

УДК 530.145  
PACS 03.65.-w, 02.40.Gh

# СПІВВІДНОШЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ У НЕКОМУТАТИВНОМУ ФАЗОВОМУ ПРОСТОРИ

Х. П. Гнатенко

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
Кафедра теоретичної фізики  
вул. Драгоманова, 12, 79005 Львів, Україна  
e-mail: khrystyna.gnatenko@gmail.com*

Вивчається простір з некомутованістю координат та некомутованістю імпульсів. Ми досліджуємо співвідношення невизначеностей для фізичних величин, зумовлені некомутованістю. Розглядається довжина, площа, об'єм, імпульс та фазовий об'єм у некомутованому фазовому просторі.

**Ключові слова:** некомутований фазовий простір, параметри некомутованості, співвідношення невизначеностей

## 1 Вступ

У зв'язку з розвитком теорії струн та квантової гравітації активно вивчається квантований простір, реалізований за допомогою деформацій звичних комутаційних співвідношень для координат та імпульсів [1, 2]. Одною з алгебр, яка дозволяє вирішити проблему квантування простору, є алгебра

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \quad (1)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (2)$$

$$[P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij}. \quad (3)$$

Звернімо увагу на те, що у порівнянні зі звичними комутаційними співвідношеннями маємо некомутованість координат та некомутованість імпульсів (1), (3). Комутатор координат дорівнює  $i\hbar\theta_{ij}$ , де  $\theta_{ij}$  – елементи сталої антисиметричної матриці, які називають параметрами координатної некомутованості. Комутатор імпульсів дорівнює  $i\hbar\eta_{ij}$ , тут  $\eta_{ij}$  – елементи сталої антисиметричної матриці, які називають параметрами імпульсної некомутованості.

Цікаво відзначити, що ідея некомутованості має довгу історію [3]. Її автором є Гайзенберг. Перша наукова праця, присвячена цій ідеї, була опублікована Снайдером у 1947 році [4].

Дослідження фізичних систем у квантованому просторі дозволяє встановити вплив квантованості простору (існування мінімальної довжини, кванта простору) на їх властивості. У некомутованому фазовому просторі вивчалися атом водню [5–8], гармонічний осцилятор [9–15], частинка у гравітаційному полі [16, 17, 19], система багатьох частинок [19] та багато інших фізичних систем.

У статті ми розглядаємо співвідношення невизначеностей у некомутованому фазовому просторі. Ми знаходимо обмеження на фізичні величини, які впливають із співвідношень невизначеностей та є зумовленими некомутованістю координат та некомутованістю імпульсів. Зокрема, ми розглядаємо довжину, площу, об'єм, імпульс та фазовий об'єм у некомутованому фазовому просторі.

У розділі 2 досліджуються співвідношення невизначеностей, які впливають із співвідношень некомутованої алгебри (1)–(3). Розглядаються обмеження на довжину, площу, об'єм, імпульс, фазовий об'єм у некомутованому фазовому просторі. Висновки представлено у розділі 3.

## 2 Обмеження на фізичні величини у некомутованому фазовому просторі

У некомутованому фазовому просторі, враховуючи те, що переставні співвідношення для координат та імпульсів мають вигляд (1), (3), можемо записати такі співвідношення невизначеностей:

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta X_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \theta_{ij}^2}{4}, \quad (4)$$

$$\langle \Delta P_i^2 \rangle \langle \Delta P_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \eta_{ij}^2}{4}. \quad (5)$$

Запишемо оператор квадрата довжини

$$\mathbf{R}^2 = \sum_i X_i^2, \quad (6)$$

Зауважимо, що координати  $X_i$  не комутують (1). Справедливою є така нерівність

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle^2 \geq 2 \langle \Delta X_1^2 \rangle \langle \Delta X_2^2 \rangle + 2 \langle \Delta X_2^2 \rangle \langle \Delta X_3^2 \rangle + 2 \langle \Delta X_3^2 \rangle \langle \Delta X_1^2 \rangle, \quad (7)$$

тут

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle = \langle \Delta X_1^2 \rangle + \langle \Delta X_2^2 \rangle + \langle \Delta X_3^2 \rangle. \quad (8)$$

Враховавши співвідношення невизначеностей (4), можемо записати обмеження на довжину у некомутованому фазовому просторі. Із (7), (4) знаходимо:

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle^2 \geq \frac{\hbar^2}{2} (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2). \quad (9)$$

Із отриманої нерівності (9) маємо:

$$\Delta R \geq \left( \frac{\hbar^2}{2} (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2) \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (10)$$

тут  $\Delta R = \sqrt{\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle}$  [18].

Розгляньмо оператор квадрата імпульсу у некомутовативному фазовому просторі

$$\mathbf{P}^2 = \sum_i P_i^2. \quad (11)$$

Тут оператори  $P_i$  задовольняють співвідношення некомутовативної алгебри (3). Можемо записати

$$\langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle = \langle \Delta P_1^2 \rangle + \langle \Delta P_2^2 \rangle + \langle \Delta P_3^2 \rangle. \quad (12)$$

Піднесемо (12) до квадрату та запишемо таку нерівність

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle^2 &= \langle \Delta P_1^2 \rangle^2 + \langle \Delta P_2^2 \rangle^2 + \langle \Delta P_3^2 \rangle^2 + 2\langle \Delta P_1^2 \rangle \langle \Delta P_2^2 \rangle + 2\langle \Delta P_2^2 \rangle \langle \Delta P_3^2 \rangle + \\ &+ 2\langle \Delta P_3^2 \rangle \langle \Delta P_1^2 \rangle \geq 2\langle \Delta P_1^2 \rangle \langle \Delta P_2^2 \rangle + 2\langle \Delta P_2^2 \rangle \langle \Delta P_3^2 \rangle + 2\langle \Delta P_3^2 \rangle \langle \Delta P_1^2 \rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

Взявши до уваги співвідношення невизначеностей (5), можемо записати

$$\langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle^2 \geq \frac{\hbar^2}{2} (\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2). \quad (14)$$

Введемо позначення:

$$\Delta P = \sqrt{\langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle}. \quad (15)$$

Врахувавши (14), знаходимо нерівність, яка задає обмеження знизу на імпульс у некомутовативному фазовому просторі

$$\Delta P \geq \left( \frac{\hbar^2}{2} (\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2) \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (16)$$

Цікаво зауважити, що із нерівностей (4) випливає також наявність обмежень на на площу та об'єм у некомутовативному фазовому просторі (1)-(3). Використавши (4), можемо записати таку нерівність, яка визначає обмеження на площу

$$\langle \Delta X_i \rangle \langle \Delta X_j \rangle \geq \frac{\hbar |\theta_{ij}|}{2}, \quad (17)$$

тут

$$\Delta X_i = \sqrt{\langle \Delta X_i^2 \rangle}. \quad (18)$$

Із (17) випливає анізотропія площі у некомутовативному фазовому просторі. Це пов'язано з тим, що  $|\theta_{12}| \neq |\theta_{23}| \neq |\theta_{31}|$  [18].

Розгляньмо  $\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$  у просторі з некомутовативністю координат та некомутовативністю імпульсів (1)-(3). Врахувавши (4), запишемо такі нерівності

$$\langle \Delta X_1 \rangle \langle \Delta X_2 \rangle \geq \frac{\hbar |\theta_{12}|}{2}, \quad (19)$$

$$\langle \Delta X_2 \rangle \langle \Delta X_3 \rangle \geq \frac{\hbar |\theta_{23}|}{2}, \quad (20)$$

$$\langle \Delta X_3 \rangle \langle \Delta X_1 \rangle \geq \frac{\hbar |\theta_{31}|}{2}. \quad (21)$$

Із (19)-(21) отримаємо:

$$\langle \Delta X_1 \rangle^2 \langle \Delta X_2 \rangle^2 \langle \Delta X_3 \rangle^2 \geq \frac{\hbar^3}{8} |\theta_{12} \theta_{23} \theta_{31}|. \quad (22)$$

Використавши (22) можемо записати обмеження на об'єм у некомутовативному фазовому просторі

$$\langle \Delta X_1 \rangle \langle \Delta X_2 \rangle \langle \Delta X_3 \rangle \geq \frac{\hbar^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} |\theta_{12} \theta_{23} \theta_{31}|^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Розгляньмо фазовий об'єм у просторі з некомутовативністю координат та некомутовативністю імпульсів.

Зауважимо, що у некомутовативному фазовому просторі оператори координат та імпульсів задовольняють звичні комутаційні співвідношення (1)-(3). Можемо записати співвідношення невизначеностей

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta P_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (24)$$

Із нерівності (24) випливає:

$$\prod_{i=1}^3 \langle \Delta X_i \rangle \langle \Delta P_i \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8}. \quad (25)$$

З іншого боку, врахувавши (5), (15), можемо записати такі нерівності

$$\langle \Delta P_1 \rangle \langle \Delta P_2 \rangle \geq \frac{\hbar |\eta_{12}|}{2}, \quad (26)$$

$$\langle \Delta P_2 \rangle \langle \Delta P_3 \rangle \geq \frac{\hbar |\eta_{23}|}{2}, \quad (27)$$

$$\langle \Delta P_3 \rangle \langle \Delta P_1 \rangle \geq \frac{\hbar |\eta_{31}|}{2}. \quad (28)$$

Використавши (19)-(21), (26)-(28), отримаємо:

$$\prod_{i=1}^3 \langle \Delta X_i \rangle^2 \langle \Delta P_i \rangle^2 \geq \frac{\hbar^6}{64} |\theta_{12} \theta_{23} \theta_{31} \eta_{12} \eta_{23} \eta_{31}|. \quad (29)$$

Із (29) знаходимо:

$$\prod_{i=1}^3 \langle \Delta X_i \rangle \langle \Delta P_i \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8} |\theta_{12} \theta_{23} \theta_{31} \eta_{12} \eta_{23} \eta_{31}|^{\frac{1}{2}}. \quad (30)$$

Нерівність (30) визначає обмеження знизу на фазовий об'єм, зумовлене некомутовативністю координат та некомутовативністю імпульсів.

Порівняємо нерівності (25) та (30). Нерівність (30) визначає сильніше обмеження на фазовий об'єм у випадку, коли  $|\theta_{12} \theta_{23} \theta_{31} \eta_{12} \eta_{23} \eta_{31}|^{\frac{1}{2}} > 1$ . Вагається, що параметри некомутовативності є порядку планківських масштабів, тому обмеження на фазовий об'єм у некомутовативному фазовому просторі визначається нерівністю (25).

## Висновки

У статті розглянуто тривимірний простір із некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів (1)-(3). Вивчено співвідношення невизначеностей для фізичних величин у некомутативному фазовому просторі.

Показано, що у некомутативному фазовому просторі довжина, площа та об'єм не можуть набувати як завгодно малих значень. Існують обмеження знизу на вищезазначені величини, зумовлені некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. Обмеження на довжину, площу та об'єм визначаються параметрами координатної некомутативності відповідно до нерівностей (10), (17), (23). Важливо зауважити, що із нерівності (17) впливає анізотропія площі у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. Також у роботі розглянуто обмеження на імпульс, зумовлені некомутативністю. Показано, що обмеження знизу на імпульс визначається параметрами імпульсної некомутативності відповідно до нерівності (16).

Розглянуто фазовий об'єм у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. Ми показали, що у некомутативному фазовому просторі існує обмеження на фазовий об'єм, яке визначається добутком параметрів координатної та імпульсної некомутативності (30).

## Подяки

Автор висловлює велику подяку професору В. М. Ткачуку, за цінні поради та обговорення результатів. Публікація підтримана в межах теми ФФ-30Ф МОН України (номер держреєстрації 0116U001539).

## Список використаної літератури

1. *N. Seiberg, E. Witten*, J. High Energy Phys. **9909**, 032 (1999).
2. *S. Doplicher, K. Fredenhagen, J.E. Roberts*, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994).
3. *R. Jackiw*, Ann. Henri Poincarre **4**, 913 (2003).
4. *H. Snyder*, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
5. *A. E. F. Djemai, H. Smail*, Commun. Theor. Phys. **41**, 837 (2004).
6. *Li Kang, Chamoun Nidal*, Chin. Phys. Lett. **23**, 1122 (2006).
7. *S. A. Alavi*, Mod. Phys. Lett. A **22**, 377 (2007).
8. *O. Bertolami, R. Queiroz*, Phys. Lett. A **375**, 4116 (2011).
9. *A. Smailagic, E. Spallucci*, Phys. Rev. D **65**, 107701 (2002).
10. *A. Smailagic, E. Spallucci*, J.Phys. A **35**, 363 (2002).
11. *A. Hatzinikitas, I. Smyrnakis*, J. Math. Phys. **43**, 113 (2002).
12. *Li Kang, Wang Jianhua, Chen Chiyi*, Mod. Phys. Lett. A **20**, 2165 (2005).
13. *C. Acatrinei*, Journal of High Energy Physics **09**, 007 (2001).
14. *P. R. Giri, P. Roy*, Eur. Phys. J. C **57**, 835 (2008).
15. *J. Ben Geloun, S. Gangopadhyay, F. G. Scholtz*, EPL **86**, 51001 (2009).

16. O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. de Aragao, P. Castorina, D. Zappalà, Phys. Rev. D **72**, 025010 (2005)
17. C. Bastos, O. Bertolami, Phys. Lett. A **372**, 5556 (2008).
18. Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, J. Phys. Stud. **20**, 1001 (5 p.) (2016).
19. Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, (2017) arXiv:1701.00809.

Стаття надійшла до редакції 23.01.2017

прийнята до друку 27.06.2017

## UNCERTAINTY RELATIONS IN NONCOMMUTATIVE PHASE SPACE

Kh. P. Gnatenko

*Ivan Franko National University of Lviv, Department for Theoretical Physics*

*12 Drahomanov St., Lviv, 79005, Ukraine*

*e-mail: khrystyna.gnatenko@gmail.com*

A space with noncommutativity of coordinates and noncommutativity of momenta is studied. We examine uncertainty relations for physical values caused by the noncommutativity. Length, area, volume, momentum, phase volume are considered in noncommutative phase space.

**Key words:** noncommutative phase space, parameters of noncommutativity, uncertainty relations

## СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ В НЕКОМУТАТИВНОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Х. П. Гнатенко

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*

*Кафедра теоретической физики*

*ул. Драгоманова 12, 79005 Львов, Украина*

*e-mail: khrystyna.gnatenko@gmail.com*

Изучается пространство с некоммутативностью координат и некоммутативностью импульсов. Мы исследуем соотношение неопределенностей для физических величин, обусловленные некоммутативностью. Рассматриваются длина, площадь, объем, импульс и фазовый объем в некоммутативном фазовом пространстве.

**Ключевые слова:** некоммутативное фазовое пространство, параметры некоммутативности, соотношение неопределенностей