –Vol. 38(1). –P. 19–53, htpps://doi.org/10.1016/S0393-0440(00)00052-8.
7. *Markham D.* Survival of entanglement in thermal states / D. Markham, J. Anders, V. Vedral, M. Murao, A. Miyake // Euro. Phys. Lett. –2008. –Vol. 81, 40006, https://doi.org/10.1209/0295-5075/81/40006.
8. *Wei T.-C.* Global entanglement and quantum criticality in spin chains / T.-C. Wei, D. Das, S. Mukhopadyay, S. Vishveswara, P. M. Goldbart // Phys. Rev. A –2005. –Vol. 71, 060305, https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.060305.
9. *Nakata Y.* Thermal robustness of multipartite entanglement of the 1-D spin 1/2 XY model / Y. Nakata, D. Markham, M. Murao // Phys. Rev. A. –2009. –Vol. 79, 042313, https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.042313.
10. *Gross D.* Most quantum states are too entangled to be useful as computational resources / D. Gross, S. T. Flammia, J. Eisert // –2005. arXiv:0810.4331, https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.190501.
11. *Mora C. E.* Universal resources for approximate and stochastic measurement-based quantum computation / C. E. Mora, M. Piani, A. Miyake, M. Van den Nest, W. Dur, H. J. Briegel // –2009. arXiv:0904.3641, https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.042315.
12. *Orus R.* Equivalence of critical scaling laws for many-body entanglement in the Lipkin-Meshkov-Glick model / R. Orus, S. Dusuel, J. Vidal // Phys. Rev. Lett. –2008. –Vol. 101, 025701, https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.025701 .

13. *Q. Q. Shi* Finite-size geometric entanglement from tensor network algorithms / Q.-Q. Shi, Roman Orus, J. O. Fjarestad, H.-Q. Zhou // –2009. arXiv:0901.2863v1, https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/2/025008
14. *Frydryszak A. M.* Quantifying geometric measure of entanglement by mean value of spin and spin correlations with application to physical system / A. M. Frydryszak, M. I. Samar, V. M. Tkachuk // Eur. Phys. J. D –2017. –Vol. 71. –P. 233, https://doi.org/10.1140/epjd/e2017-70752-3.
15. *Sen(De) A.* Channel capacities versus entanglement measures in multiparty quantum states /A. Sen(De), U. Sen // Phys. Rev. –2010 –Vol. 81, 012308, https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.012308.
16. *Kuzmak A.* Entanglement and quantum state geometry of a spin system with all-range Ising-type interaction / A. R. Kuzmak // J. Phys. A: Math. Theor. –2018 –Vol. 51. –P. 175305, https://doi.org/10.1088/1751-8121/aab6f8.
17. *Gnatenko Kh. P.* Lee-Yang zeros and two-time spin correlation function / Kh. P. Gnatenko, A. Kargol, V. M. Tkachuk // Phys. A –2018. –Vol. 509. –P. 1095-1101, https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.06.103.
18. *Luzon J.* Spin Chirality in a molecular Dysprosium triangle: The Archetype of the nonlinear Ising model / J. Luzon, K. Bernot, I. J. Hewitt, C. E. Anson, A. K. Powell, R. Sessoli // Phys. Rev. Lett. –2008. –Vol. 100, 247205, https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.247205.

References

1. K. Artur, Phys. Rev. Lett. **67**(6–5), 661(1991), https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.661.
2. H. Charles,G. Brassard C. Crpeau R. Jozsa A. Peres and W. Woosters, Phys. Rev. Lett. **70**(13), 1895(1993), https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895.
3. R. Cleve and H. Buhrman, Phys. Rev. **56**(2), 1201(1997), https://doi.org/10.1103/PhysRevA.56.1201.
4. A. Shimony, Ann. NY. Acad. Sci. **755**, 675–679(1995).
5. T. C. Wei and P. M. Goldbart, Phys. Rev. A. **68**(4), 042307(2003), https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.042307.
6. D. C. Brody and L. P. Hughston, J. Geom. Phys. **38**(1), 19—53(2001).
7. D. Markham J. Anders V. Vedral M. Murao and A. Miyake, Euro. Phys. Lett. **81**(4), 40006, https://doi.org/10.1209/0295-5075/81/40006.
8. T. C. Wei D. Das S. Mukhopadyay S. Vishveswara and P. M. Goldbart, Phys. Rev. A. **71**(6), 060305(2005), https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.060305.
9. Y. Nakata D. Markham and M. Murao, Phys. Rev. A. **71**(4), 042313(2009), https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.042313.
10. D. Gross S. T. Flammia and J. Eisert, Phys. Rev. Lett. **102**(12), 190501(2009), https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.190501.
11. C. E. Mora M. Piani A. Miyake M. Van den Nest W. Dur and H. J. Briegel, Phys. Rev. A. **81**(4), 042315(2010), https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.042315.
12. R. Orus S. Dusuel and J. Vidal, Phys. Rev. Lett. **101**(2), 025701(2008), https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.025701.
13. Q.-Q. Shi R. Orus J. O. Fjarestad and H. Q. Zhou, Phys. Rev. Lett. **12**, 025008(2010), https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/2/025008.
14. A. M. Frydryszak M. I Samar and V. M. Tkachuk, Eur. Phys. J. D. **71**, 233(2017), https://doi.org/10.1140/epjd/e2017-70752-3.
15. A. Sen(De) and U. Sen, Phys. Rev. **81**, 012308(2010), https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.012308.
16. A. R. Kuzmak, J. Phys. A: Math. Theor. **51**, 175305(2018), https://doi.org/10.1088/1751-8121/aab6f8.
17. Kh. P. Gnatenko A. Kargol and V. M. Tkachuk, Phys. A 509. **1095-1101**(2018).
18. J. Luzon K. Bernot I. J. Hewitt C. E. Anson A. K. Powell and R. Sessoli, Phys. Rev. Lett. **100**(24), 247205(2008), https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.247205.

Стаття надійшла до редакції 16.06.2019
прийнята до друку 15.07.2019

Entanglement of spins in triangle spin cluster

Yu. Z. Golskyi, Kh. P. Gnatenko

Ivan Franko National University of Lviv, Department for Theoretical Physics
12 Drahomanov St., Lviv, 79005, Ukraine
e-mail: golskyi.yurii@gmail.com

Entanglement is a prominent quantum phenomenon. Quantification of entanglement is important problem in quantum information theory. We study the geometric measure of entanglement which is defined as a minimal squared distance between an entangled state and separable states and is one of the widely used measures of entanglement. Recently, the authors of the paper [A. M. Frydryszak, M. I. Samar, V. M. Tkachuk Eur. Phys. J. D 71, 233, 2017] showed that the geometric measure of entanglement of a spin with arbitrary quantum system is related with observable values. Namely, they found relation of the geometric measure entanglement of a spin with its mean value. This relation opens possibility to find the geometric measure entanglement experimentally. We apply this result to the case of system of three spins, triangle spin cluster, which is described by Hamiltonian $H_T = -J(\sigma_0^z\sigma_1^z + \sigma_1^z\sigma_2^z + \sigma_2^z\sigma_0^z) - h(\sigma_0^z + \sigma_1^z + \sigma_2^z)$, where σ_i^z are Pauli operators for spin i, J, h are constants which describe the interaction and the magnetic field, respectively. It is important to note that this spin model can be realized in the experiment. It describes spins in molecular cluster of dysprosium. We calculate geometric measure of entanglement of spins in the triangle spin cluster on the basis of the relation of the entanglement of the spin with its mean value. We find that the entanglement of a spin in the triangle spin cluster with other spins is determined by the mean values of spins in the initial state and the values of interaction J. This result opens possibility to find experimentally the value of entanglement of spins in the triangle spin cluster by measuring the mean values of spins.

Key words: entanglement, triangle spin cluster

Запутанность спинов в треугольном спиновом кластере

Ю. З. Гольский, Х. П. Гнатенко

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
Кафедра теоретической физики
ул. Драгоманова 12, 79005 Львов, Украина
e-mail: golskyi.yurii@gmail.com

Исследуется треугольный спиновый кластер. Эта модель описывает спины в молекулярном кластере диспрозия. На основании связи запутанности спина з его средним значением, полученого в работе [A. M. Frydryszak, M. I. Samar, V. M. Tkachuk Eur. Phys. J. D 71, 233, 2017], исчисляется запутанность спинов в треугольном спиновом кластере.

Ключевые слова: запутанность, треугольный спиновый кластер