

## Суперадитивна модель ідеального фермі-газу поблизу абсолютного нуля температури

Б. Собко, А. Ровенчак

*Кафедра теоретичної фізики,  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Драгоманова, 12, 79005 Львів, Україна  
e-mail: {bohanka.sobko.d, andrij.rovenchak}@gmail.com*

У межах неадитивного узагальнення статистики Фермі–Дірака з використанням  $q$ -експоненти Цалліса, отримано вирази для термодинамічних функцій поблизу абсолютного нуля в так званому суперадитивному випадку, що відповідає  $q < 1$ . За допомогою послідовних аналітичних та числових розрахунків продемонстровано, що в границі низьких температур енергія системи в розрахунку на одну частинку має вигляд  $E/N = E_0/N + \alpha(q, s)T + \mathcal{O}(T^2)$ , де  $s$  — показник степеня енергії в густині станів  $g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{s-1}$ . Звідси випливає, що теплоємність при  $T \rightarrow 0$  набуває ненульового значення, що дорівнює коефіцієнту  $\alpha(q, s)$ . Таке відхилення від третього начала термодинаміки відоме для неадитивних модифікацій статистики. Залежність питомої теплоємності в абсолютному нулі для різних параметрів неадитивності  $q$  та показника  $s$  також проілюстровано графічно.

**Ключові слова:** статистика Фермі–Дірака, ентропія Цалліса, неадитивна статистика, ідеальний фермі-газ, третє начало термодинаміки

## 1 Вступ

Неадитивні статистики використовують для опису широкого класу задач. Прикладом можуть бути фрактальні структури та системи з далекодійними взаємодіями [1]. На відповідні підходи натрапляємо в ядерній фізиці [2], космології [3], фізиці магнітних систем [4], а також у низці інших галузей науки [5–9].

У цій праці ми фокусуємося на окремій задачі з термодинаміки неадитивної модифікації статистики Фермі, запропонованої в [10]. Варто зазначити, що існують різні способи неадитивного узагальнення квантових статистик Бозе та Фермі [11–16].

У [10] ми виявили, що в розкладі виразу для енергії системи за степенями температури  $T$  є лінійний доданок. З цього доходимо до висновку про порушення третього начала термодинаміки, про що згадують у контексті дослідження узагальнених ентропій [17,18].

Ми використовуватимемо узагальнення звичайної ентропії Больцмана–Гіббса, яке Константіно Цалліс запропонував у 1988 році [19] в такому вигляді:

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left( 1 - \sum_{j=1}^W p_j^q \right), \quad q \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Тут  $W$  — кількість мікростанів, а імовірності їх реалізації  $p_j$  нормовані умовою

$$\sum_{j=1}^W p_j = 1. \quad (2)$$

Зазначимо, що раніше подібне узагальнення дав Золтан Дароці для ентропії в теорії інформації [20].

Нескладно показати, що в границі  $q \rightarrow 1$  ентропія Цалліса переходить у звичайну ентропію Больцмана–Гіббса:

$$S_q \Big|_{q \rightarrow 1} = - \sum_{j=1}^W p_j \ln p_j \equiv S^{\text{BG}}.$$

Остання є адитивною величиною, тобто для системи, що складається з двох підсистем  $A$  та  $B$ ,

$$S^{\text{BG}}(A+B) = S^{\text{BG}}(A) + S^{\text{BG}}(B).$$

На відміну від цього, ентропія Цалліса задовольняє співвідношення [1]:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B), \quad (3)$$

тобто є неадитивною величиною. Для  $q > 1$  маємо, отже,  $S_q(A+B) < S_q(A) + S_q(B)$ , тому таку ентропію Цалліса називають *субадитивною*, а для  $q < 1$  нерівність буде  $S_q(A+B) > S_q(A) + S_q(B)$ , що відповідає *суперадитивній* ентропії. Саме такий випадок ми й розглядатимемо в цій статті.

Ентропія Цалліса досягає максимального значення за умови рівності всіх імовірностей,  $p_j = 1/W$  для усіх  $j$ . Цей максимум дорівнює

$$S_q = \frac{W^{1-q} - 1}{1-q}. \quad (4)$$

Можна ввести так званий  $q$ -логарифм,

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, \quad \text{причому} \quad \ln_1 x = \ln x, \quad (5)$$

що дає змогу записати  $S_q = \ln_q W$ , подібно як  $S^{\text{BG}} = \ln W$ .

Оберненою до  $q$ -логарифма є  $q$ -експонента Цалліса [21]:

$$e_q^x = \begin{cases} \exp(x), & \text{якщо } q = 1, \\ [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}, & \text{якщо } q \neq 1 \text{ і } 1 + (1-q)x > 0, \\ 0^{1/(1-q)}, & \text{якщо } q \neq 1 \text{ і } 1 + (1-q)x \leq 0, \end{cases} \quad (6)$$

Неадитивну модифікацію розподілу Фермі можна ввести таким способом [10]:

$$n_j = \frac{1}{z^{-1}e_q^{\varepsilon_j/T} + 1}, \quad (7)$$

де  $z$  — активність (фугативність),  $T$  — абсолютна температура,  $\varepsilon_j$  — енергія, що відповідає  $j$ -му рівневі.

У наступних розділах подано послідовні аналітичні та числові розрахунки, що обґрунтовують фізичні висновки про поведінку термодинамічних функцій поблизу абсолютного нуля.

## 2 Термодинамічні функції

Фугативність як функцію температури можна отримати з рівняння

$$N = \sum_j n_j = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{z^{-1}e_q^{\varepsilon/T} + 1}, \quad (8)$$

де  $N$  — кількість частинок, а підсумовування за станами замінено на інтегрування за енергіями з густиною станів  $g(\varepsilon)$ . Цю функцію ми розглядатимемо в такому загальному вигляді:

$$g(\varepsilon) = NA\varepsilon^{s-1}. \quad (9)$$

Різні значення  $s$  дають змогу охопити такі системи, як наприклад,  $D$ -вимірні незваємодіючі частинки ( $s = D/2$ ) чи  $D$ -вимірні гармонічні осцилятори ( $s = D$ ). Множник  $A$  залежить від характеристик системи (маса і концентрація частинок, частота гармонічного осцилятора тощо).

Енергію розраховують за формулою:

$$E = \sum_j \varepsilon_j n_j = \int_0^\infty \frac{\varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon}{z^{-1}e_q^{\varepsilon/T} + 1}, \quad (10)$$

Із виразу для кількості частинок,

$$N = NAT^s \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{z^{-1}e_q^x + 1}, \quad (11)$$

отримаємо:

$$1 = AT^s \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{z^{-1}e_q^x + 1}, \quad (12)$$

Цей інтеграл можна розділити на дві частини:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{z^{-1}e_q^x + 1} = \int_0^{x_1} \frac{x^{s-1} dx}{z^{-1}e_q^x + 1} + \int_{x_1}^\infty \frac{x^{s-1} dx}{z^{-1}e_q^x + 1}, \quad (13)$$

де  $e_q^{x_1} = z$ , що еквівалентно  $x_1 = \ln_q z$

Маючи різний радіус збіжності, їх перепишемо так:

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} dx x^{s-1} [1 + z^{-1} e_q^x]^{-1} + \int_{x_1}^{\infty} dx x^{s-1} z (e_q^x)^{-1} [1 + z(e_q^x)]^{-1} \\ &= \int_0^{x_1} dx x^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{z^k} (e_q^x)^k + \int_{x_1}^{\infty} dx x^{s-1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} z^k (e_q^x)^{-k}. \end{aligned} \quad (14)$$

У границі  $T \rightarrow 0$  активність прямує до нескінченності, як і  $x_1$ . Дані інтеграли, враховуючи перші два члени розкладу, перепишуться так:

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} dx x^{s-1} (e_q^x)^k = \int_0^{x_1} dx x^{s-1} [1 + (1-q)x]^{k/(1-q)} = \\ &= \frac{(1-q)^{\frac{k}{1-q}+1}}{s(1-q)+k} x_1^{s+\frac{k}{1-q}} + k \frac{(1-q)^{\frac{k}{1-q}-1}}{(s-1)(1-q)+k} x_1^{s+\frac{k}{1-q}-1} + \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{\infty} dx x^{s-1} (e_q^x)^k = \int_{x_1}^{\infty} dx x^{s-1} [1 + (1-q)x]^{-k/(1-q)} = \\ &= \frac{(1-q)^{1-\frac{k}{1-q}}}{k-s(1-q)} x_1^{s-\frac{k}{1-q}} - k \frac{(1-q)^{-\frac{k}{1-q}-1}}{k-(s-1)(1-q)} x_1^{s-\frac{k}{1-q}-1} + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Зважаючи на те, що в першому та другому наближенні відповідно:

$$x_1 = \frac{z^{1-q} - 1}{1-q}, \quad x_1 = \frac{z^{1-q}}{1-q}, \quad (17)$$

та враховуючи малість  $1/z$ , отримаємо такі вирази:

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} dx x^{s-1} (e_q^x)^k = \frac{(1-q)^{1-s}}{s(1-q)+k} z^{s(1-q)+k} + \\ &+ (1-q)^{-s} z^{(s-1)(1-q)+k} \left[ \frac{(q-1)(s-1)}{(s-1)(1-q)+k} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{\infty} dx x^{s-1} (e_q^x)^k = \frac{(1-q)^{1-s}}{k-s(1-q)} z^{s(1-q)-k} + \\ &+ (1-q)^{-s} z^{(s-1)(1-q)-k} \left[ \frac{(q-1)(s-1)}{k-(s-1)(1-q)} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Далі перейдемо до  $q$ -логарифму. Для спрощення врахуємо, що перед інтегралами стоять множники  $z$  з відповідними степенями (14). Отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^k} \int_0^{x_1} dx x^{s-1} (e_q^x)^k &= \frac{(1-q)}{s(1-q)+k} [\ln_q z]^s + \\ &+ (1-q)^{-1} [\ln_q z]^{s-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)(1-q)+k} - \frac{1}{(s-1)+k} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} z^k \int_{x_1}^{\infty} dx x^{s-1} (e_q^x)^k &= \frac{(1-q)}{k-s(1-q)} [\ln_q z]^s + \\ &+ k(1-q)^{-1} [\ln_q z]^{s-1} \left\{ \frac{1}{k-s(1-q)} - \frac{1}{k-(s-1)(1-q)} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Коефіцієнти біля  $q$ -логарифмів, залежні від  $q$  та  $s$ , перепозначимо як функції  $\phi(q, s)$  та  $\psi(q, s)$ :

$$\phi(q, s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1-q}{s(1-q)+k} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1-q}{k-s(1-q)}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \psi(q, s) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{1-q} \left[ \frac{1}{(s-1)(1-q)+k} - \frac{1}{s(1-q)+k} \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{1-q} \left[ \frac{1}{k-s(1-q)} - \frac{1}{k-(s-1)(1-q)} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Ці функції запишемо за допомогою так званого трансцендента Лерха

$$\Phi(a; b; c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{(b+c)^k}, \quad (24)$$

а саме:

$$\begin{aligned} \phi(q, s) &= (1-q) \left[ \Phi(-1; 1; (1-q)s) + \Phi(-1, 1, 1+(q-1)s) \right] = \\ &= (1-q) \pi \operatorname{csc}[\pi(1-q)s]; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \psi(q, s) &= s \left[ \Phi(-1, 1, 1+(q-1)s) - \Phi(-1, 1, 1+(1-q)s) \right] + \\ &+ (s-1) \left[ \Phi(-1, 1, q+(1-q)s) - \Phi(-1, 1, 2-q+(q-1)s) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

З виразу (12) отримаємо:

$$AT^s \{(\ln_q z)^s \phi(q, s) + (\ln_q z)^{s-1} \psi(q, s)\} = 1, \quad (27)$$

а з (10) для енергії матимемо:

$$E = NAT^{s+1} \int_0^\infty \frac{x^s dx}{z^{-1} e_q^x + 1}. \quad (28)$$

Якщо врахувати, що степінь у чисельнику підінтегрального виразу на одиницю більший порівняно з виразом для кількості частинок (11), то за аналогією з (27) енергія набуде вигляду:

$$E = NAT^{s+1} \{(\ln_q z)^{s+1} \phi(q, s+1) + (\ln_q z)^s \psi(q, s+1)\}. \quad (29)$$

Враховуючи (27) та (29), отримаємо:

$$E = NT \frac{\{(\ln_q z)^{s+1} \phi(q, s+1) + (\ln_q z)^s \psi(q, s+1)\}}{\{(\ln_q z)^s \phi(q, s) + (\ln_q z)^{s-1} \psi(q, s)\}}. \quad (30)$$

Для спрощення записів, перепозначимо:  $\phi(q, s) = \phi_0$ ;  $\phi(q, s+1) = \phi_1$ ;  $\psi(q, s) = \psi_0$ ;  $\psi(q, s+1) = \psi_1$ . Після незначних перетворень вираз для енергії (30) матиме вигляд:

$$E = N(T \ln_q z) \frac{\phi_1 \left(1 + \frac{1}{\ln_q z} \frac{\psi_1}{\phi_1}\right)}{\phi_0 \left(1 + \frac{1}{\ln_q z} \frac{\psi_0}{\phi_0}\right)}. \quad (31)$$

Враховуючи малість  $\frac{1}{\ln_q z}$  та нехтуючи квадратичними доданками, отримаємо:

$$E = N(T \ln_q z) \frac{\phi_1}{\phi_0} \left(1 + \frac{1}{\ln_q z} \left(\frac{\psi_1}{\phi_1} - \frac{\psi_0}{\phi_0}\right)\right). \quad (32)$$

З виразу (27) отримаємо:

$$T \ln_q z = \left(\frac{1}{A\phi_0}\right)^{1/s} \left(1 - \frac{1}{s} \frac{1}{\ln_q z} \frac{\psi_0}{\phi_0}\right). \quad (33)$$

Тоді, враховуючи малість  $\frac{1}{\ln_q z}$  та нехтуючи квадратичними доданками, перепишемо енергію так:

$$E = N \left(\frac{1}{A\phi_0}\right)^{1/s} \frac{\phi_1}{\phi_0} \left[1 + \frac{1}{\ln_q z} \left(\frac{\psi_1}{\phi_1} - \frac{\psi_0}{\phi_0} \left(1 + \frac{1}{s}\right)\right)\right]. \quad (34)$$

Беручи лінійне наближення, отримаємо вираз для  $\frac{1}{\ln_q z}$ :

$$\frac{1}{\ln_q z} = T(A\phi_0)^{1/s}. \quad (35)$$

Очевидно, що застосовуючи цей підхід можна отримати коефіцієнти біля вищих степенів  $T$ . Остаточний вираз для енергії набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{E}{N} &= \left( \frac{1}{A\phi_0} \right)^{1/s} \frac{\phi_1}{\phi_0} \left[ 1 + T (A\phi_0)^{1/s} \left( \frac{\psi_1}{\phi_1} - \frac{\psi_0}{\phi_0} \left( 1 + \frac{1}{s} \right) \right) + \dots \right] = \\ &= \left( \frac{1}{A\phi_0} \right)^{1/s} \frac{\phi_1}{\phi_0} + T \frac{\phi_1}{\phi_0} \left[ \frac{\psi_1}{\phi_1} - \frac{\psi_0}{\phi_0} \left( 1 + \frac{1}{s} \right) \right] + \mathcal{O}(T^2). \end{aligned} \quad (36)$$

Значимо, що другий доданок у виразі для енергії, пропорційний до  $T$ , не містить множника  $A$ , що характеризується параметрами системи.

Питома теплоємність, отже, буде:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{\phi_1}{\phi_0} \left[ \frac{\psi_1}{\phi_1} - \frac{\psi_0}{\phi_0} \left( 1 + \frac{1}{s} \right) \right] + \mathcal{O}(T). \quad (37)$$

У границі  $T \rightarrow 0$  збережеться лише перший доданок, який позначимо  $\alpha(q, s)$ :

$$\alpha(q, s) = \frac{\phi_1}{\phi_0} \left[ \frac{\psi_1}{\phi_1} - \frac{\psi_0}{\phi_0} \left( 1 + \frac{1}{s} \right) \right]. \quad (38)$$

У наступному розділі наведено результати чисельних розрахунків теплоємності для різних значень параметра неадитивності  $q$  та показника  $s$  в густині станів.

### 3 Результати чисельних розрахунків

Визначивши з (12)  $z$  як функцію температури та розрахувавши далі енергію з (28), отримуємо питому теплоємність, яку для кількох значень  $q$  та  $s$  показано на рис. 1 порівняно зі звичайним ідеальним фермі-газом (з адитивною статистикою).

На рис. 2 наведено значення питомої теплоємності в нулі температур  $\alpha(q, s)$  як функції параметра неадитивності  $q$  для різних показників степеня  $s$  у густині станів (9). Як і треба очікувати, у границі  $q \rightarrow 1$ , яка відповідає звичайній адитивній статистиці, теплоємність прямує до нуля. Можна показати, що в цій границі  $\alpha(q, s)$  є лінійною

$$\alpha(q, s) \Big|_{q \rightarrow 1} = \frac{\pi^2 s}{3} (1 - q) + \mathcal{O}((1 - q)^3), \quad (39)$$

що добре видно з рисунка.

Як було показано в [10, 22], з високотемпературної поведінки теплоємності випливає існування нижньої межі для параметра  $q$ , а саме

$$q_{\min} = \frac{s}{s + 1}. \quad (40)$$

Поблизу цього значення  $\alpha(q, s)$  розбігається як

$$\alpha(q, s) \sim \frac{1}{q + s(q - 1)}. \quad (41)$$

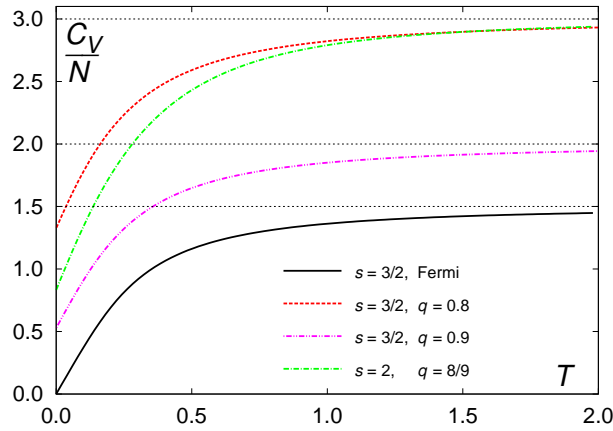


Рис. 1: Питомі теплоємності суперадитивної модифікації ідеального фермі-газу для різних значень  $s$  та  $q$ . Випадки  $s = 3/2, q = 0,8$  та  $s = 2, q = 8/9$  забезпечують однакову високо-температурну границю  $\frac{C_V}{N} = \frac{s}{q(s+1) - s}$  [10, 22]

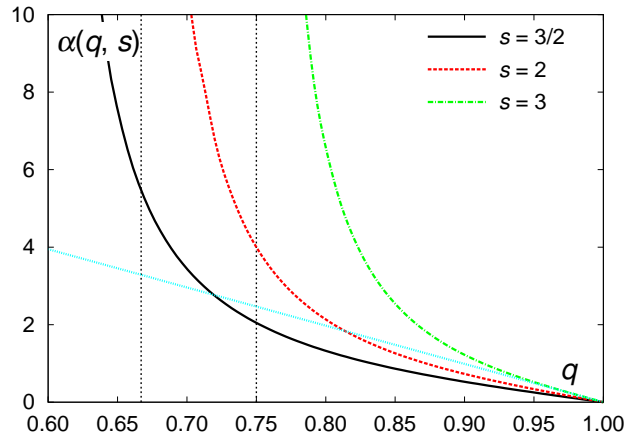


Рис. 2: Значення питомої теплоємності суперадитивної модифікації ідеального фермі-газу при  $T = 0$ . Вертикальні лінії відповідають асимптотичним значенням  $s/(s+1)$ . Пунктирною прямою позначено лінійну залежність (39) для  $s = 3$

## 4 Висновки

У статті розглянуто ідеальний фермі-газ, використовуючи неадитивну статистику Цалліса в її суперадитивній модифікації. Отримано вираз для коефіцієнта  $\alpha(q, s)$ , що є множником біля  $T$  в розкладі енергії за степенями  $T$  в границі низьких температур. Зазначимо, що він не залежить від параметрів системи. З наближенням  $q$  до одиниці значення  $\alpha(q, s)$  прямує до нуля лінійно за  $(1 - q)$ .



Розраховано температурні залежності питомої теплоємності для різних параметрів неадитивності. Для всіх  $q_{\min} < q < 1$ , де мінімум визначається показником степеня енергії в густині станів (40), спостерігаємо за низьких температур лінійне зниження  $C_V$  до певного значення, відмінного від нуля.

Описані властивості суперадитивної модифікації ідеального фермі газу становлять не лише академічний інтерес, але й дають підстави застосовувати цю модель для ефективного опису в деяких фізичних задачах, зокрема в теорії магнітних систем [23] чи космології [24].

**Подяки.** Цю роботу частково підтримано в межах проекту ФФ-83Ф (номер держреєстрації 0119U002203) від Міністерства освіти і науки України.

#### Список використаної літератури

1. Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications / Ed. by S. Abe, Y. Okamoto. — Berlin : Springer, 2001. — IX, 277 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-40919-X>.
2. Marques L. Description of high-energy  $pp$  collisions using Tsallis thermodynamics: Transverse momentum and rapidity distributions / L. Marques, J. Cleymans, A. Deppman // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 91, No. 5. — Art. 054025. — 11 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025>.
3. On the relative velocity distribution for general statistics and an application to big-bang nucleosynthesis under Tsallis statistics / Motohiko Kusakabe, Toshitaka Kajino, Grant J. Mathews, Yudong Luo // Phys. Rev. D. — 2019. — Vol. 99, No. 4. — Art. 043505. — 12 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.043505>.
4. Sampaio L. C. Nonextensivity and Tsallis statistics in magnetic systems / Luiz C. Sampaio, Márcio P. de Albuquerque, Fortunato S. de Menezes // Phys. Rev. B. — 1997. — Vol. 55, No. 9. — P. 5611–5614. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.5611>.
5. Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications / Ed. by M. Gell-Mann, C. Tsallis. — New York : Oxford University Press, 2004.
6. Takahashi T. A social discounting model based on Tsallis' statistics / Tai-ki Takahashi // Physica A. — 2010. — Vol. 389, No. 17. — P. 3600–3603. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2010.04.020>.
7. Measuring complexity, nonextensivity and chaos in the DNA sequence of the Major Histocompatibility Complex / G. P. Pavlos, L. P. Karakatsanis, A. C. Iliopoulos [et al.] // Physica A. — 2015. — Vol. 438. — P. 188–209. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.06.044>.
8. Ruiz G. Evidence for criticality in financial data / G. Ruiz, A. F. de Marcos // Eur. Phys. J. B. — 2018. — Vol. 91. — Art. 1. — 5 p. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2017-80535-3>.
9. A proposed methodology for studying the historical trajectory of words' meaning through Tsallis entropy / Yair Neuman, Yochai Cohen, Navot Israeli, Boaz Tamir // Physica A. — 2018. — Vol. 492. — P. 804–813. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.11.011>.
10. Rovenchak A. Fugacity versus chemical potential in nonadditive generalizations of the ideal Fermi-gas / A. Rovenchak, B. Sobko // Preprint arXiv:1904.09126. — 2019. — 22 p. <https://arxiv.org/abs/1904.09126>; ; прийнято до друку в журнал Physica A, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122098>.
11. Büyükkılıç F. A statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases / F. Büyükkılıç, D. Demirhan, A. Güleç // Phys. Lett. A. — 1995. — Vol. 197, No. 3. — P. 209–220. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(94\)00941-H](https://doi.org/10.1016/0375-9601(94)00941-H).
12. Pennini F. Tsallis nonextensive thermostatistics, Pauli principle and the structure of the Fermi surface / F. Pennini, A. Plastino, A. R. Plastino // Physica A. — 1996. — Vol. 234, No. 1–2. — P. 471–479. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(96\)00264-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(96)00264-6).
13. Bose–Einstein and Fermi–Dirac distributions in nonextensive Tsallis statistics: an exact study / H. H. Aragão-Rêgo, D. J. Soares, L. S. Lucena [et al.] // Physica A. — 2003. — Vol. 317. — P. 199–208. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01330-4](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01330-4).
14. q-thermostatistics and the analytical treatment of the ideal Fermi gas / S. Martínez, F. Pennini, A. Plastino, M. Portesi // Physica A. — 2004. — Vol. 332. — P. 230–248. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.10.026>.

15. *Rożynek J.* Non-extensive distributions for a relativistic Fermi gas / J. Rożynek // *Physica A.* — 2015. — Vol. 440. — P. 27–32. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.08.022>.
16. *Mohammadzadeh H.* Perturbative thermodynamic geometry of nonextensive ideal classical, Bose, and Fermi gases / Hosein Mohammadzadeh, Fereshteh Adli, Sahereh Nouri // *Phys. Rev. E.* — 2016. — Vol. 94, No. 6. — Art. 062118. — 8 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.062118>.
17. Third law of thermodynamics as a key test of generalized entropies / E. P. Bento, G. M. Viswanathan, M. G. E. da Luz, R. Silva // *Phys. Rev. E.* — 2015. — Vol. 91, No. 2. — Art. 022105. — 7 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.022105>.
18. *Bagci G. B.* Validity of the third law of thermodynamics for the Tsallis entropy / G. Baris Bagci, Thomas Oikonomou // *Phys. Rev. E.* — 2016. — Vol. 93, No. 2. — Art. 022112. — 4 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.022112>.
19. *Tsallis C.* Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics / C. Tsallis // *J. Stat. Phys.* — 1988. — Vol. 52, No. 1–2. — P. 479–486. <https://doi.org/10.1007/BF01016429>.
20. *Daróczy Z.* Generalized information functions / Z. Daróczy // *Information and Control.* — 1970. — Vol. 16. — P. 36–51. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(70\)80040-7](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(70)80040-7).
21. *Tsallis C.* What are the numbers that experiments provide? / C. Tsallis // *Química Nova.* — 1994. — Vol. 17, No. 6. — P. 468–471.
22. *Rovenchak A.* Ideal Bose-gas in nonadditive statistics / A. Rovenchak // *Low Temp. Phys.* — 2018. — Vol. 44, No. 10. — P. 1025–1031. <https://doi.org/10.1063/1.5055843>.
23. Separating the ferromagnetic and glassy behavior within the metal-organic magnet Ni(TCNQ)<sub>2</sub> / Adam Berlie, Ian Terry, Marek Szablewski, Sean R. Giblin // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 92, No. 18. — Art. 184431. — 15 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.92.184431>.
24. Killing horizons: Negative temperatures and entropy super-additivity / M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, C. N. Pope // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 98, No. 10. — Art. 106015. — 34 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.106015>.

## References

1. S. Abe, Y. Okamoto, editors, *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications* (Springer, Berlin, 2001).
2. L. Marques J. Cleymans and A. Deppman, *Phys. Rev. D.* **91**(5), 11-13(2015).
3. M. Kusakabe T. Kajino G. J. Mathews and Y. Luo, *Phys. Rev. D.* **99**(4), 12(2019),
4. L. C. Sampaio M. P. De Albuquerque and F. S. De Menezes, *Phys. Rev. B.* **55**(9), 5611–5614(1997).
5. Gell-Mann, C. Tsallis, editors, *Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications*, (Oxford University Press, New York, 2004).
6. T. Takahashi, *Physica A.* **389**(17), 3600–3603(2010).
7. G. P. Pavlos L. P. Karakatsanis and A. C. Iliopoulos et all, *Physica A.* **438**, 188–209.
8. G. Ruiz and A. F. de Marcos, *Eur. Phys. J. B.* **91**, 5(2018),
9. Y. Neuman Y. Cohen N. Israeli and B. Tamir, *Physica A.* **492**, 804-813.
10. A. Rovenchak and B. Sobko, *Physica A.* **22**(2019),
11. F. Buyukilic Dog?an Demirhan and A. Gulec, *Phys. Lett. A.* **197**(3), 209–220,
12. F. Pennini A. Plastino and A. R. Plastino, *Physica A.* **234**(1-2), 471–479,
13. H. H. Aragão-Rêgo D. J. Soares and L. S. Lucena et all, *Physica A.* **317**, 199-208(2003).
14. S. Martínez F. Pennini A. Plastino and M. Portesi, *Physica A.* **332**, 230-248(2004).
15. J. Rożynek, *Physica A.* **440**, 27-32(2015).
16. H. Mohammadzadeh F. Adli and and S. Nouri, *Phys. Rev. E.* **94**(6), 062118(2016).
17. E. P. Bento G. M. Viswanathan M. G. E. da Luz and and R. Silva, *Phys. Rev. E.* **91**(2), 022105(2015).
18. G. B. Bagci and T. Oikonomou, *Phys. Rev. E.* **93**(2), 022112(2016).
19. C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**(1–2), 476–486(1988).
20. Z. Daróczy, *Information and Control.* **16**, 36–51(1970).
21. C. Tsallis, *Química Nova.* **17**(6), 468–471(1994).
22. A. Rovenchak, *Low Temp. Phys.* **44**(10), 1025–1031(2018).
23. A. Berlie I. Terry M. Szablewski and and Sean R. Giblin, *Phys. Rev. B.* **92**(18), 184431(2015).
24. M. Cvetič G. W. Gibbons H. Lu and and C. N. Pope, *Phys. Rev. D.* **98**(10), 106015(2018).

## Superadditive model of the ideal Fermi-gas near absolute zero

**B. Sobko, A. Rovenchak**

*Department for Theoretical Physics,  
Ivan Franko National University of Lviv  
12 Drahomanov St., 79005 Lviv, Ukraine  
e-mail: {bohanka.sobko.d, andrij.rovenchak}@gmail.com*

Nonadditive statistics can be used to describe various systems, for instance, in fractional structures and systems with long-range interactions. In this paper, we focus on finding the low-temperature limits of thermodynamic functions of a system obeying a nonadditive modification of the Fermi-statistics.

For integrity, we briefly show how the Tsallis entropy is introduced by generalizing classical Boltzmann–Gibbs entropy. In the case of a system, which consists of two subsystems, unlike the additive entropy in the classical sense, the Tsallis entropy satisfies the relation  $S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B)$ , hence, is a non-additive quantity. For  $q > 1$  we have, therefore,  $S_q(A+B) < S_q(A) + S_q(B)$ , so in this case the Tsallis entropy is called *subadditive*, and for  $q < 1$  the respective inequality becomes  $S_q(A+B) > S_q(A) + S_q(B)$ , which corresponds to a *superadditive* entropy. It is this case that we will consider in this article.

In the low temperature limit we have obtained the expansion of energy per particle as a series over temperature  $T$  as follows:  $E/N = E_0/N + \alpha(q, s)T + \mathcal{O}(T^2)$ . The analytical expression for the coefficient  $\alpha(q, s)$ , which is a factor at  $T$  in the energy expansion, is obtained. Here,  $s$  is the power in the energy density  $g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{s-1}$ . Note that  $\alpha(q, s)$  does not depend on system parameters. Obviously, this factor is nothing but the specific heat of the system in the limit of  $T \rightarrow 0$ . The temperature dependences of the specific heat are calculated for different parameters of nonadditivity  $q$  and the power  $s$  in the density of states. For all values in the range of  $q_{\min} < q < 1$ , where the minimum value is determined by  $s$ , we observe at low temperatures a linear decrease in  $C_V$  to a certain value  $\alpha(q, s)$  different from zero. Such a violation of the third law of thermodynamics is known for nonadditive systems. As  $q$  approaches unity,  $\alpha(q, s)$  tends to zero linearly in  $(1-q)$ .

The described properties of superadditive modification of an ideal Fermi gas are not only of academic interest, but also provide grounds for using this model in effective description of some physical problems, in particular in the theory of magnetic systems and cosmology.

**Key words:** Fermi–Dirac statistics, Tsallis entropy, nonadditive statistics, ideal Fermi-gas, third law of thermodynamics

Статтю отримано: 18.06.2019  
Прийнято до друку: 22.07.2019