ISSN 1024-588X. Вісник Львівського університету. Серія фізична. 2020. Випуск 57. С. 65-100
Visnyk of the Lviv University. Series Physics. 2020. Issue 57. P. 65-100

УДК 524.3 https://doi.org/10.30970/vph.57.2020.65
PACS 97.20.-w

Внутрішня будова зір з осьовим обертанням

М. Ваврух, Д. Дзіковський

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра астрофізики, вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005 Львів,
Україна
e-mail: mvavrukh@gmail.com*

У роботі запропоновано новий підхід до розрахунку внутрішньої будови зір зі швидким обертанням у рамках політропної моделі з рівнянням стану $P(\mathbf{r}) = K(\rho(\mathbf{r}))^{1+1/n}$ (де n – індекс політропи, $\rho(\mathbf{r})$ – локальна густина, $P(\mathbf{r})$ – локальний тиск) і сталою кутовою швидкістю ω. У безрозмірних змінних рівняння рівноваги є диференціальним рівнянням у частинних похідних, воно залежить від індекса n і безрозмірної кутової швидкості $\Omega = \omega(2\pi G\rho_c)^{-1/2}$. Його розв'язки представлено у формі розкладів за базисними ортогональними функціями, а нульовим наближенням є функції Емдена, що відповідають моделі з $\Omega = 0$. Сталі інтегрування знаходяться з умови, щоб розв'язки задовольняли рівняння рівноваги в інтегральній формі. Для всіх індексів n встановлено існування двох типів розв'язків, що мають різну залежність від Ω і описують два типи структур – еліпсоїдальні і дискові. Для індексів $n = 1$ і $n = 3$ розраховано залежність сталих інтегрування від кутової швидкості Ω і встановлено максимальне значення $\Omega_{\max}(n)$, при якому порушується стабільність. Розраховано залежність характеристик політропи (маси, полярного і екваторіального радіусів, моменту інерції) від Ω. Виконано порівняння результатів з даними інших авторів. Запропоновано алгоритм розв'язання оберненої задачі – знаходження параметрів моделі для конкретної зорі за відомими спостережуваними даними. Визначено ці параметри для зорі α Eri, а також для моделей, що відповідають середнім статистичним характеристикам зір ранніх спектральних класів.

Ключові слова: зорі-політропи, осьове обертання, рівняння механічної рівноваги, стабільність зір.

1. Вступ

Осьове обертання є фактором, властивим зорям різних типів, хоча і неоднаковою мірою. Добре відомо, що нормальні зорі ранніх спектральних класів відзначаються високою кутовою швидкістю, а зорі пізніх спектральних класів (старших за F5) мають невелику кутову швидкість і оточені планетами. Наприклад, зорі класів B5 ÷ F0 мають кутову швидкість порядку 10^{-4}с$^{-1}$ [1], тоді як кутова швидкість для Сонця становить $3 \cdot 10^{-6}$с$^{-1}$. Кутова швидкість нейтронних зір (пульсарів) є в області $10\, c^{-1} \leq \omega \leq 4 \cdot 10^3$с$^{-1}$ [2].

Основи політропної теорії зір типу Сонця (з нехтовно малою швидкістю осьового обертання) розроблені у працях Г. Лена [3], Р. Емдена [4], Р. Фаулера [5], А. Еддінгтона [6] та інших дослідників. У фундаментальній праці Е. Мілна [7] у рамках моделі А. Еддінгтона, що відповідає політропній моделі з індексом $n = 3$, уперше досліджено вплив осьового обертання зір на їхні рівноважні характеристики – розподіл густини, температури, масу зорі. Через 10 років С. Чандрасекар, використавши методику Е. Мілна, одержав наближені чисельні розв'язки рівняння механічної рівноваги зір з осьовим обертанням для індексів політропи $n = 1,0; 1,5; 2; 3; 4$ і дав залежність геометричних характеристик, маси і об'єму зорі від кутової швидкості для випадку малих швидкостей обертання. Одержані результати відповідають теорії збурень у першому порядку відносно квадрата безрозмірної кутової швидкості [8]. У цій роботі по суті розв'язували суто математичну задачу, що стало традиційним підходом для робіт, виконаних упродовж минулого століття. У значно пізнішій праці Р. Джеймса [9] чисельним методом розраховано геометричні характеристики, масу і моменти інерції політроп у значно ширшій області кутових швидкостей. Проте у цій публікації відсутні будь-які дані про розв'язки рівняння рівноваги, на основі яких можна було б розрахувати момент інерції, енергію, гравітаційний потенціал за межами зорі. З. Копал [10] зазначив, що у частковому випадку $n = 1$ у рівнянні рівноваги розділяються кутові і радіальні змінні, тому його розв'язками є добутки сферичних функцій Бесселя на поліноми Лежандра. Однак він не знайшов загального розв'язку, який відповідає заданим граничним умовам і потребує розрахунку сукупності сталих інтегрування. Такий розв'язок знайдено у роботі П. Вільямса [11] у вигляді розкладу до полінома $P_8(\cos\theta)$ включно, використовуючи чисельний метод.

В роботі [12] узагальнено підхід Е. Мілна шляхом детальнішого опису периферійної області і використання підгоночних параметрів для "зшивання" розв'язків на границі між внутрішньою областю і периферією. В роботі [13] знайдено точний розв'язок для політропи з індексом $n = 0$, причому єдина стала інтегрування розрахована чисельним методом. Розв'язок для випадку $n = 1$, який автор [13] вважав точним, насправді є наближенням малих кутових швидкостей і відрізняється від результату С. Чандрасекара лише точнішим розрахунком сталої інтегрування.

Незважаючи на столітню історію дослідження зір у рамках політропної моделі, цей підхід не втратив методичного і прикладного значення. Політропна модель є добрим нульовим наближенням в теорії вироджених карликів [14, 15], в теорії зір головної послідовності [16, 17], навколозоряних дисків, планет-гігантів, нейтронних зір і чорних дір [18]. У роботах, виконаних у XXI ст., основну увагу акцентовано не на методичних деталях знаходження розв'язків рівняння рівноваги як диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних, а на прикладних аспектах. Одним з напрямів досліджень є знаходження параметрів політропного рівняння стану для конкретних спостережуваних зір з великою кутовою швидкістю обертання, тобто побудова політропних моделей для нормальних зір з відомими спостережуваними характеристиками. Однак моделі політропи із наперед заданим значенням індекса $n = 1$ (як у роботах [16, 17]) є певним обмеженням, що зменшує цінність такого підходу.

У наших роботах [19, 20] запропоновано новий підхід до знаходження розв'язків диференціального рівняння рівноваги зір з осьовим обертанням у вигляді мультикомпонентних розкладів, а сукупність сталих інтегрування визначається з інтегральної форми цього рівняння. У пропонованій роботі представлено найточніший варіант знаходження розв'язків рівняння рівноваги для політропних моделей зір, який узагальнює методику робіт [19, 20] і вільний від наближень, що ми використовували раніше. Розглянуто також обернену задачу теорії – знаходження параметрів політроп для реальних спостережуваних зір.

2. Емпірична політропна модель і метод А. Еддінгтона

Політропна модель зір є емпіричною і використовує ефективне рівняння стану речовини

$$P(\mathbf{r}) \;=\; K\rho^{\nu}(\mathbf{r}), \tag{1}$$

де $P(\mathbf{r})$ – тиск у точці з радіус-вектором $\mathbf{r}$, $\rho(\mathbf{r})$ – локальна густина, а K і ν – сталі. Замість показника ν частіше використовують індекс політропи $n = [\nu - 1]^{-1}$. А. Еддінгтон обгрунтував політропне співвідношення (1) для часткового випадку $\nu = 4/3(n = 3)$ зорі без обертання. Модель А. Еддінгтона передбачає одночасне врахування газового і світлового тиску, а повний тиск на сфері радіуса r є їхньою сумою. Використовуючи рівняння стану ідеального газу, маємо такі вирази для цих складових:

$$P_{\rm gas}(r) = \rho(r)T(r)\,\frac{R_*}{\mu_*}, \quad P_{\rm ph} = \frac{a}{3}\,T^4(r), \tag{2}$$

де $T(r)$ – локальна температура, μ_* – безрозмірна молекулярна маса в атомних одиницях m_u, яка вважається сталою по всьому об'єму зорі, $R_* = k_B/m_u$, $a = 4\sigma/c$, де σ – стала Стефана, c – швидкість світла, k_B – стала Больцмана. В моделі А. Еддінгтона припущено, що $P_{\rm gas}(r)$ і $P_{\rm ph}(r)$ пропорційні до повного тиску $P(r)$ у кожній точці зорі, а саме

$$P_{\rm gas}(r) = \beta P(r), \quad P_{\rm ph}(r) = (1-\beta)\,P(r), \tag{3}$$

а множник β є сталою величиною, незалежною від координат. Виключенням температури з рівнянь (2) і (3) одержують співвідношення

$$P(r) = K(\beta)\,\rho^{4/3}(r), \quad K(\beta) = \left\{\frac{1-\beta}{\beta^4}\cdot\frac{3R_*^4}{a\mu_*^4}\right\}^{1/3}, \tag{4}$$

яке є політропою з показником $\nu = 4/3$, чи індексом $n = 3$.

З теорії Р. Емдена [4] відомо, що при $n = 3$ маса зорі не залежить від радіуса і дорівнює

$$M = 4\pi^{-1/2}\alpha_3(K/G)^{3/2}, \tag{5}$$

де G – гравітаційна стала, $\alpha_3 = 2.01824\ldots$. Прирівнюючи вирази (1) і (4), знаходять рівняння для невідомого параметра β

$$(1-\beta)\,\frac{3R_*^4}{a\mu_*^4} = \beta^4 \pi G^3 \left(\frac{M}{\alpha_3}\right)^2 . \tag{6}$$

Цей параметр може змінюватися в області $0 < \beta < 1$, тому для зір малих мас β близьке до одиниці (переважає газовий тиск). Для зір дуже великих мас β є малим:

$$\beta \approx \left(\frac{M}{4\alpha_3}\right)^{-1/2} \pi^{-1/4} G^{-3/4} \left(\frac{3}{a}\right)^{1/4} \frac{R_*}{\mu_*} + \ldots = \left(\frac{M_0}{M}\right)^{1/2} \frac{8^{1/2}(15)^{1/4}}{\pi\mu_*} + \ldots, \tag{7}$$

де

$$M_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_u^2} \approx 2.88695\ldots\ M_\odot \tag{8}$$

є масштабом зоряних мас. При $M \leq M_\odot$ внесок світлового тиску є малим, а при $M \geq M_\odot$ він стає суттєвим. Для Сонця світловий тиск становить близько 3% повного тиску.

Отже наближення $\beta = \mathrm{const}$ по всьому об'єму зорі відповідає політропній залежності з показником $\nu = 4/3$, або індексом $n = 3$. Однак, як випливає з фізичного змісту $P_{\mathrm{gas}}(r)$ і $P_{\mathrm{ph}}(r)$, природнішим є припущення про те, що параметр β є функцією густини речовини $\rho(r)$. Нехай $\beta(r)$ задовольняє рівняння

$$\{1-\beta(r)\} \left\{\frac{\rho(r)}{\rho_c}\right\}^{3z} = \beta^4(r), \tag{9}$$

де z – числовий параметр, ρ_c – густина речовини у центрі зорі. Згідно з формулою (4)

$$P(r) = \left\{\frac{3R_*}{a\mu_*}\right\}^{1/3} \rho_c^z \,(\rho(r))^{4/3-z} . \tag{10}$$

В області периферії зорі, де $\rho(r)/\rho_c \ll 1$, розв'язок рівняння (9) є малою величиною,

$$\beta(r) \approx \left(\frac{\rho(r)}{\rho_c}\right)^{3z/4} + \ldots . \tag{11}$$

З умови

$$\frac{4}{3} - z - 1 \leq \frac{1}{5} \tag{12}$$

знаходимо максимальне значення $z_{\max} = 2/15$. Такому значенню z відповідає політропа з індексом $n = 5$ ($\nu = 6/5$), при якому зоря має безмежно великий радіус. Модель політропи з $n = 5$ називають моделлю Роша. Значення $z = 0$ відповідає політропі з індексом $n = 3$, а від'ємні значення z дають політропи з індексом $n < 3$: $z = -1/6$ відповідає політропі з $n = 2$, $z = -2/3$ – політропі з $n = 1$, $z \to -\infty$ відповідає політропі з індексом $n = 0$. Отже зміна параметра z в області $(-\infty < z < 2/15)$ відповідає політропам (10) з індексом $0 \leq n \leq 5$, а $z = 0$ – політропі А. Еддінгтона з $n = 3$.

З викладеного доходимо висновку також, що однофазна модель зорі (яку описують політропою з $n \le 3$), не може адекватно описати рівновагу зорі на головній послідовності, не кажучи вже про субгіганти чи гіганти. Для цього доцільно використовувати двофазні моделі, в яких опис внутрішньої частини виконують за допомогою політропи з індексом $n_1 \le 3$, а опис периферії – політропою з індексом $n_2 > 3$.

3. Механічна рівновага зір з осьовим обертанням

Однофазна модель зір з осьовим обертанням є загальноприйнятою у політропній теорії. Вона ґрунтується на політропному рівнянні стану

$$P(\mathbf{r}) = K\rho^{\nu}(r) = K\rho^{1+1/n}(r). \tag{13}$$

Використовуючи неінерційну систему відліку, за наявності обертання рівняння рівноваги записують у вигляді [21]

$$\nabla P(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})\,\{\nabla\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{r}) + \nabla\Phi_{\text{c}}(\mathbf{r})\}, \tag{14}$$

де

$$\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{r}) = -G\int \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{15}$$

є гравітаційним потенціалом всередині зорі, а $\Phi_{\text{c}}(\mathbf{r})$ – відцентровим потенціалом. Якщо вісь Oz сферичної системи координат збігається з віссю обертання, то

$$\Phi_{\text{c}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 \sin^2\theta. \tag{16}$$

Тут θ є полярним кутом, ω – кутова швидкість системи відліку, яка вважається сталою. Підставляючи вирази (13), (15) і (16) у рівняння (14) і враховуючи тотожність

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\,\rho^{1/n-1}(\mathbf{r})\nabla\rho(\mathbf{r}) = (1+n)\,\nabla\,\rho^{1/n}(\mathbf{r}), \tag{17}$$

одержуємо рівняння рівноваги у вигляді диференціального рівняння для розподілу густини,

$$K(1+n)\Delta\rho^{1/n}(\mathbf{r}) = -4\pi G\rho(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\,\omega^2\Delta(r^2\sin^2\theta). \tag{18}$$

За наявності осьової симетрії і симетрії відносно екваторіальної площини у розподілі густини ($\rho(\mathbf{r}) = \rho(r,\theta) = \rho(r,\pi-\theta)$) оператор Лапласа записується у вигляді

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\,\Delta_\theta, \quad \Delta_r = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right), \quad \Delta_\theta = \frac{\partial}{\partial t}(1-t^2)\,\frac{\partial}{\partial t}, \tag{19}$$

де $t = \cos\theta$, причому $\Delta(r^2\sin^2\theta) = 4$. Введемо безрозмірні змінні

$$\xi \;=\; r/\lambda_n, \qquad Y_n(\xi,\theta) = [\rho(r,\theta)/\rho_{\text{c}}]^{1/n}, \tag{20}$$

де ρ_c – густина матерії у центрі зорі. У безрозмірній формі рівняння (18) набуває вигляду

$$\Delta_{\xi,\theta}\, Y_n(\xi,\theta) = \Omega^2 - Y_n^n(\xi,\theta), \tag{21}$$

якщо масштаб довжини λ_n і безрозмірна кутова швидкість Ω визначені співвідношеннями

$$K(1+n) = 4\pi G\lambda_n^2\, \rho_c^{1-1/n}, \quad \Omega = \omega(2\pi G\rho_c)^{-1/2}, \tag{22}$$

а

$$\Delta_{\xi,\theta} = \Delta_\xi + \frac{1}{\xi^2}\,\Delta_\theta, \quad \Delta_\xi = \frac{1}{\xi^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi}\right). \tag{23}$$

Згідно з означенням (20) $Y_n(0,\theta) = 1$, а умова $\partial Y_n(\xi,\theta)/\partial\xi = 0$ при $\xi = 0$ відповідає розв'язкам, регулярним в околі $\xi = 0$. З цих граничних умов робимо важливий висновок: асимптотика розв'язків рівняння (21) при $\xi \ll 1$ і фіксованому значенні Ω не залежить від індекса політропи:

$$Y_n(\xi,\theta) \;=\; Y_0(\xi,\theta) \tag{24}$$

За умови великих значень Ω можлива немонотонна залежність $Y_n(\xi,\theta)$ відносно змінної ξ в околі екватора, що призводить до витікання речовини. Умови стабільності зорі в околі екватора

$$Y_n\left(\xi,\frac{\pi}{2}\right) \;=\; 0, \quad \frac{\partial}{\partial\xi}\,Y_n\,\left(\xi,\frac{\pi}{2}\right) \;=\; 0 \tag{25}$$

визначають максимальне значення параметра $\Omega_{\max}(n)$ і відповідне йому значення екваторіального радіуса $\xi_e^{\max}(n)$. Очевидно, що при $\Omega < \Omega_{\max}(n)$ замість умов (25) виконуються умови

$$Y_n\left(\xi,\frac{\pi}{2}\right) \;=\; 0, \quad \frac{\partial}{\partial\xi}\,Y_n\,\left(\xi,\frac{\pi}{2}\right) \;<\; 0. \tag{26}$$

Згідно з означенням (20) фізичний зміст мають лише додатні розв'язки рівняння (21), яке є двовимірним диференціальним рівнянням другого порядку в частинних похідних з двома безрозмірними параметрами $n, \Omega \geq 0$.

Рівняння (21) фомально можна розглядати як рівняння для безрозмірного гравітаційного потенціалу, створеного розподілом безрозмірної густини матерії $(4\pi)^{-1}\{\Omega^2 - Y_n^n(\xi,\theta)\}$. У зв'язку з цим його можна переписати в інтегральній формі

$$Y_n(\xi,\theta) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} C_{2l}\xi^{2l}P_{2l}(t) - \frac{1}{4\pi}\int\{\Omega^2 - Y_n^n(\xi^{'},\theta^{'})\}\,Q(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^{'})\,d\boldsymbol{\xi}^{'}, \tag{27}$$

де C_{2l} є сталими інтегрування, $P_{2l}(t)$ є поліномом Лежандра $2l$-го порядку, ядром рівняння є

$$Q(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^{'}) = |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^{'}|^{-1} - (\xi^{'})^{-1}, \tag{28}$$

а інтегрування проводиться за об'ємом зорі. Беручи до уваги тотожність

$$\Delta_{\xi,\theta}\,\{\xi^n P_n(t)\} \;=\; 0, \tag{29}$$

бачимо, що рівняння (21) і (27) є еквівалентними.

Гравітаційний потенціал всередині зорі (15) пов'язаний із безрозмірним потенціалом

$$\Phi_n(\boldsymbol{\xi}) = \Phi_n(\xi,\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{Y_n^n(\xi^{'},\theta^{'})}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}^{'}|}\, d\boldsymbol{\xi}^{'} \tag{30}$$

співвідношенням

$$\Phi_{\rm grav}(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho_c\lambda_n^2\Phi_n(\boldsymbol{\xi}).$$

З рівняння (14), записаного у безрозмірних змінних, одержуємо співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\,\{\Phi_n(\xi,\theta)+Y_n(\xi,\theta)\} = \frac{\Omega^2}{3}\,\xi\,\{1-P_2(t)\}. \tag{31}$$

Це дає змогу переписати рівняння (27) у термінах $Y_n(\xi,\theta)$, $\Phi_n(\xi,\theta)$, а саме

$$Y_n(\xi,\theta)+\{\Phi_n(\xi,\theta)-\Phi_n(0,0)\} = 1+\sum_{l=1}^{\infty} C_{2l}\,\xi^{2l}P_{2l}(t)+\Omega^2\{\Phi_0(\xi,\theta)-\Phi_0(0,0)\}, \tag{32}$$

де $\Phi_0(\xi,\theta)$ визначається виразом (30) при $Y_n(\xi^{'},\theta^{'})\equiv 1$, і конвертувати рівність (31) до такої форми [7]:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} C_{2l}\,\xi^{2l}P_{2l}(t)+\Omega^2[\Phi_0(\xi,\theta)-\Phi_0(0,0)]\right\} = \xi\,\frac{\Omega^2}{3}\,(1-P_2(t)). \tag{33}$$

Різницю потенціалів $\Phi_0(\xi,\theta)-\Phi_0(0,0)$ розраховують інтегруванням за об'ємом політропи з індексом n. Використовучи розклад ядра $Q(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^{'})$ за поліномами Лежандра та інтегруючи за змінними $-1\le t^{'}\le 1$, $0\le\xi^{'}\le\xi_0(t^{'})$, де $\xi_0(t^{'})$ є коренем рівняння $Y_n(\xi,\theta)=0$ при заданому θ і визначає рівняння поверхні політропи із заданим n. Таким шляхом одержуємо співвідношення

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(\xi,\theta)-\Phi_0(0,0) = \frac{\xi^2}{6}+\frac{\xi^2}{2}\,P_2(t)I_2+\sum_{l=2}^{\infty}P_{2l}(t)\,\xi^{2l}I_{2l},\\
&I_2 = -\int_{-1}^{+1}P_2(t^{'})\,\ln\xi_0(t^{'})\,dt^{'},\\
&I_{2l} = (l-1)^{-1}\,\frac{1}{4}\int_{-1}^{+1}P_{2l}(t^{'})\,[\xi_0(t^{'})]^{2-2l}dt^{'}\quad \text{при}\quad l\ge 2.
\end{aligned} \tag{34}$$

Підставляючи розклад (34) у рівняння (33), знаходимо, що

$$C_2 = -\frac{\Omega^2}{6}\,(1+3I_2),\quad C_{2l} = -\Omega^2 I_{2l}\qquad \text{при}\quad l\ge 2. \tag{35}$$

В результаті інтегральне рівняння (27) набуває вигляду

$$Y_n(\xi,\theta) = 1+\frac{\Omega^2\xi^2}{6}\,(1-P_2(t))+\frac{1}{4\pi}\int Y_n^n(\xi^{'},\theta^{'})\,Q(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^{'})\,d\boldsymbol{\xi}^{'}. \tag{36}$$

Система рівнянь (21) і (36) є замкнутою, вона не потребує жодної додаткової інформації і визначає загальний розв'язок $Y_n(\xi, \theta)$, що відповідає умовам у центрі і на поверхні конфігурації. Ми розв'язуємо цю систему самоузгодженим способом, який коректно описує поверхню політропи, на відміну від робіт [7, 8, 12]. У нашій роботі [20] для спрощення розрахунків використано апроксимацію, за якої поверхня політропи є поверхнею еліпсоїда обертання із заданими ексцентриситетом e і екваторіальним радіусом ξ_e, які визначаються самоузгоджено. У такому наближенні

$$\xi_0(t) = \xi_e \left\{1 + t^2\, \frac{e^2}{1-e^2}\right\}^{-1/2}, I_2 = I_2(e) = \frac{2}{3} + \frac{1-e^2}{e^2} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin e, \tag{37}$$
$$I_{2l} = 0 \text{ при } l \geq 2.$$

Однак така апроксимація є лише одним з можливих наближених варіантів розрахунку. Хоча при цьому одержуються досить добрі результати в усій області зміни кутової швидкості ($0 \leq \Omega \leq \Omega^{(n)}_{\max}$), при значеннях Ω, близьких до $\Omega^{(n)}_{\max}$, поверхня політропи насправді дещо відрізняється від поверхні еліпсоїда. Цей парадокс пояснюють тим, що в околі поверхні густина речовини є малою, пропорційною $Y_n^n(\xi, \theta)$ і тому використання співвідношень (35) дає малу похибку.

4. Модель Р. Емдена

Як видно з результатів робіт [7–9], максимальні значення параметра $[\Omega^{(n)}_{\max}]^2$ є суттєво меншими за одиницю, тому обертання відіграє роль поправки під час розрахунків характеристик політроп. Вплив обертання найсильніше проявляється на зміні геометричних параметрів політроп, але й вони не перевищують 40%. Через те нульовим наближенням рівняння (21) є рівняння Емдена [4]

$$\Delta_\xi\, y_n(\xi) \;=\; -y_n^n(\xi), \tag{38}$$

яке описує модель політропи без обертання зі сферичною симетрією розподілу речовини. Рівнянню (38) відповідають граничні умови $y_n(0) = 1$, $dy_n/d\xi = 0$ при $\xi = 0$, а також умова $y_n(\xi) \geq 0$. Інтегруючи за кутовими змінними ядра $Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^{'})$, рівняння (36) при $\Omega = 0$ трансформуємо до такої форми:

$$y_n(\xi) = 1 + \int\limits_0^{\xi} \left\{\frac{(\xi^{'})^2}{\xi} - \xi^{'}\right\} y_n^n(\xi^{'})\, d\xi^{'}. \tag{39}$$

Властивості розв'язків рівнянь (38), (39) ілюструються відомими аналітичними виразами при $n = 0, 1$ і 5 [21]

$$\begin{aligned} y_0(\xi) \;&=\; 1 - \xi^2/6, \quad \xi_1(0) = \sqrt{6}; \\ y_1(\xi) \;&=\; \frac{\sin\xi}{\xi}, \quad \xi_1(1) \;=\; \pi; \\ y_5(\xi) &= \left\{1 + \xi^2/3\right\}^{-1/2}, \quad \xi_1(5) \;=\; \infty. \end{aligned} \tag{40}$$

Тут $\xi_1(n)$ – безрозмірний радіус політропи, найменший корінь рівняння $y(\xi) = 0$ для заданого індекса n. Умова

$$\int_0^{\xi_1(n)} y_n^n(\xi) \left(\xi - \frac{\xi^2}{\xi_1(n)}\right) d\xi \; = \; 1 \tag{41}$$

є своєрідною умовою нормування. Через те, що підінтегральна функція $y_n(\xi)$ є спадною додатною функцією ξ, з рівності (41) $\xi_1(n)$ є монотонно зростаючою функцією індекса n. Залежність функцій $y_n(\xi)$ від індекса n ілюструють криві рис. 1, розраховані чисельно. Це знакозмінні, або ж осцилюючі функції, які мають фізичний сенс

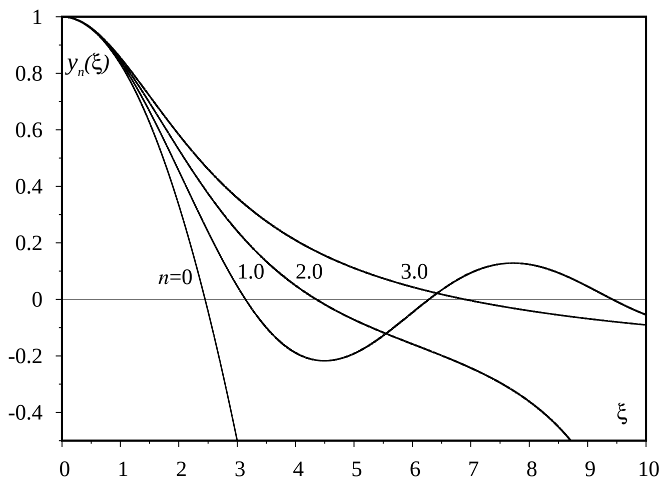

Рис. 1: Розв'язки рівняння Емдена для індекса політропи $0 \leq n \leq 3.0$

в області $0 \leq \xi \leq \xi_1(n)$, причому індекс політропи може неперервно змінюватися в області $0 \leq n \leq 5$. В області малих значень змінної ξ функції Емдена зображають розкладом

$$y_n(\xi) = 1 - \frac{1}{3!}\,\xi^2 + \frac{n}{5!}\,\xi^4 - \frac{n(8n-5)}{3 \cdot 7!}\,\xi^6 \; + \ldots, \tag{42}$$

з якого видно, що з точністю до ξ^2 асимптотика функцій $y_n(\xi)$ є однаковою, що підтверджує умову (24). Наведемо тут основні макроскопічні характеристики зорі-політропи в моделі Р. Емдена. Маса

$$\begin{aligned} M(n,0) &= \int_V \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 4\pi\, \lambda_n^3\, \rho_c\, \beta_2(n), \\ \beta_2(n) &= \int_0^{\xi_1(n)} \xi^2 y_n^n(\xi)\, d\xi = \xi_1^2(n) \left|\frac{dy_n}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1(n)}; \end{aligned} \tag{43}$$

об'єм зорі і радіус її

$$V(n,0) = \frac{4\pi}{3}\,\big(\lambda_n\xi_1(n)\big)^3, \quad R(n,0) = \lambda_n\xi_1(n); \tag{44}$$

момент інерції відносно осі обертання

$$I(n,0) = \frac{8\pi}{3}\,\rho_c\,\lambda_n^5\,\beta_4(n), \quad \beta_4(n) = \int\limits_0^{\xi_1(n)} \xi^4\,y_n^n(\xi)\,d\xi. \tag{45}$$

Гравітаційна енергія

$$W(n,0) = -\frac{G}{2}\int \rho(\mathbf{r}_1)\,d\mathbf{r}_1 \int \rho(\mathbf{r}_2)\,|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^{-1}d\mathbf{r}_2 \tag{46}$$

після інтегрування за кутовими змінними, переходу до безрозмірних змінних та використання рівняння (38) зводиться до такого виразу:

$$\begin{aligned} &W(n,0) = -48\,\lambda_n^5\,\pi^2 G\,\rho_c^2\frac{1}{1+n}\,J_n,\\ &J_n = \int\limits_0^{\xi_1(n)} \xi^2 y_n^{n+1}(\xi)\,d\xi = \frac{n+1}{(5-n)\,\xi_1(n)}\,\beta_2^2(n), \quad n<5.0. \end{aligned} \tag{47}$$

За відомим розв'язком $y_5(\xi)$ (див. (40)) $W(5,0)$ можна розрахувати в аналітичному вигляді, звідки $J_n \to \pi\,3^{3/2}/16$ при $n\to 5$.

З термодинаміки відомо, що в однорідній системі в разі політропної залежності тиску від густини речовини об'ємна густина внутрішньої енергії пов'язана з тиском співвідношенням

$$\mathcal{E}(\rho) \;=\; n\,P(\rho). \tag{48}$$

Застосувавши це співвідношення до неоднорідної системи в локальному наближенні, знаходимо повну внутрішню енергію зорі-політропи

$$\begin{aligned} U(n,0) &= \int \mathcal{E}(\rho(r))\,d\mathbf{r} = 4\pi\,n\,K\,\rho_c^{1+1/n}\int\limits_0^R dr\,r^2\,y_n^{n+1}(r/\lambda_n) \;=\\ &=\;16\pi^2 G\,\rho_c^2\,\lambda_n^5\,\frac{n}{(5-n)\,\xi_1(n)}\,\beta_2^2(n). \end{aligned} \tag{49}$$

З урахуванням (47) повна енергія дорівнює

$$E(n,0) = W(n,0)+U(n,0) = 16\pi^2 G\,\lambda_n^5\,\frac{n-3}{(5-n)\,\xi_1(n)}\,\beta_2^2(n). \tag{50}$$

Звідси доходимо висновку, що в однофазній моделі зоря-політропа є стійкою при $n\le 3$.

В табл. 1 наведено залежність параметрів $\xi_1(n)$, $\beta_2(n)$, $\beta_4(n)$ від індекса політропи ($0\le n\le 3$). Згідно з формулами (43), (45) масу і момент інерції політропи з

Табл. 1: Параметри політропних моделей Емдена.

n	0	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$\xi_1(n)$	2,4495	2,5921	2,7527	3,1416	3,6538	4,3529	5,3553	6,8969
$\beta_2(n)$	4,8990	4,2579	3,7887	3,1416	2,7141	2,4111	2,1872	2,0182
$\beta_4(n)$	17,6371	15,5178	14,0352	12,1567	11,1197	10,6110	10,5197	10,8516

індексом n за наявності обертання зображають у вигляді

$$M(n|\Omega) = M(n|0)\,\eta(n|\Omega), \quad I(n|\Omega) = I(n|0)\,\zeta(n|\Omega), \tag{51}$$

де

$$\eta(n|\Omega) = (2\beta_2(n))^{-1} \int_{-1}^{1} dt \int_{0}^{\xi_0(t)} \xi^2\, Y_n^n(\xi,\theta)\, d\xi,$$

$$\zeta(n|\Omega) = \left(\frac{4}{3}\beta_4(n)\right)^{-1} \int_{-1}^{1} dt\,(1-t^2) \int_{0}^{\xi_0(t)} \xi^4\, Y_n^n(\xi,\theta)\, d\xi.$$

Тут $\xi_0(t)$ визначає поверхню політропи для заданого значення індекса n.

5. Розв'язки рівнянь рівноваги для зір з осьовим обертанням

Рівняння (21), (36) є двовимірними, двопараметричними і нелінійними загалом, оскільки індекс n може приймати довільні значення з проміжку $(0\div 5)$. Через це їхні розв'язки можна знайти лише чисельним методом. Для ілюстрації характеру цих розв'язків звичайно є розв'язки за певних фіксованих значеннях індекса політропи, як і розв'язки рівняння Емдена (38), або (39). У випадках $n = 0$, $n = 1$ рівняння (21), (36) є лінійними, що дає змогу знаходити загальні розв'язки в аналітичному вигляді.

5.1 Політропа $n = 0$

Беручи до уваги співвідношення (34), розв'язок рівняння (36) запишемо у вигляді

$$Y_0(\xi,\theta) = y_0(\xi) + \frac{\Omega^2\xi^2}{6} - P_2(t)\,\frac{\xi^2}{6}\,(\Omega^2 + 3I_2) - \sum_{l\geq 2} \xi^{2l} P_{2l}(t)\, I_{2l}, \tag{52}$$

де $y_0(\xi) = 1 - \xi^2/6$ є функція Емдена для політропи $n = 0$. Коефіцієнти I_2 та I_{2l} можна розрахувати самоузгодженим способом, методом послідовних наближень. Нехтуючи коефіцієнтами I_{2l} при $l \geq 2$, одержуємо нульове наближення для рівняння поверхні політропи

$$\xi_0^{(0)}(\theta) = 6^{1/2}\{1 - \Omega^2\,(1 - P_2(t)) + 3P_2(t)\, I_2\}^{-1/2}. \tag{53}$$

Це рівняння описує поверхню еліпсоїда обертання. Визначаючи з формули (53) полярний $\xi_p^{(0)}$ та екваторіальний $\xi_e^{(0)}$ радіуси, за співвідношенням $1 - e_0^2 = [\xi_p^{(0)}/\xi_e^{(0)}]^2$ одержуємо рівняння для ексцентриситету

$$e_0^2 + \left[3e_0^2 - \frac{9}{2}\right] I_2 = \frac{3}{2}\,\Omega^2, \tag{54}$$

відоме як формула Маклорена [22], що визначає залежність ексцентриситету від кутової швидкості Ω. При цьому $I_2 \equiv I_2(e_0)$ визначено співвідношенням (35), через те

$$\begin{aligned} \xi_0^{(0)}(\theta) &= \xi_e^{(0)}(\Omega)\,\left\{1 + \frac{e_0^2(\Omega)}{1 - e_0^2(\Omega)}\,t^2\right\}^{-1/2}, \\ \xi_e^{(0)}(\Omega) &= 6^{1/2}\,\left\{1 - \frac{3}{2}\big[\Omega^2 + I_2(\Omega)\big]\right\}^{-1/2}, \end{aligned} \tag{55}$$

де $I_2(\Omega) \equiv I_2(e_0(\Omega))$, $t = \cos\theta$. Залежність функцій $e_0(\Omega)$ та $I_2(\Omega)$ від кутової швидкості ілюструють рис. 2 і 3. Згідно зі співвідношенням (37) за малих значень ексцен-

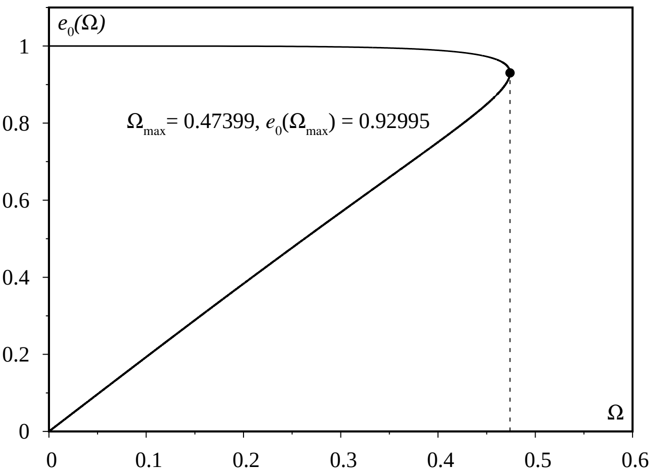

Рис. 2: Залежність ексцентриситету $e_0(\Omega)$ від кутової швидкості Ω

триситету $I_2(e) = 2e^2/15 + 8e^4/105 + \ldots$. У цьому наближенні з формули Маклорена робимо висновок, що при малих кутових швидкостях $e^2 = 15\Omega^2/4 + \ldots$, а через те

$$I_2(\Omega) = \frac{1}{2}\,\Omega^2 + \frac{45}{56}\,\Omega^4 + \ldots. \tag{56}$$

З рис. 2 видно, що ексцентриситет є неоднозначною функцією кутової швидкості. Максимальне значення кутової швидкості $\Omega_{\max} = 0,47399\ldots$, за якого настає нестабільність, відповідає ексцентриситету $e(\Omega_{\max}) = 0,92995\ldots$. У наближенні (55) полярний радіус

$$\xi_p^{(0)}(\Omega) = 6^{1/2}\{1 + 3I_2(\Omega)\}^{-1/2}. \tag{57}$$

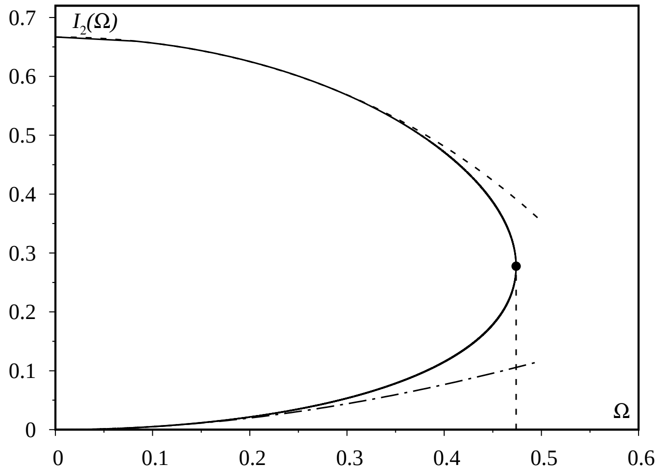

Рис. 3: Залежність функції $I_2(\Omega)$ від кутової швидкості Ω. Штрих-пунктирна крива відповідає малим швидкостям за малих значень ексцентриситету, штрихова – малим швидкостям при великих значеннях ексцентриситету

В області великих значень ексцентриситету ($e(\Omega_{\max}) \le e \le 1$) і малих кутових швидкостей

$$I_2(\Omega) \approx \frac{2}{3} - \Omega^2 - \Omega^4 + \ldots, \tag{58}$$

що призводить до асимптотики

$$\xi_e^{(0)}(\Omega) \to \frac{2}{\Omega^2} + \ldots \quad \xi_p^{(0)}(\Omega) \to \sqrt{2}, \tag{59}$$

яка відповідає диску сталої товщини і великого радіуса. Залежність $\xi_e^{(0)}(\Omega)$ і $\xi_p^{(0)}(\Omega)$ від кутової швидкості показує рис. 4. Розрахувавши коефіцієнти $I_2(\Omega)$ та $I_4(\Omega)$ за формулами (34) у наближенні (55), знаходимо перше наближення $\xi_0^{(1)}(\theta)$ у вигляді

$$\xi_0^{(1)}(\theta) = \xi_0^{(0)}(t) \left[\frac{\left\{ 1 + 4P_4(t) I_4 \left[\xi_0^{(0)}(\theta) \right]^4 \right\}^{1/2} - 1}{2P_4(t) I_4(\Omega) [\xi_0^{(0)}(\theta)]^4} \right]^{1/2}. \tag{60}$$

Врахування вищих поправок до $\xi_0^{(0)}(\theta)$ можна виконати чисельним методом, розраховуючи чисельно корінь рівняння

$$1 - \xi^2 \left(\xi_0^{(0)}(\theta) \right)^{-2} - \sum_{l \ge 2} \xi^{2l} \, P_{2l}(t) \, I_{2l}(\Omega) = 0 \tag{61}$$

після попереднього обчислення коефіцієнтів $I_{2l}(\Omega)$ у наближенні $\xi_0^{(0)}(\theta)$. Звичайно, що внески $I_{2l}(\Omega)$ при $l \ge 2$ є малими, але поверхня політропи відхиляється

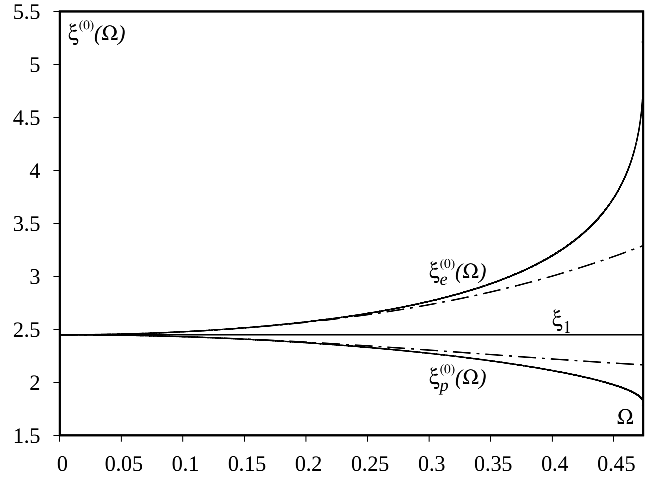

Рис. 4: Залежність екваторіального $\xi_e^{(0)}(\Omega)$ та полярного $\xi_p^{(0)}(\Omega)$ радіусів від швидкості обертання Ω (штрих-пунктирні криві відповідають наближенню малих швидкостей)

від поверхні еліпсоїда обертання. Характерними елементами поверхні є $\xi_{\max}(\Omega) \equiv \xi_0(\pi/2, \Omega)$ та $\xi_{\min}(\Omega) = \xi_0(0, \Omega)$.

Модель з індексом $n = 0$ відповідає нестисливій речовині, що має густину ρ_c. Тому зміни маси та об'єму моделі під впливом обертання визначаються формулами

$$M(0,\Omega) = M(0,0)\, f(\Omega), \quad V(0,\Omega) = V(0,0)\, f(\Omega),$$
$$f(\Omega) \;=\; \xi_1^{-3}(0) \int\limits_0^1 \xi_0^3(\theta)\, dt, \tag{62}$$

де $M(0,0)$ і $V(0,0)$ є масою та об'ємом моделі Емдена, $\xi_1(0) = \sqrt{6}$ є безрозмірним радіусом цієї моделі.

5.2 Політропа $n = 1$

Ця модель посідає важливе місце в загальній теорії, бо на ній вдається відпрацювати наближені методи знаходження розв'язків рівняння (21) для довільного n.

За допомогою підстановки

$$Y_1(\xi,\theta) = y_1(\xi) + \Omega^2 \left\{\varphi(\xi,\theta) + \frac{\xi^2}{4}\,\sin^2\theta\right\}, \tag{63}$$

де $y_1(\xi) = \sin\xi/\xi$ – функція Емдена для $n = 1$, рівняння (21) зводиться до рівняння для функції $\varphi(\xi,\theta)$, яке не залежить від параметра Ω:

$$\Delta(\xi,\theta)\,\varphi(\xi,\theta) \;+\; \varphi(\xi,\theta) \;=\; -\frac{1}{4}\,\xi^2 \sin^2\theta. \tag{64}$$

Розв'язок відповідного однорідного рівняння, в якому змінні можна розділити, представимо у вигляді

$$\varphi(\xi,\theta) \ = \ \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{2l}\, j_{2l}(\xi)\, P_{2l}(t), \tag{65}$$

де

$$j_{2l}(\xi) = \xi^{2l} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{\xi^2}{2}\right)^s \{[4l+1+2s]!!\}^{-1} \tag{66}$$

є сферичні функції Бесселя першого роду [23], $P_{2l}(t)$ – поліноми Лежандра від $t = \cos\theta$, α_{2l} – сталі інтегрування.

Частковий розв'язок рівняння (64) представимо у вигляді

$$\varphi_{\text{част}}(\xi,\theta) \ = \ \sum_{l=2}^{\infty} b_{2l}\, [\xi \sin\theta]^{2l}. \tag{67}$$

Підставляючи цей розклад у рівняння (64) і використовуючи рівність

$$\Delta(\xi,\theta)\, \{\xi\sin\theta\}^{2l} = (2l)^2 \{\xi\sin\theta\}^{2l-2}, \tag{68}$$

відшукуємо коефіцієнти

$$b_{2l} \ = \ (-1)^{l-1}\, 2^{-2l}\, (e!)^{-2}. \tag{69}$$

Через це

$$\frac{1}{4}\,\xi^2 \sin^2\theta + \varphi_{\text{част}}(\xi,\theta) \ = \ 1 - J_0(\xi\sin\theta), \tag{70}$$

де

$$J_0(z) \ = \ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{z^2}{4}\right)^i (i!)^{-2} \ - \tag{71}$$

функція Бесселя цілого (нульового) порядку [23]. Так розв'язок рівняння (21) при $n = 1$ набуває вигляду

$$Y_1(\xi,\theta) = j_0(\xi) + \Omega^2 \left\{ 1 - J_0(\xi\sin\theta) + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{2l}\, j_{2l}(\xi)\, P_{2l}(t) \right\}. \tag{72}$$

Функція $J_0(\xi\sin\theta)$ має такий розклад за поліномами Лежандра [23]:

$$J_0(\xi[1-t^2]^{1/2}) = \sum_{l=0}^{\infty} D_{2l}\, j_{2l}(\xi)\, P_{2l}(t), \quad D_{2l} = (4l+1)(2l)!\, 2^{-2l} (l!)^{-2}. \tag{73}$$

Через те розв'язок (68) запишемо також у вигляді звичайного розкладу за ортогональними функціями

$$\tilde{Y}_1(\xi,\theta) = j_0(\xi) + \Omega^2 \left\{ 1 - j_0(\xi) + \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}\, j_{2l}(\xi)\, P_{2l}(t) \right\}, \tag{74}$$

де a_{2l} є новими сталими інтегрування ($a_{2l} = \alpha_{2l} - D_{2l}$). Представлення (72) і (74) є цілком еквівалентними. Насправді під час практичних розрахунків необхідно обмежуватися врахуванням скінченного числа доданків ($1 \leq l \leq l_0$), тому розраховані характеристики політропи дещо відрізняються між собою. Представлення (72) можна розглядати як результат вибіркового підсумовування ряду (74). Зазначимо, що $J_0(z)$ має досить точні аналітичні апроксимації [23], а

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} J_0\Big(z[1-t^2]^{1/2}\Big)\, dt = j_0(z). \tag{75}$$

Використовуючи співвідношення (24) і прирівнюючи між собою асимптотики функцій (52) і (74) при $\xi \ll 1$ (з точністю до ξ^2), знаходимо, що

$$a_2(\Omega) \;=\; -\frac{5}{2}\left\{1 + \frac{3}{\Omega^2}\, I_2(\Omega)\right\}, \tag{76}$$

де $I_2(\Omega)$ відповідає політропі з індексом $n = 0$ і є двозначною функцією Ω. Тому в області малих кутових швидкостей і малих ексцентриситетів згідно з виразом (56)

$$a_2(\Omega) = -\frac{25}{4}\,\left\{1 + \frac{27}{28}\,\Omega^2 + \ldots\right\}. \tag{77}$$

В області малих кутових швидкостей і ексцентриситетів, близьких до одиниці,

$$\Omega^2 a_2(\Omega) \;\to\; -5\,(1 - \Omega^2 + \ldots). \tag{78}$$

Якщо обмежитися наближенням $a_{2l} = 0$ при $l \geq 2$ у розкладі (74), то в режимі (77) поверхня політропи є поверхнею еліпсоїда обертання, близького до сфери Емдена. Натомість в режимі (78) поверхня політропи є поверхнею сильно стиснутого еліпсоїда обертання, що свідчить про формування дискової структури. Граничні форми меридіонального перерізу поверхні політропи з індексом $n = 1$ при малих кутових швидкостях, що відповідають формулам(77) і (78), зображено на рис. 5.

Оскільки $Y_1(\xi, \theta)$ у формі (72) чи (74) є розв'язком рівняння (36) при $n = 1$, то це дає альтернативну можливість для визначення сталих інтегрування. Покажемо це на прикладі розкладу (74). Підставляючи його у рівняння (36), зведемо останнє до такого вигляду:

$$\begin{aligned}
&(1-\Omega^2)\, j_0(\xi) + \Omega^2 \sum_{l\geq 1} a_{2l}\, j_{2l}(\xi)\, P_{2l}(t) = 1 - \Omega^2 - \Omega^2\{\Phi_0(\xi,\theta) - \Phi_0(0,0)\} + \\
&+\; \frac{1}{4\pi}\,(1-\Omega^2) \int Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}')\, j_0(\boldsymbol{\xi}')\, d\boldsymbol{\xi}' + \frac{\Omega^2 \xi^2}{6}\,(1 - P_2(t)) + \\
&+\; \frac{1}{4\pi}\,\Omega^2 \sum_{l\geq 1} a_{2l} \int Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}')\, j_{2l}(\boldsymbol{\xi}')\, P_{2l}(t')\, d\boldsymbol{\xi}'.
\end{aligned} \tag{79}$$

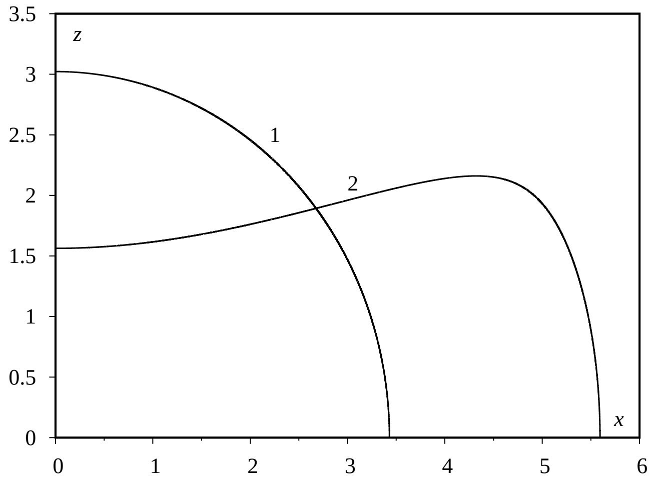

Рис. 5: Меридіональний переріз поверхні політропи з індексом $n = 1$ при фіксованому значенні кутової швидкості $\Omega = 0,2$. Крива 1 відповідає наближенню (77), крива 2 – наближенню (78).

Інтегрування за вектором $\boldsymbol{\xi}^{'}$ проводиться за об'ємом політропи. Через це

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int Q(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^{'})\,j_0(\boldsymbol{\xi}^{'})\,d\boldsymbol{\xi}^{'} &= \int\limits_0^{\xi} j_0(\boldsymbol{\xi}^{'})\,\left\{\frac{(\xi^{'})^2}{\xi} - \xi^{'}\right\}\,d\xi^{'} + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{l\geq 1} P_{2l}(t)\,\xi^{2l}\int\limits_{-1}^{+1} P_{2l}(t^{'})\int\limits_{\pi}^{\xi_0(t^{'})} j_0(\xi^{'})(\xi^{'})^{1-2l} d\xi^{'},\end{aligned} \tag{80}$$

де $\xi_0(t^{'})$ визначає рівняння поверхні політропи. Беручи до уваги, що $j_0(\xi)$ задовольняє рівняння (39), і співвідношення (34), перепишемо рівність (79) у такій формі:

$$\begin{aligned}\sum_{l\geq 1} a_{2l}\,j_{2l}(\xi)\,P_{2l}(t) &= -P_2(t)\,\frac{\xi^2}{6}\,(1+3I_2) - \sum_{l\geq 2} P_{2l}(t)\,\xi^{2l} I_{2l} + \\ &+ \sum_{l\geq 1} L_{2l}\,\xi^{2l} P_{2l}(t) + \frac{1}{4\pi}\sum_{l\geq 1} a_{2l}\int Q(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^{'})\,j_{2l}(\boldsymbol{\xi}^{'})\,P_{2l}(t^{'})\,d\boldsymbol{\xi}^{'}.\end{aligned} \tag{81}$$

При цьому I_{2l} визначено формулами (34), а

$$L_{2l} = \frac{\Omega^{-2}}{2}\int\limits_{-1}^{+1} P_{2l}(t^{'})\int\limits_{\pi}^{\xi_0(t^{'})} j_0(\xi^{'})(\xi^{'})^{1-2l}\,d\xi^{'} dt^{'}. \tag{82}$$

Як зазначено, у наближенні (37) коефіцієнти $I_{2l} = 0$ при $l \geq 2$. Однак L_{2l} і в цьому наближенні відмінні від нуля, хоча в наших попередніх публікаціях [19, 20] їх не брались до уваги, як і I_{2l}.

Розрахунок останнього члена у правій стороні рівності (81) здійснюється шляхом розкладу ядра $Q(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^{'})$ за поліномами Лежандра,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int Q(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^{'})\, j_{2l}(\xi^{'}) P_{2l}(t^{'}) d\boldsymbol{\xi}^{'} = P_{2l}(t)(4l+1)^{-1}\xi^{-1-2l}\int\limits_{0}^{\xi}(\xi^{'})^{2+2l} j_{2l}(\xi^{'})\, d\xi^{'} + \\ + \frac{1}{2}\, P_{2l}(t)\, \xi^{2l}\int\limits_{-1}^{+1} P_{2l}^{2}(t^{'})\, dt^{'}\int\limits_{\xi}^{\xi_0(t^{'})} j_{2l}(\xi^{'})\, (\xi^{'})^{1-2l} d\xi^{'} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} P_{2m}(t)\, \xi^{2m}(1-\delta_{m,l})\int\limits_{-1}^{+1} dt^{'} P_{2l}(t^{'})\, P_{2m}(t^{'})\int\limits_{\pi}^{\xi_0(t^{'})} j_{2l}(\xi^{'})(\xi^{'})^{1-2m}\, d\xi^{'},\end{aligned} \tag{83}$$

де $\delta_{m,l}$ – символ Кронекера, а $\xi_0(t^{'})$ визначає рівняння поверхні. Інтегрування за змінною $\xi^{'}$ у перших двох членах правої сторони рівності (83) виконується в аналітичній формі,

$$\begin{aligned}&\xi^{-1-2l}\int\limits_{0}^{\xi}(\xi^{'})^{2+2l} j_{2l}(\xi^{'})\, d\xi^{'} = \xi\, j_{2l+1}(\xi); \\ &\int\limits_{\xi}^{\xi_0} j_{2l}(\xi^{'})\, (\xi^{'})^{1-2l} d\xi^{'} = -\xi_0^{1-2l} j_{2l-1}(\xi_0) + \xi^{1-2l} j_{2l-1}(\xi),\end{aligned} \tag{84}$$

де $\xi_0 \equiv \xi_0(t^{'})$. Враховуючи співвідношення

$$j_{2l}(\xi) = [4l+1]^{-1}\xi\,\{j_{2l+1}(\xi)\ +\ j_{2l-1}(\xi)\}, \tag{85}$$

бачимо, що суму перших двох доданків правої сторони рівності (83) можна записати у вигляді

$$P_{2l}(t) j_{2l}(\xi) - P_{2l}(t)\, \xi^{2l}\left\{\int\limits_{0}^{1} P_{2l}^{2}(t^{'})\, \xi_0^{1-2l}(t^{'})\, j_{2l-1}(\xi_0(t^{'}))\, dt^{'}\right\}. \tag{86}$$

Як наслідок члени рівняння (81), в яких явно фігурують $j_{2l}(\xi)$, взаємно компенсуються і залишаються лише члени типу $\xi^{2l}P_{2l}(t)$, $\xi^{2m}P_{2m}(t)$.

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових добутків $\xi^{2l}P_{2l}(t)$ у рівнянні (81), одержуємо систему лінійних неоднорідних алгебричних рівнянь для сталих інтегрування a_{2l}:

$$\begin{aligned}&a_2 S_{2,2} + a_4 S_{2,4} + \ldots + a_{2l_0} S_{2,2l_0} = -\frac{1}{6}\,(1+3I_2) +\ L_2, \\ &a_2 S_{4,2} + a_4 S_{4,4} + \ldots + a_{2l_0} S_{4,2l_0} =\ L_4 - I_4; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_2 S_{2l_0,2} + a_4 S_{2l_0,4} + \ldots + a_{2l_0} S_{2l_0,2l_0} =\ L_{2l_0} - I_{2l_0}.\end{aligned} \tag{87}$$

Елементи матриці $S_{2m,2l}$ визначені співвідношеннями

$$\begin{aligned} S_{2l,2l} &= \int\limits_0^1 P_{2l}^2(t)\, \xi_0^{1-2l} j_{2l-1}(\xi_0)\, dt; \\ S_{2m,2l} &= -\int\limits_0^1 P_{2m}(t)\, P_{2l}(t)\, dt \int\limits_\pi^{\xi_0} (\xi^{'})^{1-2m} j_{2l}(\xi^{'})\, d\xi^{'}. \end{aligned} \tag{88}$$

Після інтегрування за змінною $\xi^{'}$ недіагональні елементи зводяться до однократних інтегралів:

$$\begin{aligned} S_{2,4} &= \int\limits_0^1 P_2(t)P_4(t)\xi_0^{-1}\{j_3(\xi_0) + 2\xi_0^{-1} j_2(\xi_0)\}dt, \\ S_{2,6} &= \int\limits_0^1 P_2(t)P_6(t)\xi_0^{-1}\{j_5(\xi_0) + 4\xi_0^{-1} j_4(\xi_0) + 8\xi_0^{-2} j_3(\xi_0)\}dt. \end{aligned} \tag{89}$$

За малих значень кутової швидкості у нульовому наближенні у виразах (88), (89) досить замінити $\xi_0(t)$ на безрозмірний радіус Емдена $\xi_1 = \pi$, внаслідок чого

$$\begin{aligned} &S_{2l,2l} \Rightarrow S_{2l,2l}^{(0)} = (4l+1)^{-1} \xi_1^{1-2l}\, j_{2l-1}(\xi_1); \\ &S_{2l,2m} \Rightarrow S_{2l,2m}^{(0)} = 0 \qquad \text{при} \quad l \neq m. \end{aligned} \tag{90}$$

У такому наближенні $I_{2l} = L_{2l} = 0$ при $l \geq 1$,

$$a_2^{(0)} \;=\; -\frac{5}{6}\,\pi^2; \quad a_{2l}^{(0)} \;=\; 0 \qquad \text{при} \quad l \geq 2, \tag{91}$$

що збігається з результатом роботи [8]. У цій роботі наближений розв'язок рівняння рівноваги представлено у вигляді

$$Y_1^{\rm Ch}(\xi, \theta) \;=\; y_1(\xi) + \Omega^2\{\psi_0(\xi) + a_2\, P_2(t)\, \psi_2(\xi)\}, \tag{92}$$

а сталу інтегрування a_2 знайдено за методом Мілна [7] з умови неперервності гравітаційного потенціалу на поверхні Емдена $\xi = \xi_1(1) = \pi$. При цьому функції $\psi_0(\xi)$ і $\psi_2(\xi)$ знайдено чисельним інтегруванням відповідних лінійних диференціальних рівнянь в $0 \leq \xi \leq \xi_1(1)$. Рівняння поверхні політропи знайдено з умови $Y_1^{\rm Ch}(\xi,\theta) = 0$, яка при $y_1(\xi_1) = 0$ набуває вигляду

$$(dy_1/d\xi)_{\xi=\xi_1}(\xi_0 - \xi_1) + \Omega^2\{\psi_0(\xi_1) + a_2\, \psi_2(\xi_1)\, P_2(t)\} \;\simeq\; 0. \tag{93}$$

Згідно з формулою (73) $\psi_0(\xi_1) = 1 - j_0(\xi_1) = 1,\ \psi_2(\xi_1) = j_2(\xi_1) = 3/\pi^2$, тому [8]

$$\xi_0(t) \;\approx\; \pi \left\{1 + \Omega^2 \left[1 - \frac{5}{2}\, P_2(t)\right]\right\}. \tag{94}$$

У роботі [20] ми розв'язували систему рівнянь (87) методом чисельних ітерацій при $l_0 = 3$. При цьому інтегрування за об'ємом політропи проводили у межах еліпсоїда обертання (див. (37)) з деяким ексцентриситетом і екваторіальним радіусом, які відшукували самоузгоджено. У нульовій ітерації a_{2l} вибирали у вигляді (91). У рамках i-ої ітерації

$$Y_1^{(i)}(\xi,\theta) = j_0(\xi) + \Omega^2 \left\{ 1 - j_0(\xi) + \sum_{l=1}^{3} a_{2l}^{(i)}\, P_{2l}(t)\, j_{2l}(\xi) \right\}, \qquad (95)$$

екваторіальний $\xi_e^{(i)}(\Omega)$ і полярний $\xi_p^{(i)}(\Omega)$ радіуси визначали чисельно з умови $Y_1^{(i)}(\xi,\theta) = 0$, а ексцентриситет – з умови $e_i(\Omega) = \{1 - [\xi_p^{(i)}(\Omega)/\xi_e^{(i)}(\Omega)]^2\}^{1/2}$. Коефіцієнти матриці $S_{2l,2l}^{(i)}$, $S_{2l,2m}^{(i)}$ визначались за формулами (88) при $\xi_0^{(i)}(t) = \xi_e^{(i)}(\Omega)\{1 + t^2 e_i^2(\Omega)\,[1 - e_i^2(\Omega)]^{-1}\}^{-1}$ і використовувались для подальшої ітерації. Знайдені таким способом $a_{2l}(\Omega)$ для деякого значення Ω_1 використовувались як нульове наближення для $\Omega_2 = \Omega_1 + \Delta\Omega$. При цьому було знехтувано коефіцієнтами L_{2l} у рівняннях (87), а $I_{2l} = 0$ при $l \geq 2$ з огляду на наближення моделі еліпсоїда обертання. Результати розрахунків залежності екваторіального і полярного радіусів, ексцентриситету, маси і моменту інерції політропи від кутової швидкості наведено у таблиці 2. Зазначимо, що використаний алгоритм застосовний до опису типово еліпсоїдальних конфігурацій, для яких характерні не дуже великі ексцентриситети. З таблиці видно, що максимальне значення кутової швидкості $\Omega_{\max}(1)$ приблизно дорівнює $0.24607\ldots$, а ексцентриситет змінюється в межах $0 \leq e \leq 0,78685\ldots$. Обертання призводить до відносного збільшення екваторіального радіуса, що не перевищує 41%, а відносне зменшення полярного радіуса не перевищує 14,3%. Збільшення загальної маси за рахунок обертання не перевищує 26%, зате момент інерції відносно осі обертання зростає майже удвічі. Як видно з таблиці, врахування доданків $a_{2l}\, P_{2l}(t)\, j_{2l}(\xi)$ при $l \geq 2$ є несуттєвим в області $0 < \Omega \leq 1/3\,\Omega_{\max}(1)$, що визначає область застосування результатів робіт [7, 8] та ін. Зазначимо також, що ряд (74) є знакозмінним, що свідчить на користь його збіжності, хоча в області $2/3\,\Omega_{\max}(1) < \Omega < \Omega_{\max}(1)$ коефіцієнти $a_2(\Omega)$, $a_4(\Omega)$, $a_6(\Omega)$ за модулем співмірні між собою.

У табл. 3 наведено результати розрахунків характеристик політропи з $n = 1$ як функцій кутової швидкості при врахуванні коефіцієнтів L_{2l} (див. (82)) у наближенні $a_{2l} = 0$ при $l \geq 3$. У цьому наближенні максимальне значення кутової швидкості становить приблизно $0,291\ldots$, що дуже близьке до результату роботи [9], в якій виконано чисельне інтегрування рівняння рівноваги. Врахування коефіцієнтів L_{2l} суттєво змінює характеристики політропи при $n = 1$. Порівняння знайдених сталих інтегрування $a_2(\Omega)$ та $a_4(\Omega)$ свідчить про кращу збіжність розкладу (74), ніж у наближенні, що не враховує коефіцієнтів L_{2l}. Стала $a_2(\Omega)$ за модулем і $a_4(\Omega)$ суттєво зменшилися. Загалом, в обох варіантах розрахунку залежність сталих інтегрування від кутової швидкості є суттєвою, що видно з таблиць 2 і 3. Врахування коефіцієнтів L_{2l} практично не впливає на величину полярного радіуса, але збільшує екваторіальний радіус, а також масу (приблизно на 9%) і момент інерції (на 20%).

Результати, наведені у таблиці 3, стосуються режиму (77), що відповідає еліпсоїдальним структурам. Розподіл безрозмірної густини за максимального значення кутової швидкості $\Omega_{\max}$ для декількох значень кута θ наведено на рис. 6. Побудований за даними таблиці 3 меридіональний переріз поверхні політропи площиною

Табл. 2: Залежність характеристик моделі політропи з індексом $n = 1$ від кутової швидкості згідно з представленням (74) у наближенні $a_{2l} = 0$ при $l \geq 4$

Ω	$e(\Omega)$	$\xi_p(\Omega)$	$\xi_e(\Omega)$	$a_2(\Omega)$	$a_4(\Omega)$	$a_6(\Omega)$	$\eta(n,\Omega)$	$\zeta(n,\Omega)$
0,01000	0,02739	3,14112	3,14230	−8,22784	0,00610775	$-8,02713 \cdot 10^{-6}$	1,00023	1,00062
0,02000	0,05478	3,13971	3,14443	−8,23739	0,02449	−0,000128907	1,00092	1,00249
0,03000	0,08219	3,13734	3,14799	−8,25338	0,055325	−0,000656943	1,00207	1,00563
0,04000	0,10961	3,13402	3,15302	−8,27594	0,0989151	−0,00209575	1,00369	1,01006
0,05000	0,13706	3,12973	3,15955	−8,30523	0,155695	−0,0051788	1,00580	1,01583
0,06000	0,16455	3,12447	3,16765	−8,34151	0,226242	−0,0108998	1,00839	1,02298
0,07000	0,19208	3,11820	3,17737	−8,38505	0,311294	−0,020555	1,01150	1,03158
0,08000	0,21967	3,11092	3,18880	−8,43625	0,411773	−0,0358001	1,01513	1,04172
0,09000	0,24733	3,10259	3,20205	−8,49557	0,52881	−0,0587258	1,01933	1,05351
0,10000	0,27507	3,09318	3,21725	−8,56357	0,663789	−0,0919578	1,02410	1,06707
0,11000	0,30291	3,08266	3,23456	−8,64098	0,818398	−0,13879	1,02951	1,08256
0,12000	0,33087	3,07097	3,25416	−8,72865	0,9947	−0,203359	1,03557	1,10016
0,13000	0,35900	3,05807	3,27632	−8,82768	1,19523	−0,290887	1,04237	1,12011
0,14000	0,38731	3,04388	3,30131	−8,93941	1,42314	−0,408009	1,04994	1,14270
0,15000	0,41586	3,02832	3,32953	−9,06557	1,68239	−0,563239	1,05839	1,16830
0,16000	0,44471	3,01127	3,36147	−9,20840	1,97802	−0,767633	1,06782	1,19736
0,17000	0,47394	2,99259	3,39779	−9,37084	2,31667	−1,03579	1,07834	1,23047
0,18000	0,50367	2,97208	3,43938	−9,55694	2,70721	−1,3874	1,09014	1,26843
0,19000	0,53407	2,94946	3,48752	−9,77240	3,16206	−1,84985	1,10343	1,31232
0,20000	0,56538	2,92430	3,54414	−10,02570	3,69946	−2,46274	1,11855	1,36371
0,21000	0,59802	2,89594	3,61237	−10,33050	4,3481	−3,28708	1,13597	1,42496
0,22000	0,63273	2,86321	3,69793	−10,71110	5,15825	−4,42644	1,15648	1,50007
0,23000	0,67114	2,82368	3,81334	−11,21930	6,23501	−6,09077	1,18158	1,59696
0,24000	0,71852	2,77019	4,00008	−12,01930	7,90279	−8,92229	1,21544	1,73805
0,24100	0,72446	2,76320	4,02826	−12,13670	8,14357	−9,35381	1,21980	1,75727
0,24200	0,73086	2,75562	4,06018	−12,26860	8,41224	−9,84267	1,22449	1,77830
0,24300	0,73793	2,74724	4,09737	−12,42040	8,71955	−10,4124	1,22964	1,80179
0,24400	0,74604	2,73767	4,14281	−12,60320	9,0861	−11,1087	1,23546	1,82894
0,24500	0,75612	2,72593	4,20403	−12,84440	9,5632	−12,0491	1,24249	1,86270
0,24600	0,77450	2,70593	4,33124	−13,32470	10,4868	−14,0363	1,25413	1,92196
0,24601	0,77507	2,70536	4,33555	−13,34070	10,5167	−14,1062	1,25445	1,92369
0,24602	0,77563	2,70481	4,33977	−13,35610	10,5455	−14,1737	1,25477	1,92537
0,24603	0,77626	2,70418	4,34461	−13,37360	10,5784	−14,2512	1,25512	1,92728
0,24604	0,77702	2,70344	4,35043	−13,39470	10,6177	−14,3446	1,25554	1,92955
0,24605	0,77800	2,70249	4,35808	−13,42230	10,669	−14,4675	1,25608	1,93248
0,24606	0,77959	2,70100	4,37053	−13,46670	10,7512	−14,6673	1,25693	1,93714
0,24607	0,78685	2,69478	4,42985	−13,66320	11,1084	−15,5733	1,26065	1,95773

при $\Omega = \Omega_{\max}$ наведено на рис. 7 (суцільна крива 1). В екваторіальній площині при цьому за межами екваторіального радіуса знаходиться безмежно тонке кільце. В позакритичній області ($\Omega > \Omega_{\max}(1)$) це призводить до формування диску. Пунктирна крива зображає переріз поверхні політропи без обертання. Крива 2 відповідає поверхні відповідного еліпсоїда обертання (з тими самими полярним і екваторіальним радіусами, що й крива 1).

На рис. 5 показано якісну відмінність поверхонь політроп у режимах (77) і (78) при $\Omega = 0,2$ у наближенні $a_{2l} = 0$ при $l \geq 2$. Крива 1 відповідає режиму малих

Табл. 3: Залежність характеристик моделі політропи з індексом $n = 1$ від кутової швидкості згідно з представленням (74) у наближенні $a_{2l} = 0$ при $l \geq 3$

Ω	$e(\Omega)$	$\xi_p(\Omega)$	$\xi_e(\Omega)$	$a_2(\Omega)$	$a_4(\Omega)$	$\eta(n,\Omega)$	$\zeta(n,\Omega)$
0,01000	0,02740	3,14112	3,14230	−8,22626	0,00305293	1,00023	1,00062
0,02000	0,05477	3,13971	3,14443	−8,23103	0,0122298	1,00092	1,00249
0,03000	0,08211	3,13735	3,14798	−8,23900	0,0275852	1,00207	1,00563
0,04000	0,10947	3,13404	3,15299	−8,25022	0,0492111	1,00369	1,01005
0,05000	0,13679	3,12979	3,15949	−8,26474	0,0772383	1,0058	1,01580
0,06000	0,16406	3,12459	3,16751	−8,28265	0,111839	1,00839	1,02292
0,07000	0,19132	3,11842	3,17711	−8,30402	0,153229	1,01149	1,03147
0,08000	0,21851	3,11130	3,18835	−8,32899	0,201673	1,01513	1,04152
0,09000	0,24567	3,10320	3,20131	−8,35768	0,257487	1,01931	1,05317
0,10000	0,27276	3,09413	3,21608	−8,39027	0,32105	1,02408	1,06652
0,11000	0,29980	3,08407	3,23277	−8,42695	0,392803	1,02945	1,08170
0,12000	0,32678	3,07301	3,25152	−8,46795	0,473268	1,03548	1,09886
0,13000	0,35369	3,06094	3,27247	−8,51353	0,563055	1,04221	1,11819
0,14000	0,38056	3,04784	3,29583	−8,56402	0,662877	1,04969	1,13989
0,15000	0,40737	3,03369	3,32181	−8,61978	0,773574	1,05798	1,16424
0,16000	0,43413	3,01847	3,35069	−8,68124	0,896136	1,06716	1,19153
0,17000	0,46085	3,00216	3,38279	−8,74892	1,03173	1,07731	1,22215
0,18000	0,48754	2,98472	3,41852	−8,82344	1,18177	1,08855	1,25656
0,19000	0,51422	2,96611	3,45838	−8,90554	1,34793	1,10099	1,29532
0,20000	0,54093	2,94628	3,50303	−8,99612	1,53227	1,1148	1,33915
0,21000	0,56770	2,92519	3,55328	−9,09629	1,73734	1,13016	1,38894
0,22000	0,59459	2,90275	3,61026	−9,20745	1,96635	1,14732	1,44585
0,23000	0,62169	2,87887	3,67547	−9,33137	2,22345	1,16657	1,51142
0,24000	0,64911	2,85344	3,75110	−9,47041	2,51415	1,18832	1,58773
0,25000	0,67706	2,82630	3,84047	−9,62772	2,84613	1,21311	1,67772
0,26000	0,70588	2,79723	3,94905	−9,80780	3,2307	1,24172	1,78576
0,27000	0,73624	2,76593	4,08725	−10,01740	3,68631	1,27531	1,91880
0,28000	0,76981	2,73197	4,28026	−10,26740	4,24909	1,31586	2,08937
0,29000	0,81612	2,69556	4,66457	−10,56940	5,04888	1,3676	2,32692
0,29100	0,82627	2,69274	4,78049	−10,59160	5,18552	1,37363	2,35676
0,29110	0,82808	2,69267	4,80312	−10,59110	5,20549	1,3742	2,35965

кутових швидкостей і невеликих ексцентриситетів, а крива 2 – невеликих кутових швидкостей і ексцентриситетів, близьких до одиниці. Крива 2 відповідає поверхні акреційного диску навколо масивної зорі у подвійних системах (див. [24], де наведено форму акреційного диску у системі β Ліри), або поверхні планетарної туманності типу "Метелик".

На рис. 8 зображено залежність екваторіального радіуса від кутової швидкості у різних наближеннях. Крива 1 відповідає наближенню Мілна – Чандрасекара, крива 2 побудована згідно з таблицею 3, крива 3 – за результатами роботи [13], яка відрізняється від результату [8] чисельним розрахунком a_2 ($a_{2l}(\Omega) = 0$ при $l \geq 2$). Крива 2 практично збігається з результатами роботи [9], тому ми не наводимо її.

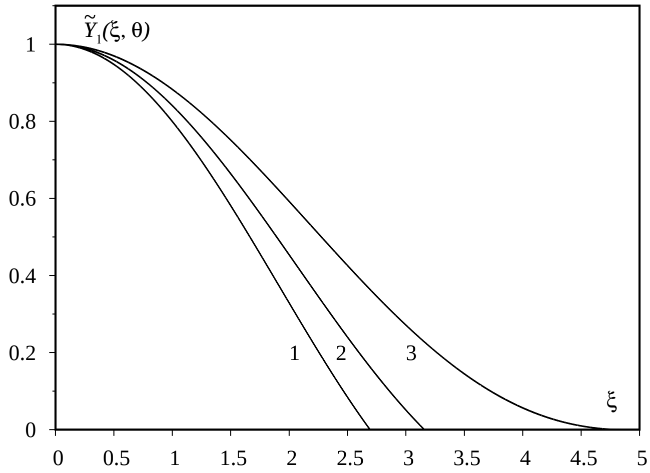

Рис. 6: Розподіл безрозмірної густини при $\Omega = \Omega_{\max}$ для декількох значень кута θ відповідно до формули (74) у наближенні $a_{2l} = 0$ при $l \geq 3$. Крива 1 відповідає $\theta = 0°$, крива 2 – $\theta = 45°$, крива 3 – $\theta = 90°$

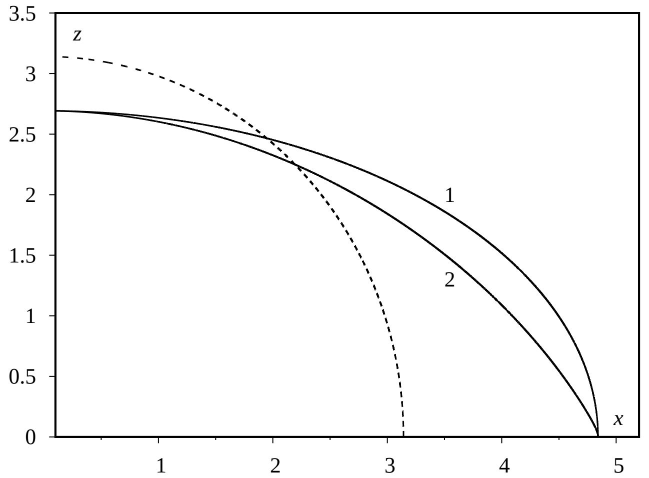

Рис. 7: Меридіональний переріз поверхні політропи з індексом $n = 1$ при $\Omega = \Omega_{\max}$. Крива 1 відповідає формулі (37), яка визначає поверхню ідеального еліпсоїда обертання. Крива 2 побудована у відповідності до формули (74). Пунктирна крива – переріз поверхні політропи без обертання.

6. Нелінійні рівняння рівноваги

Розглянуті вище часткові випадки моделей з індексами $n = 0$ і $n = 1$ мають не тільки самостійне, але й методичне значення. За формулами (52) та (72) одержуємо

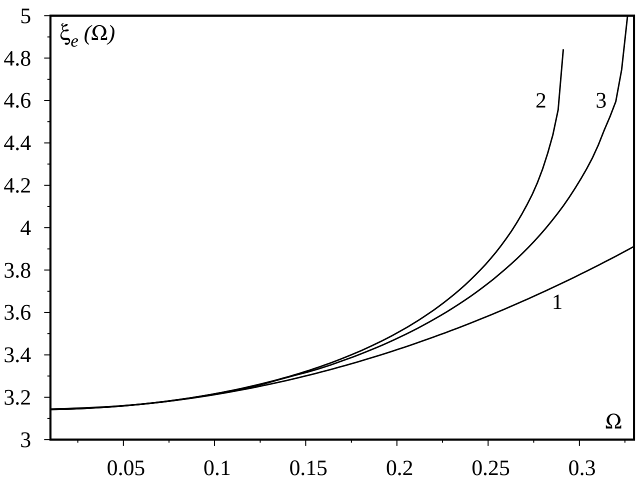

Рис. 8: Залежність екваторіального радіуса $\xi_e(\Omega)$ від швидкості обертання Ω для політропи з $n = 1$ у різних наближеннях. Крива 1 побудована за результатами робіт [7, 8], крива 2 відповідає нашим результатам. Крива 3 побудована за результатами роботи [13]

спосіб наближеного розв'язування рівнянь рівноваги при $n \neq 1$, а саме – лінеаризація цих рівнянь, що у випадку малих кутових швидкостей було запропоновано у роботі [7] для $n = 3$ і використано в [8] для $n = 1,5; 2; 3; 4$. Малі значення кутових швидкостей ($\Omega_{\max}(n) \approx 2^{1-n}\Omega_{\max}(1)$, де $\Omega_{\max}(n)$ є максимальним значенням Ω для політропи з індексом n) є підставою для представлення розв'язку у випадку $n \gtrsim 2$ у вигляді [7, 8]

$$Y_n(\xi,\theta) \;=\; y_n(\xi) + \Omega^2\Psi_n(\xi,\theta), \tag{96}$$

де $y_n(\xi)$ – функція Емдена для політропи з індексом n. Підставляючи вираз (96) у рівняння (21), в лінійному наближенні за $\Psi_n(\xi,\theta)$ одержуємо рівняння

$$\Delta(\xi,\theta)\,\Psi_n(\xi,\theta) \;=\; 1 - n\,y_n^{n-1}(\xi)\,\Psi_n(\xi,\theta). \tag{97}$$

У наближених розрахунках (див. [7,8]) використання співвідношень (96), (97) не викликало жодних проблем у випадку довільних значень n тільки тому, що функцію $\Psi_n(\xi,\theta)$ розраховували чисельним методом в області $0 \leq \xi \leq \xi_1(n)$, де $y_n(\xi) \geq 0$. Для розрахунку характеристик політроп використовували лінійну екстраполяцію виразів типу (92) в область $\xi \geq \xi_1(n)$. Цього було досить для наближених розрахунків характеристик в області малих кутових швидкостей. Для розрахунків в області всіх допустимих швидкостей необхідна функція $\Psi_n(\xi,\theta)$ також і в області $\xi > \xi_1(n)$, де $y_n(\xi)$ є від'ємною, або ж осцилюючою. У випадку цілих значень n це не створює труднощів, але у загальному випадку, коли n набуває довільних значень, функція $y_n^{n-1}(\xi)$ може ставати комплексною величиною, що призводить до комплексних розв'язків рівняння (97).

За аналогією до (74) для $\Psi_n(\xi,\theta)$ використовуємо розклад

$$\Psi_n(\xi,\theta) = \psi_{n,0}(\xi) + \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}^{(n)}\, P_{2l}(t)\, \psi_{n,2l}(\xi), \tag{98}$$

де a_{2l} є сталими інтегрування, а $\psi_{n,0}(\xi)$ та $\psi_{n,2l}(\xi)$ є функціями лише змінної ξ. Вони задовольняють лінійні рівняння

$$\begin{aligned} &\Delta(\xi)\, \psi_{n,0}(\xi) = 1 - \ n\, y_n^{n-1}(\xi)\, \psi_{n,0}(\xi), \\ &\Delta_\xi\, \psi_{n,2l}(\xi) = \{2l\,(2l+1)\,\xi^{-2} - n\, y_n^{n-1}(\xi)\}\, \psi_{n,2l}(\xi), \end{aligned} \tag{99}$$

яким відповідають нульові граничні умови

$$\psi_{n,0}(0) \ = \psi_{n,2l}(0) = 0, \quad \partial\psi_{n,0}(\xi)/\partial\xi = \partial\psi_{n,2l}(\xi)/\partial\xi = 0 \tag{100}$$

при $\xi = 0$. Як видно з рівнянь (99), функції $\psi_{n,2l}(\xi)$ є аналогами сферичних функцій Бесселя, вони є універсальними функціями для заданого значення індекса політропи і не залежать від Ω. В області $\xi \le 1$ рівняння для $\psi_{n,2l}(\xi)$ переходом до змінної $\eta = \sqrt{n}\xi$ зводяться до рівнянь для сферичних функцій $j_{2l}(\eta) = j_{2l}(\sqrt{n}\xi)$, тому в цій області $\psi_{n,2l}(\xi) \approx \xi^{2l}[2l(2l+1)]^{-1}$. Знаходження розв'язків рівнянь (99) не складає труднощів, вони одержані нами чисельним методом.

За малих значень змінної ξ

$$y_n(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \ldots,\ \psi_{n,0}(\xi) = \frac{\xi^2}{6} + \ldots,\ \psi_{n,2}(\xi) = \frac{\xi^2}{15} + \ldots, \tag{101}$$

через те з умови (24) стала $a_2^{(n)}$ визначається співвідношенням (76), яке не залежить від індекса n і є універсальним. Це означає, що за малих значень кутової швидкості можуть реалізовуватися два типи структур (еліпсоїдальні і дискові) для будь яких значень індекса політропи.

Точніший розрахунок сталих інтегрування $a_{2l}^{(n)}$ в режимі еліпсоїдальної конфігурації, що фігурують у розкладі (98), виконується тим самим способом, що і при $n = 1$, а саме за допомогою рівняння (36). Підставляючи розклад

$$Y_n(\xi,\theta) = y_n(\xi) + \Omega^2 \left\{ \psi_{n,0}(\xi) + \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}^{(n)}\, P_{2l}(t)\, \psi_{n,2l}(\xi) \right\} \tag{102}$$

у рівняння (36), в лінійному наближенні за Ω^2 одержуємо рівність

$$\begin{aligned} &y_n(\xi) + \Omega^2 \left\{ \psi_{n,0}(\xi) + \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}^{(n)}\, P_{2l}(t)\, \psi_{n,2l}(\xi) \right\} = \\ &= \ 1 + \frac{\Omega^2\xi^2}{6}\,(1 - P_2(t)) + \frac{1}{4\pi}\int d\boldsymbol{\xi}^{'} Q(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^{'}) \times \\ &\times \left\{ y_n^n(\xi^{'}) + \ \Omega^2 n y_n^{n-1}(\xi^{'}) \left[\psi_{n,0}(\xi^{'}) + \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}^{(n)}\, P_{2l}(t^{'})\, \psi_{n,2l}(\xi^{'}) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{103}$$

Інтегрування за вектором $\boldsymbol{\xi}^{'}$ тут проводять за об'ємом політропи. Використання рівняння (39) та рівнянь для функції $\psi_{n,0}(\xi)$ в інтегральній формі

$$\psi_{n,0}(\xi|\Omega) = \int\limits_0^{\xi} d\xi^{'} \left[\frac{(\xi^{'})^2}{\xi} - \xi^{'}\right] \left\{\psi_{n,0}(\xi^{'}) n\, y_n^{n-1}(\xi^{'})\right\} \tag{104}$$

дає змогу спростити рівність (103) до такого вигляду:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1} a_{2l}^{(n)}\, P_{2l}(t)\, \psi_{n,2l}(\xi) = -\frac{\xi^2}{6}\, (1 + 3I_2(\Omega))\, P_2(t) + \\ &+\, \frac{1}{4\pi} \int d\boldsymbol{\xi}^{'} Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^{'})\, n y_n^{n-1}(\xi^{'}) \sum_{l=1} a_{2l}^{(n)}\, P_{2l}(t^{'})\, \psi_{n,2l}(\xi^{'})\, + \sum_{l=1} \xi^{2l}\, P_{2l}(t)\, L_{2l}^{(n)}; \\ &L_{2l}^{(n)} \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{+1} dt^{'}\, P_{2l}(t^{'}) \int\limits_{\xi_1(n)}^{\xi_0(t^{'})} d\xi^{'} (\xi^{'})^{1-2l} \left\{\Omega^{-2}\, y_n^n(\xi^{'}) + y_n^{n-1}(\xi^{'})\, \psi_{n,0}(\xi^{'})\right\}. \end{aligned} \tag{105}$$

Одержана рівність є аналогом рівності (81) і записана у наближенні моделі еліпсоїда обертання та наближення Ω^2.

Для розрахунку інтеграла за вектором $\boldsymbol{\xi}^{'}$ розкладемо ядро $Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^{'})$ у ряд за поліномами Лежандра,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \sum_{l\geq 1} a_{2l}^{(n)} \int P_{2l}(t^{'}) n\, y^{n-1}(\xi^{'}) \psi_{n,2l}(\xi^{'}) Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^{'}) d\boldsymbol{\xi}^{'} = \frac{1}{2} \sum_{l\geq 1} a_{2l}^{(n)}\, P_{2l}(t) \int\limits_{-1}^{+1} dt^{'} P_{2l}^2(t^{'}) \times \\ &\times \left\{\xi^{-1-2l} \int\limits_0^{\xi} (\xi^{'})^{2+2l} n y^{n-1}(\xi^{'}) \psi_{n,2l}(\xi^{'}) d\xi^{'} + \xi^{2l} \int\limits_{\xi}^{\xi_0(t^{'})} (\xi^{'})^{1-2l} n y^{n-1}(\xi^{'}) \psi_{n,2l}(\xi^{'}) d\xi^{'}\right\} + \\ &+\, \frac{1}{2} \sum_{m,l\geq 1} (1 - \delta_{l,m}) a_{2l}^{(n)} P_{2m}(t) \xi^{2m} \int\limits_{-1}^{+1} dt^{'} P_{2m}(t^{'}) P_{2l}(t^{'}) \int\limits_{\xi}^{\xi_0(t^{'})} d\xi^{'} n\, y^{n-1}(\xi^{'})\, \psi_{n,2l}(\xi^{'})\, (\xi^{'})^{1-2m}. \end{aligned} \tag{106}$$

Інтеграли за змінною $\xi^{'}$ можна виразити через $\psi_{n,2l}(\xi)$ та її похідну, або ж спростити, якщо скористатись рівнянням для цієї функції (див. (99)), згідно з яким

$$n\, y^{n-1}(\xi)\, \psi_{n,2l}(\xi) = 2l(2l+1)\, \frac{1}{\xi^2}\, \psi_{n,2l}(\xi) - \Delta_{\xi}\, \psi_{n,2l}(\xi). \tag{107}$$

Інтегруючи частинами, відшукуємо, що

$$k_1 = \xi^{-1-2l} \int\limits_0^{\xi} (\xi^{'})^{2+2l} n y^{n-1}(\xi^{'}) d\xi^{'} = 2l\, \psi_{n,2l}(\xi) - \xi\, \frac{d}{d\xi}\, \psi_{n,2l}(\xi);$$

$$k_2 = \xi^{2l} \int\limits_{\xi}^{\xi_0} (\xi^{'})^{1-2l} n y^{n-1}(\xi^{'}) \psi_{n,2l}(\xi^{'}) d\xi^{'} = (2l+1)\, \psi_{n,2l}(\xi) - \xi\, \frac{d}{d\xi}\, \psi_{n,2l}(\xi) -$$

$$- \ \xi^{2l} \xi_0^{-2l} \left\{ (2l+1)\, \psi_{n,2l}(\xi_0) + \xi_0\, \frac{d}{d\xi_0}\, \psi_{n,2l}(\xi_0) \right\}; \tag{108}$$

$$k_3 = \xi^{2m} \int\limits_{\xi}^{\xi_0} (\xi^{'})^{1-2m} n y^{n-1}(\xi^{'})\, \psi_{n,2l}(\xi^{'}) = -\frac{\xi^{2m}}{\xi_0^{2m}} \left\{ (2m+1) \psi_{n,2l}(\xi_0) + \xi_0 \frac{d}{d\xi_0}\, \psi_{n,2l}(\xi_0) \right\} -$$

$$- \ \{2m(2m+1) - 2l(2l+1)\}\, \xi^{2m} \int\limits_{\xi_1(n)}^{\xi_0} (\xi^{'})^{-1-2m} \psi_{n,2l}(\xi^{'}) d\xi^{'},$$

де $\xi_0 = \xi_0(t^{'})$. Як легко бачити, перший доданок у правій стороні рівняння (106) зображається у вигляді

$$\begin{gathered} \sum_{l \geq 1} a_{2l}^{(n)}\, P_{2l}(t)\, \psi_{n,2l}(\xi) - \sum_{l \geq 1} a_{2l}^{(n)}\, P_{2l}(t)\, \xi^{2l}\, S_{2l,2l}, \\ S_{2l,2l} = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{+1} dt\, P_{2l}^2(t)\, \xi_0^{-2l} \left\{ (2l+1)\, \psi_{n,2l}(\xi_0) + \xi_0 \frac{d}{d\xi_0}\, \psi_{n,2l}(\xi_0) \right\}, \end{gathered} \tag{109}$$

а другий має таке зображення ($\xi_0 \equiv \xi_0(t)$):

$$\begin{gathered} - \sum_{l,m \geq 1} (1 - \delta_{l,m})\, a_{2m}^{(n)}\, P_{2l}(t) \xi^{2l}\, S_{2l,2m}, \\ S_{2l,2m} = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{+1} P_{2m}(t) P_{2l}(t) dt\, \left\{ \xi_0^{-2l} [(2l+1)\, \psi_{n,2m}(\xi_0) + \xi_0 \frac{d}{d\xi_0} \psi_{n,2m}(\xi_0)] + \right. \\ \left. + [2l(2l+1) - 2m(2m+1)] \int\limits_{\xi_1(n)}^{\xi_0} (\xi^{'})^{-1-2l} \psi_{n,2m}(\xi^{'}) d\xi^{'}) \right\}. \end{gathered} \tag{110}$$

У зв'язку з ортогональністю поліномів $P_{2m}(t)$ і $P_{2l}(t)$ в інтегралі за змінною $\xi^{'}$, що тут фігурує, важливим є лише окіл верхньої границі. Через те його можна розрахувати за допомогою розкладу функції $\psi_{n,2m}(\xi^{'})$ у ряд Тейлора в околі ξ_0 з подальшим почленним інтегруванням. У такому наближенні

$$
\begin{gathered}
S_{2l,2m} \cong \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} P_{2l}(t^{'})P_{2m}(t^{'})\xi_0^{-2l}\ \left\{\left[(2l+1)\psi_{n,2m}(\xi_0)+\xi_0\frac{d}{d\xi_0}\ \psi_{n,2m}(\xi_0)\right] - \right.\\
\left. -\ [2l(2l-1)]^{-1}[2l(2l+1)-2m(2m+1)]\ \left[(2l-1)\psi_{n,2m}(\xi_0)+\xi_0\frac{d}{d\xi_0}\ \psi_{n,2m}(\xi_0)\right]\right\} dt^{'},
\end{gathered}
\tag{111}
$$

де $\xi_0 \equiv \xi_0(t^{'})$. Підставляючи вирази (109) – (111) у рівність (105) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових добутках $P_{2s}(t)\xi^{2s}$, одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь для сталих інтегрування

$$
\begin{aligned}
&a_2^{(n)}S_{2,2}+\sum_{m\geq 2} a_{2m}^{(n)}\, S_{2m,2} = L_2(e)-\frac{1}{6}\,[1+3I_2(e)],\\
&a_{2l}^{(n)}S_{2l,2l}+\sum_{m\geq 1}(1-\delta_{l,m})\, a_{2m}^{(n)}S_{2m,2l} = L_{2l}(e) \quad \text{для} \quad l\geq 2.
\end{aligned}
\tag{112}
$$

Одержані рівняння є повним аналогом системи (87) для випадку $n = 1$.

Наприклад у табл. 4 наведено результати розрахунку сталих інтегрування у наближенні (112), а також макроскопічних характеристик політропи з індексом $n = 3$. Для порівняння нижній рядок табл. 4 відображає результати аналогічного розрахунку у наближенні $L_2(e) = L_{2l}(e) = 0$ при $\Omega_{\max}$ з роботи [20]. Загалом, врахування поправок $L_2(e)$, $L_4(e)$ призводить до невеликих змін характеритик на відміну від політропи з $n = 1$. Стала $a_2(\Omega)$ за модулем зменшується, а $a_4(\Omega)$ збільшується, хоча це не погіршує збіжності ряду.

Як видно з табл. 3 і 4, вплив осьового обертання зменшується при збільшенні індекса політропи. При цьому врахування доданків $a_{2l}(\Omega)$ при $l \geq 3$ для політропи з індексом $n = 3$ вже є несуттєвим.

7. Обернена задача політропної теорії зір

Політропна модель зорі зі сталим осьовим обертанням має чотири параметри: K, ρ_c, n і ω. Знаходження цих параметрів за спостережуваними даними для конкретної зорі складає зміст оберненої задачі теорії. Якщо відомі маса зорі M, її екваторіальний радіус R_e, ексцентриситет e і кутова швидкість ω, то спостережуваних даних вистачає для визначення параметрів K, ρ_c і n. У спрощеному варіанті моделі, коли значення індекса n задається (як, наприклад у роботах [16, 17]), спостережуваних даних достатньо для визначення параметрів K, ρ_c і ω. Модель з фіксованим індексом n теж має зміст, якщо взяти до уваги, що зі спостережень можна визначити за ефектом Доплера лише кутову швидкість обертання на екваторі зорі. За наявності диференціального обертання визначена таким способом кутова швидкість перевищує те значення, яке фігурує в моделі зі сталою кутовою швидкістю.

З розрахунків ми маємо сітку значень для $e(n|\Omega)$, $\xi_e(n|\Omega)$, $\eta(n|\Omega)$, де для кожного значення n безрозмірна кутова швидкість змінюється в області $(0 \leq \Omega \leq \Omega_{\max}(n))$. Безрозмірні величини $e(n|\Omega)$, $\xi_e(n|\Omega)$, $\eta(n|\Omega)$ є монотонними функціями параметрів

Табл. 4: Залежність характеристик моделі політропи з індексом $n = 3$ від кутової швидкості згідно з представленням (112) у наближенні $a_{2l} = 0$ при $l \geq 3$. Нижній рядок відповідає результатам роботи [20].

Ω	$e(\Omega)$	$\xi_p(\Omega)$	$\xi_e(\Omega)$	$a_2(\Omega)$	$a_4(\Omega)$	$\eta(n,\Omega)$	$\zeta(n,\Omega)$
0,01000	0,09171	6,89146	6,92062	−10,88560	0,00304466	1,00063	1,00239
0,02000	0,18522	6,87430	6,99535	−10,99980	0,0125776	1,00249	1,00982
0,03000	0,28278	6,84351	7,13470	−11,20660	0,0300057	1,00566	1,02278
0,04000	0,38803	6,79503	7,37272	−11,54180	0,0586948	1,01026	1,04237
0,05000	0,50969	6,72040	7,81117	−12,10330	0,108007	1,01652	1,07085
0,05100	0,52361	6,71081	7,87692	−12,18190	0,115023	1,01726	1,07435
0,05200	0,53806	6,70067	7,94949	−12,26710	0,122657	1,01801	1,07801
0,05300	0,55315	6,68993	8,03032	−12,36010	0,131029	1,01879	1,08183
0,05400	0,56902	6,67849	8,12148	−12,46280	0,140309	1,01959	1,08584
0,05500	0,58589	6,66620	8,22590	−12,57770	0,150739	1,02042	1,09005
0,05600	0,60409	6,65287	8,34824	−12,70890	0,162695	1,02128	1,09449
0,05700	0,62416	6,63817	8,49635	−12,86310	0,176813	1,02217	1,09922
0,05800	0,64720	6,62144	8,68586	−13,05380	0,194349	1,0231	1,10430
0,05900	0,67599	6,60104	8,95776	−13,31620	0,218573	1,02407	1,10993
0,05910	0,67947	6,59864	8,99358	−13,34990	0,22169	1,02417	1,11053
0,05920	0,68312	6,59613	9,03201	−13,38590	0,225015	1,02428	1,11116
0,05930	0,68698	6,59350	9,07352	−13,42450	0,228587	1,02438	1,11179
0,05940	0,69110	6,59071	9,11886	−13,46640	0,232464	1,02448	1,11245
0,05950	0,69556	6,58773	9,16908	−13,51260	0,23673	1,02459	1,11312
0,05960	0,70044	6,58450	9,22569	−13,56420	0,241504	1,0247	1,11383
0,05970	0,70593	6,58091	9,29141	−13,62370	0,247001	1,02481	1,11457
0,05980	0,71239	6,57676	9,37148	−13,69560	0,253637	1,02492	1,11536
0,05990	0,72071	6,57154	9,47950	−13,79160	0,262486	1,02504	1,11627
0,05991	0,72174	6,57091	9,49320	−13,80370	0,263601	1,02505	1,11637
0,05992	0,72281	6,57024	9,50774	−13,81650	0,264781	1,02507	1,11647
0,05993	0,72397	6,56953	9,52338	−13,83030	0,266049	1,02508	1,11658
0,05994	0,72520	6,56878	9,54024	−13,84510	0,267412	1,02509	1,11669
0,05995	0,72655	6,56797	9,55871	−13,86130	0,268903	1,02511	1,11681
0,05996	0,72803	6,56707	9,57937	−13,87950	0,270568	1,02512	1,11694
0,05997	0,72973	6,56605	9,60315	−13,90020	0,272478	1,02514	1,11708
0,05998	0,73175	6,56484	9,63190	−13,92530	0,274782	1,02515	1,11724
0,05999	0,73444	6,56325	9,67074	−13,95910	0,277882	1,02517	1,11743

Ω	$e(\Omega)$	$\xi_p(\Omega)$	$\xi_e(\Omega)$	$a_2(\Omega)$	$a_4(\Omega)$	$a_6(\Omega)$	$\eta(n,\Omega)$	$\zeta(n,\Omega)$
0,05987	0,73961	6,48201	9,74434	−15,36260	0,0122653	0,00705586	1,02524	1,12055

n і Ω. Зорі з відомим ексцетриситетом e_* відповідає значення $\Omega_*(n)$, яке є коренем рівняння $e(n|\Omega) = e_*$. Знайдена таким чином $\Omega_*(n)$ є монотонною функцією індекса політропи і визначає $\xi_e(n|\Omega_*(n))$ та $\eta(n|\Omega_*(n))$ як функції індекса n. Згідно з формулами (51) масу зорі з обертанням записують у вигляді

$$M = 2\beta_2(n)\eta(n|\Omega_*(n))R_e^3\xi_e^{-3}(n|\Omega_*(n))\omega^2G^{-1}\Omega_*^{-2}(n). \qquad (113)$$

За відомих спостережуваних значень M і ω це співвідношення визначає індекс політропи n_* для моделі спостережуваної зорі. Зі співвідношень (22) знаходимо параметр густини

$$\rho_c^* = (2\pi G)^{-1}\omega^2\Omega_*^{-2}(n), \qquad (114)$$

а також параметр політропи

$$K_* = 4\pi G(1+n_*)^{-1} R_e^2 \xi_e^{-2}(n|\Omega_*(n))(\rho_c^*)^{1-1/n_*}. \quad (115)$$

У табл. 5 наведено розраховані таким способом параметри n_*, ρ_c^* і K_* для зорі альфа

Табл. 5: Параметри політропи для зорі α Eri з ексцентриситетом $e = 0,7454$.

$\omega, 10^{-5}\text{с}^{-1}$	$2,4$	$2,5$	$2,6$	$2,7$	$2,8$	$2,9$
n_*	$1,14378$	$1,31139$	$1,49643$	$1,70628$	$1,95746$	$2,30891$
$\text{K}_*,\ 10^9\text{Па}\cdot\text{м}^6(\text{кг})^{-2}$	$2,30388$	$2,91922$	$3,62319$	$4,4568$	$5,51356$	$7,12403$
ρ_c^*, кг/м^3	$28,1702$	$36,2517$	$48,0952$	$66,6238$	$99,1084$	$174,871$

Ерідана (α Eri) з ексцентриситетом $e = 0.7454$, масою $M = 9,7466 \cdot 10^{30}$ кг $\approx 4,9 M_\odot$ [25] і радіусом $R_e = 8,3520 \cdot 10^9$ м $\approx 12 R_\odot$ [26] в області значень кутової швидкості $2,4 \cdot 10^{-5}\text{с}^{-1} \leq \omega \leq 2,9 \cdot 10^{-5}\text{с}^{-1}$. Як видно з цієї таблиці, індекс політропи для цього інтервалу швидкостей змінюється в області $1,1 \leq n_* \leq 2,3$.

В роботах [16,17] використано спрощену модель з фіксованим індексом політропи $n = 1$, для якої у роботі [16] одержано значення параметра $K = 1,75 \cdot 10^9$ Па$\cdot$м^6(кг)$^{-2}$. При цьому було використано спостережуване значення кутової швидкості $\omega = 2.97 \cdot 10^{-5}\text{с}^{-1}$ [27, 28] і ексцентриситет $e = 0,7454$. У такій моделі (з $n = 1$) параметри ρ_c, K і ω визначаються з рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{M}{R_e^3} = 2\pi\beta_2(1)\eta(1|\Omega_*)\rho_c\xi_e^{-3}(1|\Omega_*), \\ &R_e = \xi_e(\Omega_*)\left(\frac{K}{2\pi G}\right)^{1/2}, \quad \omega = \Omega_*(2\pi G\rho_c)^{1/2}, \end{aligned} \quad (116)$$

де Ω_* відповідає значенню ексцетриситету $e = 0,7454$ при $n = 1$. У наближенні (74) $\Omega_* = 0,273201$, $\xi_e(1|\Omega_*) = 4,12719$, $\eta(1|\Omega_*) = 1,28747$, що дає такі шукані значення параметрів:

$$K = 1,71723 \cdot 10^9 \text{Па}\cdot\text{м}^6(\text{кг})^{-2}, \quad \rho_c = 23,1392\,\text{кг/м}^3, \quad \omega = 2,69113 \cdot 10^{-5}\text{с}^{-1}. \quad (117)$$

На жаль, на даний час є обмаль спостережуваних даних щодо зір зі швидким обертанням. Тому має сенс побудова спрощених моделей, що відповідають не окремим зорям, а цілому класу зір головної послідовності за середніми статистичними даними про їхні маси, радіуси та кутові швидкості. В роботі [1] наведено значення середніх кутових швидкостей для більшості спектральних класів головної послідовності. Вважаючи, що наведені в роботі [1] значення радіусів відповідають екваторіальним радіусам, ми розрахували сітку параметрів K, ρ_c і ω (при $n = 1$) для різних значень відношення $\varepsilon = R_p/R_e$. Із цієї сітки було вибрано значення параметрів для тих значень ε, при яких розраховане значення кутової швидкості є найближчим до спостережуваної кутової швидкості. Спостережувані дані і результати розрахунку наведено в таблиці 6. Як видно з таблиці, великі значення параметра K (малі ρ_c) відповідають зорям великим мас, а малі значення K відповідають зорям малих мас, у яких центральна густина є великою. Хоча ці результати є наближеними, вони ілюструють залежність політропних параметрів від величини зоряних мас.

Табл. 6: Параметри K та ρ_c політропної моделі відповідно до усереднених швидкостей зір головної послідовності (Спостережувані величини M, R, ω взяті з роботи [1]).

Спектр	M, 10^{30}кг	R, 10^9м	ω, 10^{-5}с$^{-1}$	К, 10^9Па $\cdot$ м^6(кг)$^{-2}$	ρ_c, кг/м^3	$\xi_e(\Omega)$	Ω	$\eta(\Omega)$
O5	79	12	$1,5$	$5,69709$	$38,6225$	$3,25561$	$0,118$	$1,03462$
B0	34	$5,3$	$3,8$	$1,08767$	$197,267$	$3,29082$	$0,133$	$1,04508$
B5	14	$2,8$	$7,6$	$0,29196$	$573,682$	$3,35562$	$0,155$	$1,06400$
A0	$7,1$	$1,8$	$10,0$	$0,12207$	$1081,91$	$3,33617$	$0,149$	$1,05836$
A5	$4,4$	$1,2$	$13,0$	$0,055583$	$2206,65$	$3,29602$	$0,135$	$1,04661$
F0	$3,5$	$0,94$	$10,0$	$0,036262$	$3428,6$	$3,19653$	$0,084$	$1,01682$
F5	$2,8$	$0,84$	$3,0$	$0,029897$	$3720,64$	$3,14589$	$0,024$	$1,00132$
G0	$2,1$	$0,73$	$1,6$	$0,022626$	$4242,68$	$3,14266$	$0,012$	$1,00033$

8. Висновки

У всіх опублікованих роботах, що стосуються розрахунку внутрішньої будови зір з осьовим обертанням у рамках політропної моделі, використовується диференціальне рівняння рівноваги (14)–(22). Наближені розв'язки цього рівняння зображаються в аналітичній формі, або ж відшукуються чисельним інтегруванням. У випадку малих швидкостей обертання використовується теорія збурень, а поправка до функції Емдена розраховується у лінійному наближенні за Ω^2, що відповідає врахуванню доданків $a_2 j_2(\xi) P_2(t)$ при $n = 1$, або $a_2^{(n)} \psi_{n,2}(\xi) P_2(t)$ при $n \neq 1$. Єдина стала інтегрування в такому наближенні знаходиться з використанням додаткових умов типу неперервності гравітаційного потенціалу на сфері Емдена і не залежить від Ω. Коректні розв'язки рівняння рівноваги у всій області допустимих значень кутової швидкості потребує розкладів типу (72)-(74), або (102) при $n \neq 1$, в результаті виникає задача знаходження сталих інтегрування $a_{2l}(\Omega)$, $a_{2l}^{(n)}(\Omega)$, як і визначення максимального значення кутової швидкості $\Omega_{\max}^{(n)}$. Запропонований підхід ґрунтується на використанні диференціальної та інтегральної форм рівняння рівноваги, які є замкнутою системою, що не потебує ніякої додаткової інформації, а визначає сталі інтегрування у рамках самого рівняння рівноваги. Для довільного n алгебричні рівняння (87) чи (112) є системою лінійних неоднорідних рівнянь, на відміну від нелінійної системи рівнянь, одержаної в роботі [11] для випадку $n = 1$. Сталі інтегрування a_{2l}, $a_{2l}^{(n)}$ є функціями кутової швидкості, а в границі $\Omega \to 0$ тільки a_2, $a_2^{(n)}$ не залежать від Ω. За малих значень кутової швидкості ($\Omega^2 \ll 1$) a_4, $a_4^{(n)} \sim \Omega^2$, a_6, $a_6^{(n)} \sim \Omega^4$ тощо. В околі граничного значення кутової швидкості при $n = 1$ коефіцієнти розкладу a_{2l} стають співмірними між собою за модулем. Зі збільшенням індекса політропи n відносні величини $|a_4^{(n)}/a_2^{(n)}|$, $|a_6^{(n)}/a_2^{(n)}|$ зменшуються, що пов'язано зі зменшенням $\Omega_{\max}(n)$. При цьому залежність $a_2^{(n)}$ від Ω залишається суттєвою, а збіжність розкладів (102) покращується. Про збіжність ряду (74) можна судити за величинами окремих членів ряду для області екватора при заданій кутовій швидкості:

$$f_2 : f_4 : f_6 = 1,31 : 0,02 : 0,002 \quad \text{при} \quad \Omega = 0,1,$$
$$f_2 : f_4 : f_6 = 1,53 : 0,12 : 0,007 \quad \text{при} \quad \Omega = 0,2,$$
$$f_2 : f_4 : f_6 = 1,44 : 0,64 : 0,13 \quad \text{при} \quad \Omega = \Omega_{\max},$$

де $f_{2l} = |a_{2l}(\Omega)P_{2l}(0)j_{2l}(\xi_e)|$. Така збіжність розкладів дає підставу вважати, що характеристики політроп при $n \geq 1$ розраховано з невеликими похибками у всій області стабільності $0 \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$, як і значення $\Omega_{\max}(n)$. Знайдене значення $\Omega_{\max}(n)$ є дуже близьким до результатів роботи [9] при $1,0 \leq n \leq 2,5$, у якій виконано обчислення характеристик політроп чисельним методом.

Врахування доданка L_{2l} (див. ф. (82)), яким ми нехтували у попередніх публікаціях, суттєво впливає на значення коефіцієнтів $a_{2l}(\Omega)$, $\Omega_{\max}(1)$ та характеристики політропи при $n = 1$, але вплив цього доданка зменшується зі збільшенням індекса політропи, а вже при $n = 3$ його вплив є несуттєвим. Виявлені нами два можливі режими обертання об'єктів з політропним рівнянням стану – еліпсоїдальний та дисковий, відкривають перспективу опису структури зір з акреційними дисками у подвійних системах.

---

1. McNally D. The distribution of angular momentum among main sequence stars / D. McNally // The Observatory. – 1965. – Vol. 85. – P. 166-169.
2. Smith F. G. Pulsars / F. G. Smith // Cambridge: Cambridge University Press. – 1977. – 239 P.
3. Lane H. On the Theoretical Temperature of the Sun under the Hypothesis of a gaseous mass Maintining Its Volume by Its Internal Heat and Depending on the Law of Gases Known to Terrestrial Experiment / H. Lane // The American J. of Science and Arts. – 1870. – Vol. 50. – 57-74. doi:10.2475/ajs.s2-50.148.57.
4. Emden R. Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme / R. Emden // Leipzig, Berlin. – 1907. – 499 P.
5. Fowler R. H. Emden's equation: The solutions of Emden's and similar differential equations / R. H. Fowler // MNRAS. – 1930. – Vol. 91. – P. 63-91. doi:10.1093/mnras/91.1.63.
6. Eddington A. S. The Internal Constitution of the Stars / A. S. Eddington // Cambridge: Cambridge University Press. – 1926. – 407 P.
7. Milne E. A. The equilibrium of a rotating star / E. A. Milne // MNRAS. – 1923. – Vol. 83. – P. 118-147. doi: 10.1093/mnras/83.3.118.
8. Chandrasekhar S. The Equilibrium of Distorted Polytropes. I. The Rotational Problem / S. Chandrasekhar // MNRAS. – 1933. – Vol. 93. – P. 390-406. doi:10.1093/mnras/93.5.390.
9. James R. A. The Structure and Stability of Rotating Gas Masses / R. A. James // ApJ. – 1964. – Vol. 140. – P. 552-582. doi:10.1086/147949.
10. Kopal Z. Bemerkung zur Theorie der rotierenden Polytropen / Z. Kopal // Zeitschrift für Astrophysik. – 1937. – Vol. 14. – P. 135-138.

11. Williams P. S. Analytical Solutions for the Rotating Polytrope N=1 / P. S. Williams // Astrophysics and Space Science. – 1988. – Vol. 143. – P. 349-358. doi:10.1007/BF00637146.
12. Monaghan J. J. The Structure of Rapidly Rotating Polytropes / J. J. Monaghan, I. W. Roxburgh // MNRAS. – 1965. – Vol. 131. – P. 13-22. doi:10.1093/mnras/131.1.13.
13. Caimmi R. Emden-Chandrasekhar Axisymmetric Solid-Body Rotating Polytropes. – Part One. – Exact Solutions for the Special Cases N=0, 1 and 5 / R. Caimmi // Astrophysics and Space Science. – 1980. – Vol. 71. – P. 415-457. doi:10.1007/BF00639402.
14. Vavrukh M. V. The microscopic parameters and the macroscopic characteristics of real degenerate dwarfs / M. V. Vavrukh, S. V. Smerechynskyi, N. L. Tyshko // Journal of Physical Studies. – 2010. – Vol. 14. – P. 4901-1-4901-16. doi:10.30970/jps.14.4901.
15. Vavrukh M. V. Consideration of the competing factors in calculations of the characteristics of non-magnetic degenerate dwarfs / M. V. Vavrukh, D. V. Dzikovskyi, S. V. Smerechynskyi // Ukr. J. Phys. – 2018. – Vol. 63. – P. 777-789. doi:10.15407/ujpe63.9.777.
16. Kong D. An exact solution for arbitrarily rotating gaseous polytropes with index unity / D. Kong, K. Zhang, G. Schubert // MNRAS. – 2015. – Vol. 448. – P. 456-463. doi:10.1093/mnras/stu2759.
17. Knopik J. The shape of a rapidly rotating polytrope with index unity / J. Knopik, P. Mach, A. Odrzywołek // MNRAS. – 2017. – Vol. 467. – P. 4965-4969. doi: 10.1093/mnras/stx164.
18. Shapiro S. L. Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars / S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky // Cornell University, Ithaca, New York. – 1983. – 645 P.
19. Vavrukh M. V. The self-consistent description of stellar equilibrium with axial rotation / M. V. Vavrukh, N. L. Tyshko, D. V. Dzikovskyi, O. M. Stelmakh // Mathematical Modeling and Computing. – 2019. – Vol. 6. – P. 153-172. doi:10.23939/mmc2019.02.153.
20. Vavrukh M. V. New approach in the theory of stellar equilibrium with axial rotation / M. V. Vavrukh, N. L. Tyshko, D. V. Dzikovskyi // Journal of Physical Studies. – 2020. – Vol. 24. – P. 3902-1-3902-20. doi:10.30970/jps.24.3902.
21. Chandrasekhar S. An Introduction to the Study of Stellar Structure / S. Chandrasekhar // Chicago: University of Chicago Press. – 1939. – 509 P.
22. Lyttleton R. A. The Stability of Rotating Liquid Masses / R. A. Lyttleton // Cambridge: Cambridge University Press. – 1953. – 150 P.
23. Abramowitz M. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M. Abramowitz, I. A. Stegun // Government Printing Office Washington. – 1972. – 1046 P.
24. Mennickent R. E. On the accretion disc and evolutionary stage of β Lyrae / R. E. Mennickent, G. Djurašević // MNRAS. – 2013. – Vol. 432. – P. 799-809. doi: 10.1093/mnras/stt515.
25. Levenhagen R. S. Spectroscopic analysis of southern B and Be stars / R. S. Levenhagen, N. V. Leister // MNRAS. – 2006. – Vol. 371. – P. 252-262. doi: 10.1111/j.1365-2966.2006.10655.x.

26. Domiciano de Souza A. The environment of the fast rotating star Achernar. III. Photospheric parameters revealed by the VLTI / A. Domiciano de Souza, P. Kervella, D. Moser Faes, G. Dalla Vedova, A. Mérand, J.-B. Le Bouquin, F. Espinosa Lara, M. Rieutord, P. Bendjoya, A. C. Carciofi, M. Hadjara, F. Millour, F. Vakili // Astronomy & Astrophysics. – 2014. – Vol. 569. – P. A10. doi:10.1051/0004-6361/201424144.
27. Slettebak A. Spectral types and rotational velocities of the brighter Be stars and A-F type shell stars / A. Slettebak // Astrophysical Journal, Suppl. Ser. – 1982. – Vol. 50. – P. 55-83. doi:10.1086/190820.
28. Carciofi A. C. On the Determination of the Rotational Oblateness of Achernar / A. C. Carciofi, A. Domiciano de Souza, A. M. Magalhães, J. E. Bjorkman, F. Vakili // The Astrophysical Journal Letters. – 2008. – Vol. 676. – P. L41-L44. doi:10.1086/586895.

References

1. D. McNally, The Observatory **85**, 166-169 (1965).
2. F. G. Smith, Cambridge: Cambridge University Press (1977).
3. H. Lane, The American J. of Science and Arts. **50**, 57-74 (1870). doi:10.2475/ajs.s2-50.148.57.
4. R. Emden, Leipzig, Berlin, (1907).
5. R. H. Fowler, MNRAS **91**, 63-91 (1930). doi:10.1093/mnras/91.1.63.
6. A. S. Eddington, Cambridge: Cambridge University Press (1926).
7. E. A. Milne, MNRAS **83**, 118-147 (1923). doi: 10.1093/mnras/83.3.118.
8. S. Chandrasekhar, MNRAS **93**, 390-406 (1933). doi:10.1093/mnras/93.5.390.
9. R. A. James, ApJ. **140**, 552-582 (1964). doi:10.1086/147949.
10. Z. Kopal, Zeitschrift für Astrophysik **14**, 135-138 (1937).
11. P. S. Williams, Astrophysics and Space Science **143**, 349-358 (1988). doi:10.1007/BF00637146.
12. J. J. Monaghan, I. W. Roxburgh, MNRAS **131**, 13-22 (1965). doi:10.1093/mnras/131.1.13.
13. R. Caimmi, Astrophysics and Space Science **71**, 415-457 (1980). doi:10.1007/BF00639402.
14. M. V. Vavrukh, S. V. Smerechynskyi, N. L. Tyshko, Journal of Physical Studies **14**, 4901-1-4901-16 (2010). doi: 10.30970/jps.14.4901.
15. M. V. Vavrukh, D. V. Dzikovskyi, S. V. Smerechynskyi, Ukr. J. Phys. **63**, 777-789 (2018). doi:10.15407/ujpe63.9.777.
16. D. Kong, K. Zhang, G. Schubert, MNRAS **448**, 456-463 (2015). doi:10.1093/mnras/stu2759.
17. J. Knopik, P. Mach, A. Odrzywołek, MNRAS **467**, 4965-4969 (2017). doi: 10.1093/mnras/stx164.
18. S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, Cornell University, Ithaca, New York (1983).
19. M. V. Vavrukh, N. L. Tyshko, D. V. Dzikovskyi, O. M. Stelmakh, Mathematical Modeling and Computing **6**, 153-172 (2019). doi:10.23939/mmc2019.02.153.

20. M. V. Vavrukh, N. L. Tyshko, D. V. Dzikovskyi, Journal of Physical Studies **24**, 3902-1-3902-20 (2020). doi:10.30970/jps.24.3902.
21. S. Chandrasekhar, Chicago: University of Chicago Press (1939).
22. R. A. Lyttleton, Cambridge: Cambridge University Press (1953).
23. M. Abramowitz, I. A. Stegun, Government Printing Office Washington (1972).
24. R. E. Mennickent, G. Djurašević, MNRAS **432**, 799-809 (2013). doi: 10.1093/mnras/stt515.
25. R. S. Levenhagen, N. V. Leister, MNRAS **371**, 252-262 (2006). doi: 10.1111/j.1365-2966.2006.10655.x.
26. A. Domiciano de Souza et al., Astronomy & Astrophysics **569**, A10 (2014). doi:10.1051/0004-6361/201424144.
27. A. Slettebak, Astrophysical Journal, Suppl. Ser. **50**, 55-83 (1982). doi:10.1086/190820.
28. A. C. Carciofi et al., The Astrophysical Journal Letters **676**, L41-L44 (2008). doi:10.1086/586895.

Статтю отримано: 15.11.2020
Прийнято до друку: 30.11.2020

Internal structure of stars with axial rotation

M. Vavrukh, D. Dzikovskyi

Ivan Franko National University of Lviv,
astrophysic department,
Kyrylo and Methodiy St, 8, 79005 Lviv, Ukraine
e-mail: mvavrukh@gmail.com

Axial rotation is one of the main characteristics which are inherent for both normal stars and compact objects. A new approach for calculation of internal structure of stars with rapid rotation is proposed in the frame of polytropic model with equation of state $P(\mathbf{r}) = K(\rho(\mathbf{r}))^{1+1/n}$ (where n is the polytropic index, $\rho(\mathbf{r})$ is the local density, $P(\mathbf{r})$ is the local pressure) and constant angular velocity ω. The constant K and density in stellar center $\rho_c = \rho(0)$ are also model parameters. In dimensionless form the differential equilibrium equation is two-dimensional and two-parametrical, it depends on the index n and dimensionless angular velocity $\Omega = \omega(2\pi G\rho_c)^{-1/2}$. Its solutions are presented in the form of series by the orthogonal basis functions, and zero approximation is the Emden's functions, which correspond to the model with $\Omega = 0$. Integration constants are found from the condition, that the solutions satisfy the equilibrium equation in the integral form. They are solutions of a system of linear algebraic equations in which Ω is a parameter. At $n = 1$ basis functions are $j_{2l}(\xi)P_{2l}(\cos\theta)$, where $j_{2l}(\xi)$ are the spherical Bessel functions of first kind, $P_{2l}(\cos\theta)$ are the Legendre polynomials, ξ is the dimensionless radial coordinate, θ is the polar angle. At $n > 1$ basis functions are $\psi_{2l}(\xi)P_{2l}(\cos\theta)$, where $\psi_{2l}(\xi)$ are universal functions of variable ξ, which have asymptotics of functions $j_{2l}(\xi)$ at $\xi \ll 1$. They are calculated numerically. For all indices n it is established the existence of two types of solutions, which have different dependence on Ω and describe two type of structure – ellipsoidal and disk. Dependence of integration constants on angular velocity Ω is calculated for indices $n = 1$ and $n = 3$ and established the maximal value of $\Omega_{\max}(n)$ when instability occurs. Also, polytropic characteristics (mass, polar and equatorial radii, moment of inertia) are calculated as functions of parameter Ω. It is performed a comparison with the results of other authors obtained with the help of approximate analytical methods and numerical integration. It is proposed the algorithm for solving the inverse problem – a determination of the model parameters K, n and ρ_c for the individual star based on known observed data – mass, equatorial radius and eccentricity. These parameters are determined for the star α Eri as well as for models, which correspond to averaged statistical characteristics of stars of early spectral classes.

Key words: polytropic-stars, axial rotation, mechanical equilibrium equation, stability of stars.